ALGÈBRES DE LIE ET REPRESENTATIONS

Connaissances conseillées.

- Groupes finis et représentations, v. Livre de Serre ou Malliavin
- Modules. Produit tensoriel. Extensions de scalaires. v. Attiyah-MacDonald
- « Algèbre enveloppante » Dixmier. Chap. 1.
- Nullstellensatz de Hilbert.

§1. ALGEBRES DE LIE ET ALGÈBRES ENVELOPPANTES

1.1 Définition. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps k, ou simplement une k-algèbre de Lie, est un k-espace vectoriel muni d'un crochet de Lie, c'est à dire d'une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ $(X, Y) \longmapsto [X, Y]$ tq.

(i) $[X, X] = 0$ pour tout X

(ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \forall X, Y, Z.$

Remarques et Exemples.

1) Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie il résulte de (i) que $[X, Y] = -[Y, X]$. L'identité (ii) est appelée identité de Jacobi. On note $\operatorname{ad} X$ l'élément de $\operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ défini par $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$

2) Toute k-algèbre associative A est une k-algèbre de Lie pour le crochet $[a, b] = ab - ba$, $\forall a, b \in A$. En particulier, si E est un k-espace vectoriel, l'algèbre de Lie $\operatorname{End}_k(E)$ sera notée $\mathfrak{gl}(E)$. Si $E = k^n$ et $\operatorname{End}_k(E) = M_n(k)$, on pose $\mathfrak{gl}(n, k) = \mathfrak{gl}(E)$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $D \in \operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$, on dit que D dérivation de $\mathfrak{g}$ si

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \quad X, Y \in$$

L'espace vectoriel des dérivations de $\mathfrak{g}$ est noté $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, c'est une algèbre de Lie pour le crochet $[D, D'] = DD' - D'D$ induit par celui de $\mathrm{End}_k\,\mathfrak{g}$. Par exemple, si $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\,X \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. On dit que $\mathrm{ad}\,X$ est la dérivation intérieure, ou l'application adjointe, définie par X. On a $\mathrm{ad}[X, Y] = [\mathrm{ad}\,X, \mathrm{ad}\,Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

1.2. On peut définir les notions de sous-algèbres de Lie, morphisme, idéal, etc. Faisons le brièvement.

1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une sous-algèbre de Lie $\underline{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel stable par $[\,,\,]$. Par exemple, $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Un idéal $\underline{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $\forall_{\underline{h}} X$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \underline{h}$. On écrit quelquefois $\underline{h} \triangleleft \mathfrak{g}$. Dans ce cas, le quotient $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\underline{h}$ est une algèbre de Lie pour $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ avec des notations évidentes.

2) Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie. Un homomorphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ est une application k-linéaire telle que $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$. On dit que c'est un isomorphisme si ρ est bijective. Il est évident que $\mathrm{Ker}\,\rho \triangleleft \mathfrak{g}$ et $\mathrm{Im}\,\rho$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$ isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\rho$. Par exemple, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ est un homomorphisme de noyau égal au centre de $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$.

Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un k-espace vectoriel E est un homomorphisme $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(E)$. On dit aussi que E est un $\mathfrak{g}$-module. Si $\mathrm{Ker}\,\rho = (0)$, on dit que ρ est fidèle. Si $\dim E < \infty$, on dit que ρ est de dimension finie (égale à $\dim E$). La représentation $\begin{cases} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X \longmapsto \mathrm{ad}\,X \end{cases}$ est appelée représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

Remarque. Le théorème d'Ado (que nous n'utiliserons pas) affirme

Théorème d'Ado (v. Dixmier, 2.5.5) : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, alors il existe une représentation fidèle de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n, k)$ pour un $n \in \mathbb{N}$

1.3.

Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante $U = U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre associative telle qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U$ possédant la propriété universelle suivante :

Si A est une k-algèbre associative et $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbre associatives $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tel que $\tilde{\varphi}\sigma = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\exists!\, \tilde{\varphi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Il faut démontrer l'existence de $U(\mathfrak{g})$. Nous renvoyons à Dixmier ou Bourbaki pour sa construction. Donnons en une description. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$, $\leq$ un ordre total sur I, a_{ijk} des scalaires tels que $[e_i, e_j] = \sum_k a_{ijk} e_k$. Alors $U(\mathfrak{g})$ est la k-algèbre associative engendrée sur k par les symboles X_i, $i \in I$, soumis aux relations :

$X_i X_j - X_j X_i = [X_i, X_j] \underset{\text{def}}{=} \sum a_{ijk} X_k$. L'application $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, dite canonique, envoie alors e_i sur X_i. Si $i > j$, on peut écrire $X_i X_j = X_j X_i + [X_i, X_j]$. Par récurrence, on voit alors que $U(\mathfrak{g})$ est engendrée comme k-espace vectoriel par les monômes :

$$X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}, \quad i_j \in I, \quad i_1 \leq i_2 \cdots \leq i_p$$

1.4. Définition. Soit A une k-algèbre. Une graduation $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de A est une suite de sous-k-espaces vectoriels de A telle que :

- $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$
- $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ pour tous i, j
- $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall i < n_0$, $A_i = (0)$.

On dit que A est une algèbre graduée. Les éléments de A_n sont dit homogènes de degré n. Si de plus $\dim(A_i) < \infty$ pour tout i, on dit que la graduation $\mathcal{A}$ est de dimension finie.

Remarque A_0 est une sous-algèbre de A et on a $k \subseteq A_0$.

Définition. Soit A une k-algèbre. Une filtration sur A est la donnée d'une suite $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous-k-algèbres vectoriels de A tels que

- $A_i \subseteq A_{i+1}$ pour tout i
- $1 \in A_0$ et $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$
- $A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i$
- $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, $A_i = (0)$ si $i < n_0$.

Le gradué associé à $\mathcal{F}$ se note $gr(A)$, c'est le k-espace vectoriel gradué

$$gr(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{A_i}{A_{i-1}}$$

On dit que la filtration est de dimension finie si $\dim A_i < \infty$ pour tout i.

Remarques et notations.

1) On pose $gr_i(A) = \frac{A_i}{A_{i-1}}$ et $gr_i : A_i \longrightarrow gr_i(A)$ l'application canonique.

