Formes Quadratiques Réelles-171

0. Prequel

Une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie est tout simplement une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées (ce qui ne dépend pas de la base choisie). En caractéristique différente de 2, les formes quadratiques sont en bijection avec les formes bilinéaires symétriques ; la bijection est donnée par la fameuse formule

$$b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)),$$

et l'avantage de cette « forme polaire » est de pouvoir définir une matrice (symétrique) associée dans une base fixée. La théorie classique part donc de la forme bilinéaire symétrique, mais en pratique, la définition d'origine de la forme quadratique (le degré 2) ne doit pas être perdue de vue.

Il y a plusieurs façons d'aborder une forme quadratique q de forme polaire b :

1. Par sa matrice (symétrique) dans une base $A := (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
2. Par son endomorphisme associé φ , via un produit scalaire : $b(u,v) = \langle u, \varphi(v) \rangle$.
3. Par sa formule polynomiale explicite (par exemple pour la méthode de Gauss).

Comme d'habitude en algèbre linéaire, il ne faut pas se leurrer : une matrice symétrique est bien tentante car elle permet de faire des calculs plutôt que des raisonnements.

Mais il ne faut jamais oublier que cette matrice n'est que l'ombre d'un objet plus géométrique : la forme quadratique dont elle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Cette forme quadratique est plus souple (et solide à la fois !) : elle permet de passer à la géométrie et de faire plus aisément des considérations de changements de bases.

Peaux de bananes classiques et pièges à mammouths :

1. Ne pas confondre le noyau de la forme quadratique (qui est un sous-espace) et le cône isotrope (qui est juste un cône). Le premier est inclus dans le second, strictement sauf dans les cas positifs ou négatifs.

2. Ne pas confondre non dégénéré et défini positif.
3. La restriction d'une forme quadratique non dégénérée à un sous-espace F peut être dégénérée. En fait, le noyau de cette restriction est égal à $F \cap F^{\perp}$. En revanche, la restriction reste non dégénérée pour un produit scalaire.
4. Dans le même ordre d'idée, même dans le cas non dégénéré, l'orthogonal d'un sous-espace F n'est pas toujours en somme directe avec son orthogonal $F^{\perp}$.
5. Il y a plusieurs classifications des coniques ! La classification affine ($G = \mathrm{GA}_2$), la classification euclidienne ($G = \mathrm{Is}_2(\mathcal{E})$, voir le groupe des similitudes $G = \mathbb{R}^* \times \mathrm{Is}_2(\mathcal{E})$) pour se restreindre au programme, et la classification projective ($G = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$).

Tout ce qui suit est (sauf exception) dans le livre [1].

I. Les fondamentaux

1. Orbites de congruence pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, classifiées par la signature (théorème de Sylvester), [1, V-1.4.1(ii), B.3].
2. Les stabilisateurs d'orbites sont les groupes orthogonaux. Forme normale. Groupes $\mathrm{O}(p, q)$, [1, V-1.4.7].
3. Lien entre réduction et congruence 270-272 : le théorème d'orthogonalisation simultanée, [1, V-5.3, 5.4, 5.5, 5.6].

   Ne pas louper : deux matrices sont O_n-congruentes si et seulement si elles sont O_n-semblables.
4. Coniques réelles. Classification affine, classification euclidienne, [1, V-6].
5. Le terme d'ordre 2 dans le développement de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique. En cas de singularité, cette forme quadratique (en fait, sa signature) décide de quel type est cette singularité.

II. Questions classiques du jury

1. Méthode de Gauss, [1, V-1.3.1].
2. Soit f, g deux formes linéaires sur un espace vectoriel réel E. Montrer que fg est une forme quadratique. Quelle est son rang et sa signature ? [1, V-D.2]
3. Pourquoi une matrice symétrique définie positive S peut s'écrire sous la forme $S = {}^tPP$, [1, V-B.3.7 (iv)].

4. Pouvez-vous trouver une matrice symétrique non diagonalisable ?
   Bon ben déjà pas sur $\mathbb{R}$, alors disons sur $\mathbb{C}$: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$
5. Pourquoi une forme quadratique définie est-elle forcément définie positive ou définie négative, [1, V-D.1] ?
6. Dessiner les nappes quadratiques en dimension 3, *i. e.* les surfaces d'équation $q(u) = k$, $u \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$.
7. Si une matrice symétrique est définie positive, toutes ses sous-matrices principales sont symétriques définies positives voir [1, V-D.3] pour une considération plus générale.
8. Le théorème de Witt dans le cas réel, [1, V-D.15]. Dans le cas où $q\mid_F$ est non dégénéré (plus facile). Le cas où $q\mid_F$ est dégénéré demande le gonflement hyperbolique, voir [1, V-D.14]..
9. On suppose que q est une forme quadratique sur un espace réel de dimension n, de signature (s,t), avec $s+t=n$. Quelle est la dimension d'un sous-espace isotrope maximal ? *Réponse :* $\min\{s,t\}$.
10. Quelle est la signature de la forme quadratique $\operatorname{tr}({}^tAA)$ sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Et la forme $\operatorname{tr}(A^2)$? Au fait, pourquoi ce sont bien des formes quadratiques ? Voir [1, V-D.8)].

