Exponentielle de matrices-156

1 Introduction

C'est une leçon d'algèbre, donc, ne pas trop insister sur les équations différentielles, mais en même temps, on ne peut pas non plus ne pas en parler.

Avoir cette petite figure en tête vous apportera une vision juste de l'enjeu du problème :

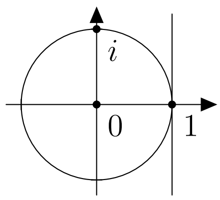

FIGURE 1 – Groupe du cercle unité et son espace tangent en 1

1.1 Définition et propriétés de base

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. On définit :

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Si on pose $n = 1$, on retrouve la fonction exponentielle bien connue [1] sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Proposition[1, Proposition VI-2.1]

(i) La série qui définit l'exponentielle converge normalement sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'exponentielle est une fonction continue (ne pas oublier de parler de l'utilisation des normes subordonnées, qui sont sous-multiplicatives).

1. L'exemple du cas $n = 1$ doit rester un modèle intuitif pour ne pas répondre d'énormité aux questions du jury.

(ii) Pour A quelconque et P inversible, on a : $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$ et $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

(iii) Si A et B commutent, on a : $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

(iv) Pour toute matrice A, on a : $\exp(-A)\exp(A) = \mathrm{Id} = \exp(A)\exp(-A)$. En particulier, $\exp(A)$ est inversible.

(v) Pour une matrice diagonale, on a :

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix} \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}).$$

(vi) Si une matrice N est nilpotente, alors $\exp(N) - \mathrm{Id}$ est nilpotente.

(vii) Le spectre de $\exp(A)$ est $\{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$.

(viii) Pour A quelconque, $\{\exp(tA),\ t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Différentielle

L'exponentielle est différentiable en la matrice nulle 0 et sa différentielle est l'identité Id de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; c'est un difféomorphisme local sur un voisinage de 0.

Plus précisément, on peut définir son inverse sur la boule ouverte centrée en I_n de rayon 1 de n'importe quelle norme subordonnée $||\cdot||$: si $||H|| < 1$, on pose :

$$\exp^{-1}(\mathrm{I}_n + H) = \log(\mathrm{I}_n + H) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{H^k}{k}.$$

Ceci peut se montrer par des arguments de calcul formel : si l'on prend les définitions de log et exp avec les séries ci-dessus, alors $\log(\exp(X)) = X$ est valable pour une indéterminée X, puisque l'égalité est valable sur $\mathbb{R}$.

Attention, si A est une fonction dérivable de la variable réelle t, alors $\exp(A)'$ n'est en général pas égal à $A'\exp(A)$. En revanche, cela est vrai si les $A(t)$ commutent tous entre eux, ce qui va impliquer que A' commute avec A.

1.3 Un exemple de calcul

Calculer $\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ [2, I.6.1]

1.4 Non injectivité

Pour la non injectivité, [1, VI-2.5], il suffit de voir que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n = \exp(0_n).$$

L'injectivité est remplacée par le fait que $\exp(tA) = \exp(tB)$ pour tout t réel (et même juste dans un voisinage de 0), implique $A = B$. C'est finalement ce que l'on appelle la *linéarisation*.

2 Exponentielle et décomposition de Dunford

2.1 Décomposition de Dunford multiplicative

On rappelle qu'une matrice U est dite *unipotente* si $U - \mathrm{I}_n$ est nilpotente, ou, de façon équivalente, si son spectre est réduit à $\{1\}$.

Proposition Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. L'exponentielle envoie une matrice diagonalisable, resp. diagonale, sur une matrice diagonalisable, resp. diagonale.
2. Réciproquement, si $\exp(A)$ est diagonalisable, resp. diagonale, alors A est diagonalisable, resp. diagonale.
3. L'exponentielle se restreint en une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes vers l'ensemble des matrices unipotentes. Son inverse est donnée par la fonction logarithme :

$$\log(\mathrm{I}_n + N) = N - \frac{1}{2}N^2 + -\frac{1}{3}N^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1} N^{n-1},$$

   où N est nilpotente (et donc, $U = \mathrm{I}_n + N$ est unipotente).