2) $gr(A)$ est une k-algèbre graduée par $(gr_i(A))_{i \in \mathbb{Z}} = \mathcal{A}$, la multiplication étant donnée sur les éléments homogènes par $gr_i(x) \cdot gr_j(y) = gr_{i+j}(xy)$ $x \in A_i$, $y \in A_j$. Si $\mathcal{F}$ est de dimension finie, $\mathcal{A}$ l'est aussi.

1.5.

Proposition. On garde les notations de 1.3.

a) La filtration canonique de $U(\mathfrak{g})$ est la filtration $\{U_n(\mathfrak{g})\}_{n\geq 0}$ où $U_n(\mathfrak{g})$ est le sous-espace engendré par les produits de p éléments de $\sigma(\mathfrak{g})$ pour $p \leq n$. C'est aussi le sous-espace engendré par les monômes $X_{i_1} \dots X_{i_p}$ avec $p \leq n$. On a $U_0(\mathfrak{g}) = k$.

b) L'algèbre graduée associée, $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$, est une k-algèbre commutative engendrée par les $\mathrm{gr}_1(X_i) = \overline{X}_i$.

c) Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, la filtration est de dimension finie.

Preuve : a) On laisse au lecteur le soin de s'assurer que $\{U_n(\mathfrak{g})\}_n$ est bien une filtration et que les deux descriptions sont égals

b) Par définition $\overline{X}_i \overline{X}_j - \overline{X}_j \overline{X}_i = \mathrm{gr}_2([X_i, X_j]) = 0$ car $[X_i, X_j] \in U_1(\mathfrak{g})$. Il est facile de voir que $\{\overline{X}_i\}_{i \in I}$ engendre $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$

c) Evident. □

Remarque : Par b), il existe un morphisme d'algèbres : $\omega : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ qui envoie e_i sur $\omega(e_i) = \overline{X}_i$. Rappelons que $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ et que c'est un anneau de polynômes en les e_i. De plus ω est surjectif.

Signalons les propriétés suivantes, dont on trouvera la preuve dans Dixmier et Bourbaki.

1) Si $\varphi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors il existe un homomorphisme d'algèbres $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{\tilde\varphi} & U(\mathfrak{g}) \\ \uparrow \sigma' & & \uparrow \sigma \\ \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

En particulier, si $i : \underset{\sim}{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre, l'algèbre $\tilde{i}(U(\underset{\sim}{h}))$ est engendrée par 1 et $\sigma(\underset{\sim}{h})$ dans $U(\mathfrak{g})$.

(si $(X_1, \dots, X_p)$ base de $\underset{\sim}{h}$ avec $(X_1, \dots, X_n)$ base de $\mathfrak{g}$. $U(h)$ est engendré par $X_1^{\nu_1} \cdots X_p^{\nu_p}$)

2) Si $\underset{\sim}{h} \triangleleft \mathfrak{g}$, on a $\sigma(\underset{\sim}{h})\, U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})\, \sigma(\underset{\sim}{h})$. C'est donc un idéal bilatère. Si $p : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\underset{\sim}{h}$ est la projection canonique, alors $\tilde{p} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}/\underset{\sim}{h})$ est surjectif de noyau $\operatorname{Ker} \tilde{p} = \sigma(h)\, U(\mathfrak{g})$.

3) Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(E)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{gl}(E) = \operatorname{End}_k(E)$ est une algèbre associative, il existe un unique homomorphisme d'algèbre : $\tilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \operatorname{End}_k(E)$. On peut faire de E un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche par : $u \cdot e = \tilde{\rho}(u)(e)$, $u \in U(\mathfrak{g})$, $e \in E$.
Inversement si E est un $U(\mathfrak{g})$-module on lui associe une représentation de $\mathfrak{g}$, $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(E)$ en posant $\rho(X)(e) = \sigma(X)\, e$ où $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ est l'application canonique. Il est clair que ces constructions établissent une correspondance biunivoque entre représentations de $\mathfrak{g}$ et $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche.

1.6. On a dit que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de base $(e_i)_{i \in I}$, alors $U(\mathfrak{g})$ est engendrée, comme espace vectoriel, par les monômes $\pi\, \sigma(e_i)^{\nu_i}$. Il n'est pas évident que ceux-ci forment une base, i.e un système libre. C'est le célèbre théorème de Poincaré-Birkhoff. Witt, (PBW pour abréger). Nous ne le démontrons pas, sa preuve (assez technique) peut être lue dans Dixmier, ou Bourbaki. Enonçons :

Théorème (PBW). L'homomorphisme d'algèbre $S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\omega} gr\, U(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme. De manière équivalente : les monômes $\prod \sigma(e_i)^{\nu_i}$ forment une base de $U(\mathfrak{g})$.

Conséquences : v. Dixmier pour les détails.

1) L'application $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ est injective.

Désormais, on identifie $\mathfrak{g}$ et $\sigma(\mathfrak{g})$, e_i et $\sigma(e_i) = X_i$.

2) L'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est intègre (car $gr\, U(\mathfrak{g})$ l'est).

3) Si $\dim \mathfrak{g} = n$, alors $S(\mathfrak{g}) \simeq gr\,(U(\mathfrak{g}))$ est un anneau de polynômes en n variables

4) Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie. La partie généralisée de la dans 1.5 1) est une base.

5) Si $D \in \operatorname{Der} \mathfrak{g}$, il existe une unique dérivation de $U(\mathfrak{g})$, $\tilde{D}$, telle que $\tilde{D}$ prolonge D. Alors $\tilde{D}$ laisse stable chaque $U_m(\mathfrak{g})$. et si $X \in \mathfrak{g}$, $D = \operatorname{ad} X$, $\tilde{D}$ est la dérivation donnée par $\tilde{D}(u) = Xu - uX$, $u \in U($ que l'on note encore $\operatorname{ad} X$.

