Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre Automne 2010

Corrigé bref du Contrôle Partiel

**Exercice 1.**

1. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2. Le théorème de Sylow implique l'existence et l'unicité de 7-Sylow de $G$.

3. Notons $\pi$ la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/S$. Comme $\pi|_T$ est isomorphe, $\pi$ admet une section, d'où la conclusion.

4. Il y a trois morphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; $\bar{1} \mapsto (\bar{i} \mapsto 2\bar{i})$, $\bar{1} \mapsto (\bar{i} \mapsto 4\bar{i})$ et $\bar{1} \mapsto (\bar{i} \mapsto \bar{i})$. Notons-les $\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi_3$, respectivement. Notons un générateur de $S$ par $x$ et celui de $T$ par $y$. On a $S \rtimes_{\varphi_1} T = \langle x, y | x^7 = y^3 = e,\ yxy^{-1} = x^2 \rangle$, $S \rtimes_{\varphi_2} T = \langle x, y | x^7 = y^3 = e,\ yxy^{-} = x^4 \rangle$. En particulier, $S \rtimes_{\varphi_3} T \cong S \times T$ est abélien.

5. Comme $S \rtimes_{\varphi_1} T$ est isomorphe à $S \rtimes_{\varphi_2} T$ (en faisant associer $(x^i, y^j)_{\varphi_1}$ à $(x^i, y^{2j})_{\varphi_2}$), on a que $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

**Problème 2.**
**<u>Partie A.</u>**

1. $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. Le premier enoncé est trivial. Comme $G$ est un $p$-groupe $|Z(G)| = p$ ou $p^2$. Si $|Z(G)| = p^2$, alors, $G/Z(G)$ est d'ordre $p$ donc cyclique qui implique que $G$ est abélien.

3. Comme $G/Z(G)$ est d'ordre $p^2$ qui ne peut pas être cyclique, d'où la conséquence.

**<u>Partie B.</u>**

1. Comme $\pi(x^p) = e$ par A.3., $x^p \in Z(G)$, d'où le résultat. Comme $\pi(H)$ est un sous-groupe distingué de $G/Z(G)$, $\pi^{-1}(\pi(H)) = HZ(G) = H$ est distingué.

2. Par définition, $yH \in G/H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas l'élément neutre donc un générateur. Ceci dit que $G = \amalg_{0 \leq i < p} y^i H$. Si $x$ et $y$ commutent, $G$ est forcément abélien.

3. Comme $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})| = p(p-1)$, le théorème de Sylow implique l'extistence et l'unicité de $p$-Sylow de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

4. $(1+p)^p = 1 + \binom{p}{1}p + \sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} p^i \equiv 1 + \binom{p}{1}p \equiv 1 \mod p^2$, d'où le résultat.

5. Comme $\Phi(y) \neq \mathrm{id}$, $|\mathrm{Im}(\Phi)|$, qui n'est pas 1, divise $|M|$ et $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})|$, d'où la conclusion.

6. Sous l'isomorphisme $H \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z};\ x \mapsto \bar{1}$, 3. et 5. implique que $\mathrm{Im}(\Phi)$ correspond à $K$. Par 4., on en déduit le résultat.

7. Comme $\Phi(y)$ engendre $\mathrm{Im}(\Phi)$, d'où le résultat.

8. Il est claire que $z \in G \setminus H$. On a

$$\begin{aligned} z^p =& (y^i x^{-j}) \overbrace{(y^i x^{-j}) \cdots (y^i x^{-j})}^{p-1} \\ =& x^{-(1+p)j} (y^{2i} x^{-j}) \overbrace{(y^i x^{-j}) \cdots (y^i x^{-j})}^{p-2} \\ =& x^{-\left((1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^p\right)j} y^{pi}. \end{aligned}$$

Comme

$$(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^p \equiv (1+p)+(1+2p)+\cdots+(1+p^2) \equiv p+p\cdot\frac{1}{2}p(p+1) \equiv p \mod p^2,$$

on en déduit que $z^p = x^{-jp}y^{ip} = e$, d'où la conséquence.

9. Comme la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/H$ admet une section ($\bar{1} \mapsto z$) par 8., on en déduit que $G$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un $\psi$. Comme $zxz^{-1} = x^{p+1}$, on en conclut que $\psi = \phi$.

**Partie C.**

1. Par définition, $G = \amalg_{0 \leq i,j < p} a^i b^j Z(G)$. Si $a$ et $b$ commutent, $G$ est forcément abélien.

2. Par 1., $c \neq e$, et par A.3., $\pi(c) = e$, d'où le résultat.

3. Claire par 1. et 2..

4. $\varphi(a^i b^j c^k) = \mathbf{1}_3 + iE_{1,2} + jE_{2,3} + (ij+k)E_{1,3}$ est un morphisme.

5. Claire par la formule ci-dessus.

6. Comme $|G| = |U|$, 5. implique que $\varphi$ est bijectif, d'où le résultat.

**Partie D.**

1. $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (de B.9.) et $U$ (de C.4.).