Le point 1 est évident, le point 3 découle de la fonction logarithme ci-dessus qui devient un simple polynôme dans cette situation.

Idée Pour le point 2, on peut écrire la décomposition de Dunford $A = D + N$, puis écrire $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)\big(\exp(N) - \mathrm{I}_n\big)$. Par unicité de la décomposition de Dunford, il vient $\exp(D)\big(\exp(N) - \mathrm{I}_n\big) = 0$ et donc $\exp(N) = \mathrm{I}_n$, ce qui implique $N(\mathrm{I}_n + N') = 0$, avec N' nilpotente, donc $N = 0$. Ce qui prouve que A est diagonalisable. Le cas diagonale en découle sans trop de soucis (on utilise le fait que l'exponentielle du spectre est le spectre de l'exponentielle).

Les choses sont détaillées de façon plus élémentaire dans la référence suivante :

Exemple Résoudre l'équation matricielle $\exp(A) = \mathrm{I}_n$, [1, VI, 2.3].

On voit alors que l'exponentielle peut transformer la décomposition de Dunford additive en une décomposition de Dunford multiplicative [2]. Cette décomposition se trouve souvent être plus pertinente quand on travaille sur des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.2 Calcul pratique de l'exponentielle

On peut calculer de l'exponentielle à l'aide de Dunford [Algébrie, Exercice I.6.4]. En effet, si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford et si Π_λ sont les projecteurs spectraux, où λ décrit le spectre de A, alors

$$\exp(D) = \sum_\lambda e^\lambda \Pi_\lambda,$$

Aspect algorithmique : Si on sait décomposer χ_A en produit $\prod_\lambda P_\lambda$, avec $P_\lambda = (X - \lambda)^{n_\lambda}$, alors, on a une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{\chi_A} = \sum_\lambda \frac{R_\lambda}{P_\lambda} = \frac{\sum_\lambda R_\lambda Q_\lambda}{\chi_A},$$

avec $Q_\lambda := \prod_{\beta\neq\lambda} P_\beta$. Et il vient alors l'identité de Bezout :

$$\sum_\lambda R_\lambda Q_\lambda = 1.$$

Une machine calcule alors très facilement $\Pi_\lambda := R_\lambda Q_\lambda$.

$\exp(N)$ se calcule à partir des $\exp(N\Pi_\lambda)\Pi_\lambda = e^\lambda \exp(N\Pi_\lambda - \lambda\mathrm{I})\Pi_\lambda$, avec $(N\Pi_\lambda - \lambda\mathrm{I})\Pi_\lambda$ nilpotent.

2.3 Surjectivité de l'exponentielle

Proposition[1, Exercice VI-B13]

L'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque Le fait que exp est surjectif (et continue) prouve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. Mais on peut prendre le problème à l'envers : la connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ permet de voir que l'exponentielle complexe est surjective (voir par exemple [3, Exercice IX-C1]).

2. Toute matrice inversible A se décompose de façon unique en $A = DU$, avec D diagonalisable, U unipotente et $DU = UD$.

Corollaire L'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

idée : Dans le sens inverse, c'est évident. Dans l'autre sens, $\exp(X) = A$, avec $A = B^2$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La preuve de la proposition précédente montre même qu'il existe un polynôme complexe P tel que $\exp(P(B)) = B$, et $X = P(B) + \overline{P}(B)$ fait l'affaire [3].

3 Décomposition polaire et homéomorphismes

L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire. Effectivement, la linéarisation est plus automatique puisque

Proposition [1, Proposition VI-2.5.1]
L'exponentielle est bijective (c'est même un homéomorphisme) de l'espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n$ sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives $\mathcal{S}_n^{++}$.

4 Applications

4.1 racine n-ième

On trouve une racine n-ième d'une matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ en calculant d'abord une matrice B telle que $\exp(B) = A$, puis, en posant $C = \exp(\frac{B}{n})$.

Penser en particulier à la racine carrée dans la décomposition polaire.