6) Soit I un idéal de $U(\mathfrak{g})$. On peut filtrer I et $A = U(\mathfrak{g})/I$ par $I_n = I \cap U_n(\mathfrak{g})$, $A_n := \dfrac{U_n(\mathfrak{g}) + I}{I}$. On vérifie que $gr\left(\dfrac{U}{I}\right) = \dfrac{gr\, U}{gr\, I} = \dfrac{S(\mathfrak{g})}{gr\, I}$. On peut définir, comme $S(\mathfrak{g})$ est un anneau de polynome la variété : $V(I) := V(\sqrt{gr\, I}) = \{x \in k^N,\ f(x) = 0 \ \forall f \in gr(I)\}$ (si k est algébriquement clos) cf Nullstellensatz.

7) Soit $\mathfrak{g}$ la k-algèbre de Lie ayant pour base $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z\}$, où les crochets sont : $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [z, x_i] = [z, y_j] = 0$. Notez que z est dans le centre. Alors l'algèbre $\mathfrak{g}$ est appelée algèbre d'Heisenberg d'indice n, le quotient $U(\mathfrak{g})/(z-1)$ est l'algèbre de Weyl $A_n(k)$.

§2 ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES ET RESOLUBLES

On fixe un corps k de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie considérées ici seront de dimension finie sur k. Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie et K une extension de k, on note $\mathfrak{g}_K$ la K-algèbre de Lie où le crochet est donné par

$$[\alpha\otimes X, \beta\otimes Y] = \alpha\beta\otimes[X,Y], \qquad \alpha,\beta\in K;\ X,Y\in\mathfrak{g}.$$

2.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On pose $\mathcal{C}^1\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, $\mathcal{C}^2\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ .. $\mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathcal{C}^i\mathfrak{g}]$. On définit par récurrence une suite décroissante d'idéaux caractéristiques (stables par toute dérivation de $\mathfrak{g}$). La suite $\{\mathcal{C}^i\mathfrak{g}\}_i$ est appelée suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$. On vérifie aisément que si $\underline{h}$ est une autre algèbre de Lie, $f:\mathfrak{g}\to\underline{h}$ un homomorphisme et $K\supseteq k$ une extension, alors :

- $f(\mathcal{C}^i\mathfrak{g})\subseteq\mathcal{C}^i\underline{h}$, avec égalité si f surjectif
- $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}_K)=(\mathcal{C}^i\mathfrak{g})_K=K\otimes_k\mathcal{C}^i\mathfrak{g}$.

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie, il y a équivalence entre :

(i) $\mathcal{C}^i\mathfrak{g}=0$ pour i assez grand

(ii) $\exists p\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{ad}\,x_1\circ\mathrm{ad}\,x_2\ldots\circ\mathrm{ad}\,x_p=0$ pour tous $x_1,\ldots,x_p\in\mathfrak{g}$

(iii) Il existe une suite décroissante $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{g}_2\ldots\supset\mathfrak{g}_n=0$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$ pour $1\leq i\leq n-1$

Preuve : On a clairement (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Si (iii) est vraie, on montre par récurrence sur i que $\mathcal{C}^i\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}_i$.

Définition. Une algèbre de Lie vérifiant les conditions de la proposition précédente est dite nilpotente.

(*) Donner l'exemple de $\underline{n}(n,k)$ et montrer les $\mathcal{C}^i(\underline{n}(n,k))$.

2.2 On vérifie facilement les propriétés qui suivent où $K\supseteq k$ est une extension et $\mathfrak{g}$, $\underline{h}$ des algèbres de Lie

1) Si $\mathfrak{g} \neq (0)$ est nilpotente alors $z(\mathfrak{g})$ son centre est $\neq (0)$.

2) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, toute sous-algèbre et toute image homomorphe de $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

3) Si $\underline{a} \subset z(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}/\underline{a}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ l'est aussi.

4) Si $\mathfrak{g}$ et $\underline{h}$ sont nilpotentes alors $\mathfrak{g} \times \underline{h}$ l'est (avec le crochet évident).

5) $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\mathfrak{g}_K$ l'est.

2.3 Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Un drapeau de V est une suite $(0) = V_0 \subset V_1 \dots \subset V_n = V$ de sous-espaces telle que $\dim V_i = i$, $0 \leq i \leq n$. Si $x \in \operatorname{End} V$, on dit que x stabilise ce drapeau si $x(V_i) \subset V_i$ pour tout i.

Théorème. (ENGEL). Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\rho(X)$ est nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Alors, il existe un drapeau $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ tel que $\rho(\mathfrak{g})(V_i) \subseteq V_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve : Quitte à quotienter par $\operatorname{Ker} \rho$, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie (nilpotente) de $\mathfrak{gl}(V)$. On écrira donc $X(v)$ à la place de $\rho(X)(v)$. Commençons par montrer :

(*) $\exists v \in V \setminus \{0\}$, $X(v) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

C'est évident pour $\mathfrak{g} = (0)$; on fait une récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Soit $\underline{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ une sous-algèbre, comme $X \in \operatorname{End} V$ est nilpotent, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ l'est dans $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, comme on pourra aisément le vérifier. Appliquons la récurrence à $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} : \underline{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\underline{h})$, on trouve $y \in \mathfrak{g} \setminus \underline{h}$ tel que $[\underline{h}, y] \subset \underline{h}$. Posons $\underline{a} = \underline{h} + ky$; alors $\underline{a}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ de dimension $1 + \dim \underline{h}$ et $\underline{h}$ est un idéal de $\underline{a}$. Itérant cette construction à partir de $\underline{h} = (0)$, on trouve un idéal $\underline{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\dim \mathfrak{g}/\underline{h} = 1$. Soit $W = \{v \in V \mid \underline{h}(v) = 0\}$; par récurrence,

$W \neq (0)$. Si $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}$, $b \in \mathfrak{b}$ et $w \in W$, il vient
$bX(w) = Xb(w) - [X,b](w) = 0$ puisque $[X,b] \in \mathfrak{b}$. Donc
$X(W) \subset W$. Comme X est nilpotent, il existe $w \in W$ tel que $w \neq 0$ et
$X(w) = 0$, d'où $\mathfrak{g}(w) = 0$. Ceci démontre $(*)$.

