Théorie des représentations : le Rekazator

1 Les développements

1. Donner la table de caractères de (selon les goûts, l'humeur et l'ambition) $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$.
   Leçons 101-103-104-105-107-108-161-183.
2. Dans la table de caractères d'un groupe fini, on trouve au moins un zéro sur chaque ligne pour les irreps de degré > 1.
   Leçons 102-104-107-120-125-144.
3. Une représentation irréductible sur $\mathbb{C}$ peut se réaliser sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$– comprendre : ρ est isomorphe à une représentation de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$– si et seulement si
   $$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g^2) = 1$$
   Voir [1, Proposition X-E.5]
   Leçons 104-107-158-159-170-171-183.
4. Condition pour que la table de caractères d'un groupe soit dans $\mathbb{Z}$, puis montrer que la condition est satisfaite pour $\mathfrak{S}_n$.
   Leçons 102-105-107-120-125-144
5. Analyse harmonique sur un cube. Si on place six nombres sur les faces d'un cube, et si à chaque étape, on remplace chaque nombre par la moyenne des faces adjacentes, que va-t-on obtenir au bout de n étapes ?
   Leçons 101-104-105-107-155-183.
6. Si un groupe fini G agit sur un ensemble fini X, on en déduit une représentation de G sur $\mathbb{C}^X$. Cette représentation modulo la triviale est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est doublement transitive (au passage, on redémontre la formule de Burnside), voir [1, Proposition X-B.15].
   Leçons 101-104-105-107

7. Théorème de structure pour les groupes abéliens finis (par le théorème de relèvement des caractères).
   Leçons 104-107-110
8. Treillis des sous-groupes distingués + critère de simplicité par la table de caractères pour un groupe fini ou caractérisation du centre.
   Leçons 103-104-107

2 A placer dans les leçons

Ce qui suit ne fait pas partie de développements à proprement parler, pour des raisons de consistance et/ou de transversalité, mais peut se placer avec élégance et brio dans une leçon.

1. Calcul de la moyenne et variance de la variable sur $\mathfrak{S}_n$ donnant le nombre d'invariants pour l'action naturelle,[1, B.17].
   Leçons 101-104-105-107-190
2. Lecon 150 (action de groupe sur un espace de matrices) : Action de G sur Hom(V,W) –> l'ensemble des caractères irréductibles forme une famille unitaire, [1, X-B7, X-B8] (en fait une base de l'espace des fonctions centrales, mais ça, les amis, c'est une autre histoire)
3. Leçon 150 : Caractère de G agissant par congruence sur l'espace des matrices symétriques, [1, X-B.19], ce qui peut déboucher (ou pas) sur l'indicatrice de Frobenius-Schur.
4. Leçon 152 : Le déterminant peut être vu comme l'image du projecteur sur la composante ϵ-isotypique pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace des n-formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$. Rigolo : on en déduit que
   $$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)n^{c_\sigma}=1,$$
   où c_σ est le nombre de cycles dans la décomposition de σ.
5. Leçon 154 (Sous-espaces stables) : Finalement, la théorie des représentations permet de comprendre quels sont les sous-espaces stables pour une famille finie d'endomorphismes d'un espace E qui forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Cela justifie de placer dans cette leçon le théorème de Maschke (semi-simplicité des représentations) et plus si affinité.
6. Leçon 155 (Matrices diagonalisables) : Si ρ est une représentation finie d'un groupe d'ordre n, alors le théorème de Lagrange implique que $\rho(g)$ est annulé par X^n-1, un polynôme scindé simple ; il est donc

diagonalisable. Ceci est à la base de bon nombre de propriétés dans la théorie des représentations.

7. Leçon 159 (Formes linéaires) : Penser à la représentation duale et à son caractère. On voit que la dualité, selon son habitude fournit une représentation gratuite à partir d'une représentation donnée. Noter qu'une représentation est isomorphe à sa duale si et seulement si son caractère est réel.
8. Leçon 160 (Endomorphismes remarquables) : Dans la théorie des représentations des groupes finis, toute sous-représentation possède un supplémentaire. Cela provient du fait que ce sont des endomorphismes remarquables : ils sont stables pour une certaine forme hermitienne.
9. Leçon 183 (Groupes en géométrie) Le fameux théorème de Napoléon peut se voir grâce à l'action d'un groupe cyclique sur la figure. Plus difficile, la construction de l'icosaèdre peut se voir à partir de l'indicatrice de Frobenius-Schur d'une représentation irréductible de degré 3 du groupe $\mathfrak{A}_5$. On voit ainsi comment la théorie des représentations, une fois passée l'obstruction de descente sur $\mathbb{R}$, permet de tracer de jolis solides.
10. Leçon 190 (Combinatoire) On peut, grâce à la table des représentations d'un groupe fini G, calculer le nombre de solutions de certaines équations dans G. On peut ensuite déceler l'existence de sous-groupes de G isomorphes à (disons) $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_4$...

Références

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.