III. Les rigolos

1. Caractérisation géométrique des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle par sa forme quadratique associée, [1, V-D27]. D.27
2. Tout hyperplan contient une matrice orthogonale, [1, V-D.7+VI-B.10].
3. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (application de la décomposition polaire), [1, VI-1.2.3].
4. Tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal, [1, VI-1.2.5]
5. Le cône d'Apollonius $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ de $\mathbb{R}^3$ dont les sections sont les coniques.
6. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ de signature $(2,1)$, montrer que la surface d'équation $q(u) = 1$ dans $\mathbb{R}^3$ est une surface réglée. On peut voir qu'elle est non vide grâce à Sylvester, puis, que pour tout u solution, le sous-espace q-orthogonal à u contient un élément isotrope non nul v, ce qui prouve que la droite affine $u + \lambda v$ est incluse dans l'ensemble solution. Voir aussi, [1, VI-B.16, 7)].

IV. Les développements

1. Théorème de Sylvester, [1, V-1.4.1, B.3]. Niveau : 2, Originalité : 1

2. L'adhérence des orbites de congruence, [1, V-1.5.2]. Niveau : 4, Originalité : 4
3. Lien entre réduction et congruence : le théorème d'orthogonalisation simultanée, [1, V-5.4]. Niveau : 3, Originalité : 2
4. Critère pour la signature d'une matrice symétrique réelle par les mineurs principaux, [1, V-D.3]. Corollaire 5.6. Niveau : 2, Originalité : 3
5. Décomposition polaire et applications :
   (a) Etude du groupe O(p,q)+O(p,q) est compact ssi la forme quadratique est définie, [1, V-B.5, VI-A].Niveau : 4, Originalité : 3
   (b) Tout hyperplan contient une matrice orthogonale, [1, V-D.7+VI-B.10]. Niveau : 3, Originalité : 5
6. Formes de Hankel, [1, V-D.26]. Niveau : 4, Originalité : 3
7. Représentation sur l'espace des formes bilinaires symétriques, [2, X-B.21]. Indicateur de Frobenius Schur, [2, X-E.6]. Niveau : 5, Originalité : 4

Références

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.* Calvage et Mounet, 2017.

[2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.

Allez, c'est pas tous les jours Noël ! Voilà les goodies !

Exercice 0.1. [**Nullstellensatz quadratique]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et soient q, q' deux formes quadratiques non dégénérées sur E, de formes polaires respectives φ et φ'. On note

$$\mathcal{C}_q := \{u \in E,\, q(u) = 0\}$$

le cône isotrope de q. On suppose qu'il existe u non nul [a], que l'on supposera fixé dans la suite dans $\mathcal{C}_q$, et on veut montrer que $\mathcal{C}_{q'} = \mathcal{C}_q$ si et seulement si q' et q sont proportionnelles entre elles. Seule la partie « seulement si » mérite que l'on s'y intéresse ! On suppose donc $\mathcal{C}_{q'} = \mathcal{C}_q$. On note H_u, resp. H'_u, l'hyperplan [b] orthogonal à u pour la forme q, resp. q'.

1. Soit v un vecteur non nul de E et soit $D_{u,v} := \{\alpha u + v,\, \alpha \in \mathbb{K}\}$, la droite affine de direction u et « passant par » v.
   (a) On suppose ici $v \in H_u$. Montrer que $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v}$ est égal, soit à $D_{u,v}$, si $v \in \mathcal{C}_q$, soit à l'ensemble vide, si $v \notin \mathcal{C}_q$.
   (b) On suppose ici $v \notin H_u$. Montrer que $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v}$ consiste en un point unique que l'on précisera.
2. (a) Déduire de 1. que $H_u = H'_u$, puis, qu'il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi'(u, ?) = \lambda_u \varphi(u, ?)$.
   (b) Déduire ensuite de 1.b) que $q'(v) = \lambda_u q(v)$ pour tout $v \notin H_u$. Comment conclure que q et q' sont proportionnelles lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?
3. Montrer que $\varphi'(v, w) = \lambda_u \varphi(v, w)$ pour tout $v, w \notin H_u$.
   On pourra noter que dans ce cas, soit $v + w \notin H_u$, soit $v + 2w \notin H_u$.
4. Montrer que pour tout hyperplan H de E, il existe une base $(e_i)_i$ de E telle que $e_i \notin H$ pour tout i, puis, conclure que q et q' sont proportionnelles.

a. On voit tout de suite qu'avec les formes $q = x^2 + y^2$ et $q' = x^2 + 2y^2$ sur $\mathbb{R}^2$, l'implication serait fausse.
b. Comme q est non dégénérée et u non nul, il s'agit bien d'un hyperplan.