Terminons la preuve du théorème d'Engel. Par $(*)$ le résultat est clair pour $\dim V = 1$; on fait une recurrence sur $\dim V = n$. D'après $(*)$ il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{g}(v) = 0$, considerons $\bar{V} = \frac{V}{kv}$ et $\pi : V \to \bar{V}$ la surjection canonique. Appliquons la récurrence à la représentation quotient $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\bar{V})$: il existe un drapeau $\bar{V}_0 = (0) \subset \bar{V}_1 \subset \dots \subset \bar{V}_{n-1} = \bar{V}$ ayant la propriété voulue alors le drapeau $V_0 = (0) \subset V_1 = \pi^{-1}(\bar{V}_0) \dots \subset V_n = \pi^{-1}(\bar{V}) = V$ convient.

2.4. Corollaire 1. Avec les hypothèses précédentes.

(i) Il existe une base de V dans laquelle la matrice de $\rho(X)$ est triangulaire supérieure stricte pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

(ii) $\rho(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$.

Preuve : (i) est évident. (ii) résulte de (i) et du fait que $\mathfrak{n}(n,k) = \{A = (a_{ij}), a_{ij} = 0 \text{ tout } i \geq j\}$ est une algèbre de Lie nilpotente.

Corollaire 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

(ii) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} X$ est nilpotente.

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente par Proposition 2.1. Supposons (ii) et appliquons le théorème d'Engel à $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\operatorname{ad} X_1 \circ \dots \circ \operatorname{ad} X_n = 0$ pour tous $X_1, \dots X_n$. Donc par Prop 2.1, $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

2.5 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On appelle forme bilinéaire (symétrique) <u>associée</u> à ρ la forme définie sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par : $b(X,Y) = \operatorname{tr}(\rho(X)\rho(Y))$. Les propriétés de la trace fournissent facilement l'identité $b([X,Y],Z) = b(X,[Y,Z])$.

On dit que b est $\mathfrak{g}$-invariante.

Si $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}$ est un idéal et $\mathfrak{a}^\circ = \{ Y \in \mathfrak{g} \,/\, b(\mathfrak{a}, Y) = 0 \}$ son orthogonal pour b, il vient. $b([\mathfrak{a}^\circ, \mathfrak{g}], \mathfrak{a}) = b(\mathfrak{a}^\circ, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) \subseteq b(\mathfrak{a}^\circ, \mathfrak{a}) = 0$ Donc $[\mathfrak{a}^\circ, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}^\circ$ et $\mathfrak{a}^\circ$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Le cas où $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe est d'un intérêt particulier. Dans ce cas la forme linéaire associée est appelée forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On la note :

$$K(X, Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

On vérifiera aisément que si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors $K|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{h}$.

2.6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On pose

$$\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \ \mathcal{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \dots, \ \mathcal{D}^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^i\mathfrak{g}, \mathcal{D}^i\mathfrak{g}], \dots$$

On définit alors une suite d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$, appelée suite dérivée de $\mathfrak{g}$. On a $\mathcal{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{g}$ pour tout i. L'idéal $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$, il possède la propriété que si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a}$ est un idéal et $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est commutative.

Les propriétés suivantes sont élémentaires :

- Si $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. On a $f(\mathcal{D}^i\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{D}^i\mathfrak{h}$ avec égalité si f est surjectif.
- On a $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}_K) = \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})_K = K \otimes \mathcal{D}^i\mathfrak{g}$ pour toute extension $K \supseteq k$.

Proposition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathcal{D}^i\mathfrak{g} = (0)$ pour i assez grand

(ii) Il existe une suite décroissante $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \triangleright \mathfrak{g}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathfrak{g}_n = (0)$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii), on prend $\mathfrak{g}_i = \mathcal{D}^i\mathfrak{g}$. (ii) $\Rightarrow$ (i), on a $\mathcal{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$ par récurrence sur i.

Définition. Une algèbre de Lie vérifiant les conditions de la proposition précédente est dite résoluble.

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément.

(i) Si $\underset{\sim}{g}$ est résoluble, toute sous-algèbre, toute image homomorphe l'est aussi.

(ii) Si $\underset{\sim}{a} \lhd \underset{\sim}{g}$ alors $\underset{\sim}{g}$ est résoluble si et seulement si $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{g}/\underset{\sim}{a}$ le sont.

(la réciproque est fausse pour nilpotent)

(iii) Si $\underset{\sim}{g}$ et $\underset{\sim}{h}$ sont résolubles, $\underset{\sim}{g} \times \underset{\sim}{h}$ l'est aussi.

(iv) $\underset{\sim}{g}$ est résoluble si et seulement si $\underset{\sim}{g}_k$ l'est.

(v) On a les implications $\underset{\sim}{g}$ commutative $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{g}$ nilpotente $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{g}$ résoluble.

(vi) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\underset{\sim}{n}(n,k) = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(k) \,/\, a_{ij} = 0 \text{ pour } i \geq j \}$$
$$\underset{\sim}{t}(n,k) = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(k) \,/\, a_{ij} = 0 \text{ pour } i > j \}$$
$$\underset{\sim}{b}(n,k) = \{ A \in \underset{\sim}{t}(n,k) \,/\, \operatorname{trace} A = 0 \}$$

Alors $\underset{\sim}{n}(n,k)$ est nilpotente, $\underset{\sim}{t}(n,k)$ est résoluble non nilpotente, de même pour $\underset{\sim}{b}(n,k)$, $n \geq 2$.

2.8. Lemme de Lie. Soient $\rho : \underset{\sim}{g} \longrightarrow \underset{\sim}{gl}(V)$ une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie $\underset{\sim}{g}$, $\underset{\sim}{a}$ un idéal de $\underset{\sim}{g}$ et $\lambda \in \underset{\sim}{a}^*$. On définit $W_{\lambda,\underset{\sim}{a}} = \{ v \in V / \rho(X)(v) = \lambda(X)\cdot v, \ \forall X \in \underset{\sim}{a} \}$. Alors $W_{\lambda,\underset{\sim}{a}}$ est un sous espace vectoriel de V stable par ρ.