4.2 Equations différentielles

La solution de l'équation différentielle $Y'(t) = AY(t)$, avec $Y(0) = Y_0$ est donnée par $Y = \exp(tA)Y_0$.

Pour résoudre l'équation $Y'(t) = AY(t)+B(t)$, on se ramène à $(\exp(-tA)Y(t))' = \exp(-tA)B(t)$, et on intègre.

Voir [4].

4.3 Le groupe $\mathrm{O}(p, q)$

Définition Soit p et q deux entiers naturels. On note $\mathrm{O}(p, q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p, q), c'est-à-dire : $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$.

3. Admirez l'ingénieuse utilisation des polynômes d'endomorphismes ! Les matrices Y et $\overline{Y}$ ne commutent pas en général, mais $P(B)$ et $\overline{P}(B)$ commutent.

Proposition[1, Proposition VI-A2] Soit $p, q \neq 0$. Il existe un homéomorphisme :

$$\mathrm{O}(p,q) \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

Idée : On attaque $\mathrm{O}(p,q)$ par la décomposition polaire car la partie symétrique se linéarise (injectivité de exp sur les matrices symétriques). Les difficiles équations de $\mathrm{O}(p,q)$ se trouvent être linéarisées.

Corollaire[1, Corollaire VI-A5] Soit p et q deux entiers naturels non nuls.

(i) Le groupe topologique $\mathrm{O}(p,q)$ admet quatre composantes connexes,

(ii) le sous-groupe $H := \{\mathrm{I}_n, g, h, gh\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(p,q)$, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$,

(iii) l'application η, de $\mathrm{O}(p,q)$ vers le groupe multiplicatif $\{1,-1\}^2$, qui envoie $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ vers $\big(\mathrm{sgn}(\det(A)), \mathrm{sgn}(\det(D)\big)$ est bien définie, et est un morphisme continu et surjectif de groupes,

(iv) la composante connexe de l'identité est :

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}_0(p,q) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(p,q) \ : \ A \in \mathrm{GL}_p^+(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(p,q) \ : \ A \in \mathrm{GL}_p^+(\mathbb{R}), D \in \mathrm{GL}_q^+(\mathbb{R}) \right\},\end{aligned}$$

(v) on a : $\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{SO}_0(p,q) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

4.4 Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Proposition [3, Proposition IX-A.5.1]

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un morphisme continu. Il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \exp(tX).$$

4.5 Espaces tangents aux groupes de Lie

Un groupe de Lie est ici un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ayant une structure de sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On voit dans cette proposition une généralisation complète de la situation de la figure 1. On voit aussi que l'exponentielle fournit des cartes pour les structures de variétés des groupes de Lie.

Proposition[3, Corollaire IX-A.6.2] Pour G un groupe de Lie fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et T_eG l'espace tangent à G en $e = \mathrm{I}_n$, on a :

$$T_eG = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \exp(tX) \in G\}.$$

Exemples $T_e(\mathrm{SL}_n)$ est l'espace des matrices de trace nulle, et $T_e(\mathrm{SO}_n)$ est l'espace des matrices anti-symétriques.

Entre autres, cette proposition implique facilement que $T_e(G) \cap T_e(G') = T_e(G \cap G')$, alors qu'en général on n'a que l'inclusion inverse. L'égalité provient justement du fait que l'exponentielle fournit une carte commune à G et à G'.

Il n'est pas mauvais de savoir que l'espace tangent à un groupe de Lie possède une structure d'algèbre de Lie : disons dans ce cadre qu'elle est stable par l'application $(X, Y) \mapsto [X, Y] := XY - YX$ appelée crochet de Lie. La preuve de ce résultat s'appuie fortement sur les propriétés de l'exponentielle, mais les preuves sont un peu difficiles à maîtriser.