Soluce

1. On note déjà pour commencer que $q(u) = 0$, et donc

$$q(\alpha u + v) = \alpha^2 q(u) + 2\alpha\varphi(u, v) + q(v) = 2\alpha\varphi(u, v) + q(v).$$

   (a) Comme $v \in H_u$, on sait que $\varphi(u, v) = 0$. La formule ci-dessus prouve que $q(\alpha u+v)=q(v)$. On en déduit que si $q(v)=0$, $D_{u,v}\subset \mathcal{C}_q$ et que sinon $D_{u,v}\cap\mathcal{C}_q=\emptyset$.

(b) Si $v\notin H_u$, alors $\varphi(u,v)\neq 0$. On obtient $0=q(\alpha u+v)=2\alpha\varphi(u,v)+q(v)$. En caractéristique différente de 2, la seule intersection est $\alpha_0 u+v$ pour $\alpha_0:=-\frac{q(v)}{2\varphi(u,v)}$.

2. (a) Si on fait une synthèse de la question 1, on constate que $v\in H_u$ si, voir 1.b), et seulement si, voir 1.a), $\mathcal{C}_q\cap D_{u,v}$ est une droite ou le vide. Comme $\mathcal{C}_q=\mathcal{C}_{q'}$, il est équivalent de dire que $v\in H'_u$. Donc, $H_u=H'_u$.

Posons $\varphi_u=\varphi(u,?)$, resp. $\varphi'_u=\varphi'(u,?)$, dans E^*, de sorte que H_u, resp. H'_u, est l'anté-orthogonal de φ_u, resp. φ'_u. Plus précisément

$$H_u=\{x,\,\varphi_u(x)=0\}=:{\varphi_u}^o,\; H'_u=\{x,\,\varphi'_u(x)=0\}=:{\varphi'_u}^o.$$

Il vient

$$\mathbb{K}\varphi_u=(\varphi_u^o)^\perp=H_u^\perp={H'}_u^\perp=\mathbb{K}\varphi'_u.$$

D'où l'existence de λ_u, qui est clairement non nul.

(b) On a bien sûr $\mathcal{C}_q\cap D_{u,v}=\mathcal{C}_{q'}\cap D_{u,v}$ par hypothèses. Si $v\notin H_u$, on a alors, par 1.b) :

$$-\frac{q'(v)}{2\varphi'(u,v)}=-\frac{q(v)}{2\varphi(u,v)}.$$

On obtient l'assertion voulue en utilisant $\varphi'(u,v)=\lambda_u\varphi(u,v)$.

Dans les cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a $q'(v)=\lambda_u q(v)$ sur le complémentaire de H_u, qui est dense [1] dans E. Par continuité des formes quadratiques, l'égalité a lieu sur tout E.

3. Tout d'abord, supposons $v+w\in H_u$, alors, par l'absurde, si $v+2w\in H_u$, on aurait $w=(v+2w)-(v+w)\in H_u$, contrairement à l'hypothèse. Si $v+w\notin H_u$, on peut utiliser la formule classique $2\varphi(v,w)=q(v+w)-q(v)-q(w)$, pour déduire aisément notre assertion, par 2.b). Sinon, $v+2w\notin H_u$, et on peut utiliser $4\varphi(v,w)=q(v+2w)-q(v)-4q(w)$.

4. Soit H un hyperplan de E ; nous allons construire la base $(e_i)_i$. Tout d'abord, on se fixe une base $(e'_i)_i$ de E, et on construit l'hyperplan H' d'équation $\sum_i x'_i=0$ dans cette base. Clairement, H' ne contient aucun des vecteurs e'_i. Soit g dans $\mathrm{GL}(E)$ qui envoie H' sur H. Il suffit de poser $e_i=g(e'_i)$ pour tout i, pour obtenir la propriété voulue.

1. Si $x\in H_u$ et $y\notin H_u$, alors $x+\varepsilon y\notin H_u$ pour tout $\varepsilon>0$. On en déduit la densité du complémentaire.

Si l'on pose $H = H_u$, on voit, par 3), que dans la base (e_i) ainsi construite, les matrices de φ' et φ sont proportionnelles. Donc, φ' et φ sont proportionnelles, ce qui fournit le résultat attendu.