Preuve. On peut évidemment supposer que $W \neq (0)$ et $\underset{\sim}{g} \subset \underset{\sim}{gl}(V)$. Soient $v_0 \in W \setminus \{0\}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := x^n(v_0)$, $x \in \underset{\sim}{g}$ fixé. Notons p le plus grand entier tel que la suite $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ soit libre et $U = \sum_{i=0}^{p} k\, v_i$. Par définition $x(U) \subseteq U$. Soit $a \in \underset{\sim}{a}$, on a facilement par récurrence :

$$a(v_i) \in \lambda(a) v_i + \sum_{j=0}^{i-1} k\, v_j .$$

On en tire $a(U) \subseteq U$ et $\operatorname{trace}(a|_U) = (p+1)\lambda(a)$. Puisque $[x,a] \in \underset{\sim}{a}$ et $\operatorname{trace}(xa - ax)|_U = 0$, il vient $(p+1)\lambda([a,x]) = 0$, et donc $\lambda([a,x]) = 0$, k étant de caractéristique nulle. Par conséquent, $a x(v_0) = x a(v_0) + [a,x](v_0) = \lambda(a)\, x(v_0)$ et $x(v_0) \in W$.

2.9. Théorème de Lie. Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathfrak{g} \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$. Alors, il existe un drapeau de V stable pour ρ, i.e. stable par $\rho(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Preuve: On peut supposer $V \neq (0)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Commençons par démontrer l'existence d'un vecteur propre non nul pour $\mathfrak{g}$, i.e. d'un $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $X(v) = \lambda(X)v$ pour un $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. C'est évident si $\mathfrak{g} = 0$; faisons une récurrence sur $n = \dim \mathfrak{g}$. Pour $n > 0$ on a $\mathfrak{g} \neq \mathcal{D}\mathfrak{g}$ (car $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$, $k \gg 0$). Soit donc $\underset{\sim}{a}$ un hyperplan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, c'est un idéal de $\mathfrak{g}$, c.f. 2.5. Par récurrence, il existe $v \in V \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \underset{\sim}{a}^*$ tels que $x(v) = \lambda(x)v$, $\forall x \in \underset{\sim}{a}$. Soit W comme dans 2.8, si $y \in \mathfrak{g} \setminus \underset{\sim}{a}$, alors $y(W) \subset W$ et puisque k est algébriquement clos, il existe $w \in W \setminus \{0\}$ vecteur propre pour y. Par conséquent, w est vecteur propre pour $\mathfrak{g} = ky + \underset{\sim}{a}$. La fin de la preuve est analogue à celle du théorème d'Engel, (i.e. par récurrence sur $\dim V$).

2.10 Corollaire 1. Avec les notations du théorème précédent. Soit $m = \dim V$. Il existe une base de V telle que la matrice de $\rho(X)$ est dans $\underset{\sim}{t}(m, k)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Preuve. Evident par 2.9.

Corollaire 2. On suppose k algébriquement clos. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, alors :

(i) Toute représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1.

(ii) Il existe une suite $(0) = \mathfrak{g}_0 \lhd \mathfrak{g}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que $\dim \mathfrak{g}_i = i$, $0 \leq i \leq n$.

Preuve. (i) Rappelons que $\mathfrak{g} \overset{\rho}{\longrightarrow} \mathfrak{gl}(V)$ est irréductible s'il n'existe pas de sous-espaces W de V stables par $\rho(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ autres que $W = (0)$ et $W = V$. Donc l'assertion est claire par 2.8.

(ii) On prend $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ dans 2.8.

Corollaire 3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, tout élément de $\operatorname{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent et l'algèbre $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est nilpotente. Inversement, si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotente alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Preuve: Par les propriétés générales, on peut supposer k algébriquement clos. On applique le corollaire 1 à $V=\mathfrak{g}$ et $\rho=\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$: la matrice de $\operatorname{ad} X$ appartient à $\underline{t}(n,k)$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$. Donc $\operatorname{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\operatorname{ad}[\underline{t}(n,k),\underline{t}(n,k)]$ et $[\underline{t}(n,k),t(n,k)]\subset\underline{n}(n,k)$ donne la première assertion.
La deuxième assertion résulte de (2.4 corollaire 2). Pour la réciproque, il suffit d'utiliser 2.6 (ii).

2.11 Montrons le résultat préparatoire

LEMME. Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. On suppose que $\operatorname{Trace}(XY)=0$, $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$. Alors tout élément de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est nilpotent.

Preuve. En replaçant V par V_K, $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}_K$, où K est une extension algébriquement close de k,
Il nous suffit de prouver que $\mathfrak{g}$ est résoluble (2.9 Corollaire 3). On raisonne par récurrence sur $\dim\mathfrak{g}=r$, le cas $r=0$ étant évident. Supposons $r>0$. Si $\mathcal{D}\mathfrak{g}\subsetneq\mathfrak{g}$ la récurrence et 2.6 donnent $\mathfrak{g}$ résoluble. On suppose donc $\mathfrak{g}=\mathcal{D}\mathfrak{g}\neq 0$. Soit $\underline{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, distincte de $\mathfrak{g}$ et maximale pour cette propriété. Par récurrence et par le théorème de Lie appliqué à $\underline{h}\xrightarrow{\operatorname{ad}}\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\underline{h})$, il existe $x\in\mathfrak{g}\setminus\underline{h}$ et $\lambda\in\underline{h}^*$ tels que $kx\oplus\underline{h}$ soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $[y,x]\in\lambda(y)x+\underline{h}$ pour tout $y\in\underline{h}$. Par maximalité de $\underline{h}$ on a $\mathfrak{g}=kx\oplus\underline{h}$.

1) Soit W un $\mathfrak{g}$-module simple, $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(W)$ la représentation correspondante. Par restriction à $\underline{h}$, W est un $\underline{h}$-module; soit W_0 un sous-$\underline{h}$-module simple de W, par le corollaire 2 de 2.10:

$\exists w_0\in W_0$, $\exists \nu\in\underline{h}^*$, $\rho(y)(w_0)=\nu(y)w_0$ pour tout $y\in\underline{h}$

Par simplicité, $W_0 = k w_0$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $w_i = \rho(x)^i w_0$,
$W_i = \sum_{j \geq 0}^{i} k w_j$, $W_{-1} = 0$. Si $y \in \mathfrak{h}$ on a : $\rho(y) w_{i+1} = \rho(y)\rho(x) w_i$

$$= \rho(\overbrace{[y,x] - \mu(y)x}^{\in \mathfrak{h}}) w_i + \rho(x)\rho(y) w_i + \mu(y)\rho(x) w_i$$

On en tire $\rho(\mathfrak{h})(W_{(i)}) \subset W_{(i)}$ par récurrence sur i.

