Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre
Automne 2010

Contrôle Partiel

Exercice 1. Soit G un groupe d'ordre 21.

1. Donner tous les groupes abéliens d'ordre 21 à isomorphisme près.
   Désormais, on suppose que G est non-abélien.
2. Montrer qu'il existe un et un seul 7-Sylow S de G.
3. Soit T un 3-Sylow de G. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct de S par T.
4. Trouver tous les produits semi-directs de S par T.
5. Décrire tous les groupes non-abéliens d'ordre 21 à isomorphisme près.

Problème 2. Soit p un nombre premier impair. Dans ce problème, on veut classifier les groupes d'ordre p^3 à isomorphisme près.

Partie A.

1. Donner tous les groupes abéliens d'ordre p^3 à isomorphisme près.

Désormais, on désigne par G un groupe non-abélien d'ordre p^3.

2. Montrer que l'ordre d'un élément non trivial de G est p ou p^2 et que le centre $Z(G)$ de G est d'ordre p.
3. Montrer que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Notons la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/Z(G)$ par π.

Partie B. Supposons qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre p^2. Notons H le sous-groupe engendré par x.

1. En considérant l'image de H par π, montrer que $Z(G) \subset H$ et que H est distingué.
2. Soit $y \in G \setminus H$. Montrer que $y^i \notin H$ pour tout $0 < i < p$ et que $y^p \in Z(G)$. Ensuite, montrer que x et y ne commutent pas.

On étudie maintenant le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

3. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ contient un et un seul sous-groupe K d'ordre p.
4. Montrer que K est engendré par un automorphisme f défini par $f(\bar{i}) = \overline{(p+1)i}$.

Notons M le sous-groupe de G engendré par y.

5. Montrer que l'image du morphisme $\Phi : M \to \mathrm{Aut}(H)$ défini par $\Phi(y)(x^i) := yx^iy^{-1}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
6. En déduire que $\mathrm{Im}\Phi$ est engendré par $\varphi \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\varphi(x) = x^{1+p}$.
7. En déduire qu'il existe un entier $0 < i < p$ tel que $y^ixy^{-i} = x^{1+p}$.
8. Comme $y^p \in Z(G)$, on en déduit qu'il existe un entier $0 < j < p$ tel que $(y^i)^p = (x^p)^j$. Montrons que $z := y^ix^{-j}$ est un élément de $G \setminus H$ d'ordre p.
9. En déduire que G est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est défini par $\phi(\bar{1})(x) = (p+1)x$.

Partie C. Supposons qu'il n'existe pas d'élément d'ordre p^2.

1. Soient $a, b \in G$ tels que $\pi(a)$ et $\pi(b)$ engendrent $G/Z(G)$.
   Montrer que a et b ne commutent pas.
2. En déduire que $c := [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ est un élément de $Z(G) \setminus \{e\}$.
3. Montrer que tout élément de G peut s'écrire sous la forme $a^ib^jc^k$ avec $i, j, k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Soit U le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ défini par $\{g = (g_{i,j}) | g_{i,i} = 1,\ g_{i,j} = 0\ (i > j)\}$. Montrer que le morphisme $\varphi : G \longrightarrow U$ associant a, b et c à $\mathbf{1}_3 + E_{1,2}$, $\mathbf{1}_3 + E_{2,3}$ et $\mathbf{1}_3 + E_{1,3}$, respectivement, exsite.
5. Montrons que φ est surjective.
6. En déduire que φ est un isomorphisme.

Partie D. Finalement, il ne nous reste qu'à conclure.

1. Donner une liste des groupes d'ordre p^3 à isomorphisme près.