Il faut tout de même bien comprendre l'enjeu de toutes ces techniques : la linéarisation, qui permet par exemple de montrer que l'on a un difféomorphisme à l'aide de considération de dimensions. Voir par exemple la preuve de

Proposition [3, Proposition IX-2.1]
On a un isomorphisme de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

4.6 Théorème de Cartan

Le théorème de Cartan peut être signalé, mais il n'est pas conseillé de le mettre en développement. C'est un théorème profond qui montre que dans le cadre des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, une propriété faible (être fermé) implique une propriété forte (être une sous-variété).

Théorème de Cartan[3, Théorème IX-A.6.4] Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors G est un groupe de Lie.

Il est bon d'avoir un petite idée de comment l'exponentielle intervient dans la preuve :

Idée-clef Par analyse-synthèse, si G était un groupe de Lie de dimension m, alors, pour trouver le difféomorphisme local qui assure la définition de sous-variété, on penserait à l'exponentielle, et pour le sous-espace de dimension m, à l'algèbre de Lie $T_e(G)$. Or, on a $T_e(G) = \{X,\, \exp(tX) \in G,\, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Le fait que G est fermé prouve que $T_e(G)$ est bien un sous-espace. A la bonne heure ! Mais la difficulté est ensuite de montrer qu'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lequel l'exponentielle est un difféomorphisme, fournit un difféomorphisme local de $T_e(G)$ sur le voisinage correspondant de G. Et cette difficulté provient, en gros, du fait que $\exp(X + Y) \neq \exp(X)\exp(Y)$. Qu'à cela ne tienne, on remplace l'exponentielle par une application semblable, mais plus adaptée au problème : on choisit un supplémentaire V du sous-espace $T_e(G)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis, on considère (plutôt que la fonction exp)

$g(A) = \exp(X)\exp(Y)$, avec $A = X + Y$ dans la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = T_e(G) \oplus V$.

Développements

• Détailler l'équation $\exp(A) = \mathrm{I}_n$ (il faut s'attendre ce que l'on nous demande la généralisation $\exp(A) = D$ diagonale !)

• La surjectivité de l'exponentielle complexe (il faut s'attendre à une discussion sur le cas réel).

• La première proposition sur l'étude de $\mathrm{O}(p, q)$.

5 Le 6 minutes

• Définition analytique de l'exponentielle et premières propriétés (insister sur la convergence normale)

• Faire la figure 1. Parler du passage de la droite (espace vectoriel) au cercle (le groupe), parler de la non injectivité [4], et de sa compensation $\forall_{\mathbb{R}} t$, $\exp(tA) = \exp(tB) \Leftrightarrow A = B$. Comment passer du cercle à la droite : la linéarisation.

• Dunford : exp réalise une bijection (un homéomorphisme aussi) des nilpotents vers les unipotents. Il reste à s'occuper du cas diagonalisable, qui lui, se ramène à étudier le cas $n = 1$. Parler de A diagona(lisab)le ssi $\exp(A)$ diagon(alisab)le. Parler de la surjectivité.

• Décomposition polaire : exp réalise une bijection (un homéomorphisme aussi) des symétriques, resp. hermitiennes, vers les symétriques, resp. hermitiennes, définie positives. Il reste à s'occuper du cas des orthogonaux, resp. unitaires, mais la relation $A = OS$ permet souvent de se sortir de la situation. Parler de l'étude de $\mathrm{O}(p, q)$.

• L'espace tangent en l'identité à un sous-groupe permet par le principe de translation de comprendre tous les espaces tangents en chaque élément du groupe. Il s'exprime en termes d'exponentielle. L'exponentielle permet alors de construire des cartes pour les sous-groupes fermés de GL_n, dont le théorème de Cartan dit qu'ils ont une structure de sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Revenir élégamment sur la figure qui illustre bien la tangence.

4. déjà coupable pour $n = 1$, sur $\mathbb{C}$, de tous les $+2k\pi$ dans les formules de trigo.

Références

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.* Calvage et Mounet, 2017.

[2] Philippe Caldero. *Carnet de Voyage en Algébrie.* Notes de cours par Chrystel Bouvier et Elisabeth Bruyère, 2015.

[3] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-tome 2.* Calvage et Mounet, 2018.

[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Editions Cépaduès, 2015.