Démontrons l'assertion :

$$\forall y \in \mathfrak{h},\ \forall i \in \mathbb{N},\ \rho(y) w_i - (\mu(y) + i\lambda(y)) w_i \in W_{i-1}$$

C'est clair pour $i = 0$ et si c'est vrai pour i on remarque que :

$$\rho(y) w_{i+1} - (\mu(y) + (i+1)\lambda(y)) w_{i+1} = \rho([y,x] - \lambda(y)x)\, w_i +$$

$\rho(x)[\rho(y) - \mu(y) - i\lambda(y)] w_i$ est dans $\rho(\mathfrak{h}) W_i + \rho(x) W_{i-1} \subset W_i$,
par récurrence et la définition de x.

Soit q le plus grand entier tel que la suite $\{w_0, \dots, w_q\}$ soit libre.
Comme W_q est un sous-module non nul du $\mathfrak{g}$-module simple W, on a $W_q = W$.
Les formules précédentes donnent : trace $\rho(y) = (q+1)\mu(y) + \frac{1}{2} q(q+1)\lambda(y)$, $\forall y \in \mathfrak{h}$.
Mais, de $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$ il résulte trace $\rho(y) = 0$ donc $\mu(y) = -\frac{1}{2}\lambda(y)$.
Ainsi $\rho(y) w_i - (i - \frac{1}{2} q)\lambda(y) w_i \in W_{i-1}$. On en déduit

$$\text{Trace}\, \rho(y)^2 = \sum_{0}^{q} (i - \tfrac{1}{2} q)^2 \lambda(y)^2.$$

2) Soit $(0) \subset V_1 \subset \dots \subset V_p = V$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module V (i.e une suite de sous-$\mathfrak{g}$-modules tels que $\frac{V_i}{V_{i-1}}$ soit un $\mathfrak{g}$-module simple). Pour $0 \leq j \leq p-1$ posons $q_j = \dim \frac{V_{j+1}}{V_j} - 1$. L'hypothèse et ce qui précède (en 1)) impliquent

$$Tr(\rho(y)^2) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{q_j} (i - \tfrac{1}{2} q_j)^2 \lambda(y)^2 \overset{\text{Hypothèse du lemme}}{=} 0$$

(On rappelle : $Tr_V = Tr_{V'} + Tr_{V/V'}$)

Mais puisque $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \neq \mathfrak{h}$, on a $\lambda \neq 0$ et par conséquent $q_j = 0$ pour tout j, i.e. $\dim \frac{V_{j+1}}{V_j} = 1$. On déduit alors de $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$ que
$\mathfrak{g}(V_{j+1}/V_j) = 0$, i.e $\mathfrak{g}(V_{j+1}) \subset V_j$ et finalement tout élément de $\mathfrak{g}$ est nilpotent, donc $\mathfrak{g}$ est nilpotent. Cela implique $\mathfrak{g} \neq \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ contradiction.

2.11 Théorème (Critère de Cartan) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension finie V. Si β est la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ associée à ρ, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\rho(\mathfrak{g})$ est résoluble

(ii) $\beta(\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$.

Preuve: On peut évidemment supposer que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ et que ρ est la représentation canonique. Posons $n = \dim V$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On se ramène facilement à k algébriquement clos. Il existe une base dans laquelle la matrice $M(x)$ de $x \in \mathfrak{g}$ appartient à $\underline{t}(n,k)$.

Donc pour $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a $M([y,z]) \in \underline{n}(n,k)$ et $M(x)M([y,z]) \in \underline{n}(n,k)$.

Par conséquent: $\beta(x, [y,z]) = \mathrm{Trace}(M(x)M([y,z])) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $\beta(\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$ alors $\beta(\mathcal{D}\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$ et du Lemme précédent on déduit $\mathcal{D}^2\mathfrak{g}$ nilpotente. Donc $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ sont résolubles. $\square$

2.12 Corollaire. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et K sa forme de Killing. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathfrak{g}$ est résoluble

(ii) $K(\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$

(iii) $K(\mathcal{D}\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$

Preuve: (i) $\Rightarrow$ (ii) par 2.11, (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\rho = \mathrm{ad} : \mathcal{D}\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{D}\mathfrak{g})$; 2.11 donne $\mathrm{ad}\,\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est résoluble, donc $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ l'est aussi et finalement $\mathfrak{g}$ est résoluble. $\square$

APPENDICE

1. Introduction à la cohomologie des algèbres de Lie.

g désigne une algèbre de Lie, V une ~~espace vectoriel~~ representation de g, $\rho : g \to \mathrm{End}\, V$.

On note $C^q(g,V)$ l'espace des morphismes q-linéaires alternés de $\overbrace{g \times \dots \times g}^{q \text{ fois}}$ dans V, $q > 0$. Soit $C^0(g,V) = V$.

Soit d le morphisme défini par : $d : C^q(g,V) \longrightarrow C^{q+1}(g,V)$

$c \in C^q(g,V)$ $\quad dc(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i)\, c(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1})$

$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{q+1})$, où le signe ^ signifie que la variable est omise.

Exemples : Si $c \in C^0(g,V) = V$ alors $(dc)(X) = \rho(X)c$

Si $c \in C^1(g,V) = \mathrm{Hom}(g,V)$ alors $(dc)(X,Y) = \rho(X)c(Y) - \rho(Y)c(X) - c([X,Y])$

Si $c \in C^2(g,V)$

$$dc(X,Y,Z) = \rho(X)c(Y,Z) - \rho(Y)c(X,Z) + \rho(Z)c(X,Y) - c([X,Y],Z) + c([X,Z],Y) - c([Y,Z],X)$$

On vérifie que d est bien définie et que $dd = 0$. On dit que $(C^*(g,V),d)$ est un complexe. On note $Z^q(g,V) = \mathrm{Ker}\, d \cap C^q(g,V)$, $B^q(g,V) = \mathrm{Im}\, d \cap C^q(g,V)$. Ce sont respectivement les espaces des q cocycles et des q-cobords du complexe. $H^q(g,V) := Z^q(g,V)/B^q(g,V)$ est la cohomologie de l'algèbre de Lie g pour la representation ρ.

