Le théorème de Springer sur les formes quadratiques

Voici un joli résultat de Springer conjecturé par Witt et prouvé par Springer (et paraît-il, oralement, bien plus tôt, par Emile Artin). Il peut constituer un développement brillant et original, sans être trop difficile. A placer dans les leçons : 125, 141, 170. Références : [1, Théorème III-2.1], [2, Théorème 1.5.1].

Théorème 0.1 (Théorème de Springer)**.** On fixe un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\mathbb{L}$ de degré m impair de $\mathbb{K}$. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ et $q_{\mathbb{L}}$ son prolongement naturel à $\mathbb{L}^n$. On suppose que $q_{\mathbb{L}}$ possède un vecteur isotrope non nul dans $\mathbb{L}^n$. Alors, q possède un vecteur isotrope non nul dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Par récurrence sur m, on voit que le corps $\mathbb{L}$ est une extension itérée $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha_1][\alpha_2]\cdots[\alpha_k]$ de $\mathbb{K}$. Par le théorème de la base télescopique, toutes les extensions intermédiaires $[\mathbb{K}[\alpha_1][\alpha_2]\cdots[\alpha_{i+1}] : \mathbb{K}[\alpha_1][\alpha_2]\cdots[\alpha_i]]$ sont de degrés impairs. Ainsi, par récurrence sur $\mathbb{K}$, on peut se ramener au cas où $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$.

Soit μ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$, on sait que μ est irréductible sur $\mathbb{K}$, de degré m, plus précisément, on a l'isomorphisme de corps $\mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu)$.

On a donc

$$q_{\mathbb{L}}(y) = q_{\mathbb{L}}(y_1, y_2, \cdots, y_n),\ y = (y_i)_i \in \mathbb{L}^n.$$

On va maintenant montrer le théorème par récurrence sur m.

Pour $m = 1$, c'est on ne peut plus clair [1]

Supposons donc le théorème vrai pour tout degré strictement inférieur à m. Soit y un vecteur isotrope non nul pour $q_{\mathbb{L}}$. On a donc $q_{\mathbb{L}}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$, avec, pour tout i, $y_i = g_i(\alpha)$, où les g_i sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ que l'on peut choisir de degré $\deg(g_i) < m$.

Il vient donc $q_{\mathbb{L}}\left(g_1(\alpha), g_2(\alpha), \cdots, g_n(\alpha)\right) = 0$ dans $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu)$, que l'on peut relever dans $\mathbb{K}[X]$ par

$$q(g_1, g_2, \cdots, g_n) = \mu h \in \mathbb{K}[X],\ h \in \mathbb{K}[X].$$

1. Avez-vous noté que 1 était impair ?

Notons que le polynôme de gauche est de degré pair strictement inférieur à $2m$, et donc h est de degré impair avec $\deg(h) < 2m - m = m$.

Supposons que les g_i ont un pgcd non trivial δ. Alors, d'une part, μ ne divise pas δ, car sinon, on aurait :

$$y_i = g_i(\alpha) = 0$$

pour tout i, contrairement à l'hypothèse que y est non nul. Donc, comme δ^2 divise le polynôme de gauche, δ^2 divise μh et donc δ^2 divise h par le lemme de Gauss.

On peut donc, en divisant par δ^2, se ramener au cas où les g_i sont globalement premiers entre eux.

Soit h_0 un diviseur irréductible de h, sur $\mathbb{K}$, de degré impair (il en existe forcément un puisque h est de degré impair). On considère le corps $\mathbb{L}_0 = \mathbb{K}[X]/(h_0) = \mathbb{K}[\beta]$, où β est la classe de X.

L'extension $\mathbb{L}_0$ est de degré impair sur $\mathbb{K}$ et de plus ce degré est inférieur à $\deg(h)$, donc, strictement inférieur à m. En évaluant en β l'identité polynomiale obtenue ci-dessus, il vient

$$q_{\mathbb{L}}\left(g_1(\beta), g_2(\beta), \cdots, g_n(\beta)\right) = 0 \in \mathbb{L}_0.$$

le vecteur isotrope $(g_i(\beta))_i \in \mathbb{L}_0^n$ est non nul car sinon, h_0 diviserait tous les g_i (puisque h_0 est le polynôme minimal de β), or, ils ont été choisis globalement premiers entre eux.

Et donc, par récurrence sur m, q possède un vecteur isotrope dans $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Dans la référence [1], les auteurs diagonalisent la forme quadratique q, ce qui oblige à restreindre le résultat à la caractéristique différente de 2.

Références

[1] Rached Mneimné Tuong-Huy Nguyen Alain Debreil, Jean-Denis Eiden. *Formes Quadratiques et Géométrie.* Calvage et Mounet, 2015.

[2] Bruno Kahn. *Formes quadratiques sur un corps.* Société mathématique de France, 2008.