Exemple 1 : $H^0(g,V) = Z^0(g,V) = \{c \in V,\ \rho(X)c = 0,\ \forall X \in g\}$

Exemple 2 : On suppose que ρ est la représentation adjointe.

$H^0(g, g_{ad}) = \mathfrak{z}(g)$ $\quad Z^1(g, g_{ad})$ est l'espace des dérivations de g et $B^1(g, g_{ad})$ le sous-espace des dérivations intérieures.

Exemple 3 : $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie ~~...~~ sur un corps k et ρ la représentation triviale sur k. $H^0(\mathfrak{g}, k) = k$. $H^1(\mathfrak{g}, k) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ A2

Rque : $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0 \Leftrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

Ce cadre est particulièrement important. On sait que $\bigoplus_{q\geq 0} C^q(\mathfrak{g}, k)$ est une algèbre graduée. Effectivement, par passage au quotient, on a : $C^q(\mathfrak{g}, k) \simeq (\Lambda^q \mathfrak{g})^* \simeq (\Lambda^q \mathfrak{g}^*)$ et l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{q\geq 0} \Lambda^q \mathfrak{g}$ est clairement graduée.

Ce produit passe à la cohomologie. ~~L'algèbre~~ L'espace $H^*(\mathfrak{g}, k) = \bigoplus_{q\geq 0} H^q(\mathfrak{g}, k)$ peut être muni d'une structure d'algèbre graduée.

2. Une application de la cohomologie des algèbres de Lie

Soient (V, ρ) une représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, U une sous-représentation et W un espace vectoriel supplémentaire de U.

On peut écrire
$$\begin{cases} \rho(X)(u) = \rho_1(X)(u) \\ \rho(X)(w) = g(X)(w) + \rho_2(X)(w) \end{cases} \qquad X \in \mathfrak{g},\ u \in U,\ w \in W$$
où ρ_1, resp ρ_2, ~~sont~~ des représentations de U, resp. W, et où g est un morphisme (d'espace) $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, U)$.

On vérifie aisément la formule suivante :
$$(*) \qquad g([X,Y]) = \rho_1(X)\, g(Y) - \rho_1(Y)\, g(X) + g(X)\rho_2(Y) - g(Y)\rho_2(X)$$

Soit $h \in \mathrm{Hom}(W, U)$ et $W' = (1 + h)W$ où $1 = Id|_W$

On vérifie que W' est un sous espace stable par ρ si et seulement si :
$$(**) \qquad g(X) = \rho_1(X)\, h - h\, \rho_2(X)$$

Ces résultats ont des interprétations cohomologiques :

Considérons la représentation ψ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Hom}(W, U)$ donnée par $\psi(X)(h) = \rho_1(X)\, h - h\, \rho_2(X)$. La condition $(*)$ exprime que $g \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(W, U))$. La condition $(**)$ exprime que $g \in B^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(W, U))$.

PROPOSITION : U possède un supplémentaire comme $\mathfrak{g}$-module ssi
$$H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(W,U)) = 0.$$

Plus généralement $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(W,U))$ mesure le nombre de représentations ρ (ou isomorphisme près) tq $\rho|_U = \rho_1$, et $\rho|_{(V/U)} = \rho_2$.

En particulier, $H^1(\mathfrak{g}, V) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(k, V))$ mesure les extensions de V : $0 \to V \to V' \to k \to 0$. à isomorphismes.

Exercice : Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 1 agissant sur $k_\lambda \simeq k$ par $X \cdot 1 = \lambda$. Calculer $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(k_\lambda, k_\mu))$.

Exercice : Supposons $V = U \oplus W$ comme $\mathfrak{g}$-modules. Montrer que
$C^q(\mathfrak{g}, V) = C^q(\mathfrak{g}, U) \oplus C^q(\mathfrak{g}, W)$
que $d : C^q(\mathfrak{g}, U) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}, U)$
$C^q(\mathfrak{g}, W) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}, U)$, puis $H^i(\mathfrak{g}, V) = H^i(\mathfrak{g}, U) \oplus H^i(\mathfrak{g}, W)$

Exercice: On suppose U un sous module de V, $H^i(\mathfrak{g}, U) = H^i(\mathfrak{g}, V/U) = 0$

Montrer $H^i(\mathfrak{g}, V) = 0$

§3 ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLE.

3.1. Commençons par introduire la notion de radical.

Lemme et Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie ; alors $\mathfrak{g}$ possède un plus grand idéal résoluble. On le note $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ et on dit que c'est le radical de $\mathfrak{g}$.

Preuve. Soit $\underset{\sim}{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale et $\underset{\sim}{b}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Comme $\dfrac{\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}}{\underset{\sim}{b}} \simeq \dfrac{\underset{\sim}{a}}{\underset{\sim}{a}\cap\underset{\sim}{b}}$, il découle de 2.6 que $\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Par suite $\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b} \subset \underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}\subset\underset{\sim}{a}$. $\square$

On laisse en exercice la preuve des propriétés naturelles.

(i) $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ est le plus petit idéal $\underset{\sim}{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}/\underset{\sim}{a})=(0)$

(ii) Si $\mathfrak{g}$ et $\underset{\sim}{h}$ sont deux algèbres de Lie $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}\times\underset{\sim}{h}) = \operatorname{Rad}\mathfrak{g}\times\operatorname{Rad}\underset{\sim}{h}$.

Pour une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ on a donc $\mathfrak{g}=\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$, « à l'opposé », on va trouver des algèbres de Lie semi-simple.

(En exercice :
* $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ est l'orthogonal de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing.
* $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$.
* $a \triangleleft \mathfrak{g}$ $\quad \operatorname{Rad} a = a\cap\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$
* Si K est une extension de k, $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}_K = (\operatorname{Rad}\mathfrak{g})_K$.)

Définition. Soit une algèbre de Lie.

(i) Si $\mathfrak{g}\neq(0)$ et $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}=(0)$, on dit que $\mathfrak{g}$ est semi-simple

(ii) Si $\dim\mathfrak{g}>1$ et $\mathfrak{g}$ n'a pas d'autre idéal que (0) et $\mathfrak{g}$, on dit que $\mathfrak{g}$ est simple.

Remarques (1) La condition dim $\mathfrak{g} > 1$ dans (ii) est faite pour exclure le cas où $\mathfrak{g}$ est abelienne de dimension 1. (18)

(2) Une algebre de Lie simple est semi-simple

(3) Si $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ est semi-simple par la propriété $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}) = (0)$

(4) Si $\mathfrak{g}$ est simple la representation adjointe $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est simple puisque les sous-$\mathfrak{g}$-modules de $\mathfrak{g}$ sont exactement les idéaux de $\mathfrak{g}$.

Donner un exemple avec $\mathfrak{sl}_2$, Parabolique de $\mathfrak{sl}_3$. $\mathfrak{p}$ et calculer $\mathfrak{p}/\mathrm{rad}\,\mathfrak{p}$.

3.2. On va caractériser les algèbres de Lie semi-simple à l'aide de la forme de Killing.

PROPOSITION. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. K sa forme de Killing. Il y a équivalence entre:

(i) $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = 0$ (ii) Tout ideal abélien de $\mathfrak{g}$ est nul ($[\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}] = 0$). (iii) K est non dégénerée

Preuve: (ii) $\Rightarrow$ (i) Le dernier idéal dérivé non nul de l'algèbre résoluble $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ est un idéal abélien (non nul) de $\mathfrak{g}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Soit $\mathfrak{g}^\perp = \{x \in \mathfrak{g},\ K(x, \mathfrak{g}) = 0\}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour K. Comme $K|_{\mathfrak{g}^\perp \times \mathfrak{g}^\perp}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}^\perp$ (voir la remarque dans 2.5), celle-ci est nulle. Donc $\mathfrak{g}^\perp$ est resoluble. D'où $\mathfrak{g}^\perp \subset \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = (0)$ et K est non dégénérée

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\underset{\sim}{a}$ un idéal abélien. Si $x \in \underset{\sim}{a}$ et $y \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y(\mathfrak{g}) \subset \underset{\sim}{a}$ et $(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)^2(\mathfrak{g}) \subseteq [a, a] = (0)$. Donc $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ est nilpotent dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = K(x,y) = 0$ et $\underset{\sim}{a} \subset \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$.

Corollaire. Le centre d'une algèbre de Lie semi-simple est nul. (19)

On a $\mathfrak{g} \simeq \operatorname{ad} \mathfrak{g}$.

Preuve. résulte du fait que $z(\mathfrak{g})$ est un idéal abélien et de l'isomorphisme $\operatorname{ad} : \mathfrak{g}/z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{ad} \mathfrak{g}$.

3.3. On va voir que l'étude des algèbres de Lie semi-simples peut se ramener à celles des algèbres de Lie simples. Si $\underset{\sim}{s}_1, \dots \underset{\sim}{s}_t$ sont des idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on dit que $\mathfrak{g}$ est somme directe des $\underset{\sim}{s}_i$ si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} s_i$ comme espace vectoriel. Puisque $[s_i, s_j] \subset s_i \cap s_j = (0)$, si $i \neq j$, on en déduit que $\mathfrak{g}$ s'obtient à partir de $\underset{\sim}{s}_1, \dots, \underset{\sim}{s}_t$ en faisant le produit direct et en définissant le crochet composante par composante. On écrit $\mathfrak{g} = \underset{\sim}{s}_1 \times \dots \times \underset{\sim}{s}_t$.

Théorème. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Il existe des idéaux $\underset{\sim}{s}_i$, $1 \leq i \leq t$, simples comme algèbres de Lie, tels que $\mathfrak{g} = \underset{\sim}{s}_1 \times \dots \times \underset{\sim}{s}_t$. De plus, tout idéal de $\mathfrak{g}$, simple comme algèbre de Lie est égal à l'un des $\underset{\sim}{s}_j$.

Preuve. Soit $\underset{\sim}{h} \lhd \mathfrak{g}$. Si $\underset{\sim}{h}^\perp$ est l'orthogonal de $\underset{\sim}{h}$ pour K, il résulte de la $\mathfrak{g}$-invariance de K que $\underset{\sim}{h}^\perp$ est aussi un idéal de $\mathfrak{g}$. Le critère de Cartan assure que $\underset{\sim}{h} \cap \underset{\sim}{h}^\perp$ est un idéal résoluble donc nul. Puisque K est non dégénérée, on a $\dim \underset{\sim}{h} + \dim \underset{\sim}{h}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g} = \underset{\sim}{h} \oplus \underset{\sim}{h}^\perp$.

Prouvons le théorème par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal propre non nul, $\mathfrak{g}$ est simple et on a terminé. Sinon soit $\underset{\sim}{h}$ un idéal non nul de dimension minimale parmi les idéaux non nuls.

$\underset{\sim}{h}^\perp \neq 0$ L'observation préliminaire donne $\mathfrak{g} = \underset{\sim}{h} \oplus \underset{\sim}{h}^{\perp *}$. Tout idéal de $\underset{\sim}{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, (de même pour $\underset{\sim}{h}^\perp$); donc $\underset{\sim}{h}$ est simple par minimalité, et $\underset{\sim}{h}^\perp$ semi-simple résulte de 3.2. Par récurrence, $\underset{\sim}{h}^\perp$ est somme directe d'idéaux simples, d'où la décomposition de $\mathfrak{g}$. Il reste à montrer que ces idéaux sont uniques. Soient $\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{s}_1 \times \dots \underset{\sim}{s}_t$ et $\underset{\sim}{h}$ un idéal simple de $\underset{\sim}{g}$. Alors $[\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{g}]$ est un idéal de $\underset{\sim}{h}$, non nul, puisque $Z(\underset{\sim}{g}) = (0)$, ceci force $[\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{g}] = \underset{\sim}{h}$.

D'autre part, $[\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{g}] = \bigoplus_{i=1}^{t} [\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{s}_i]$ qui est une somme d'idéaux, donc $[\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{s}_j] = (0)$ sauf pour un j, par simplicité de $\underset{\sim}{h}$. Soit $[\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{s}_i] = \underset{\sim}{h}$. Alors $\underset{\sim}{h} \subset \underset{\sim}{s}_i$ (car $\underset{\sim}{s}_i$ est un idéal) et $\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{s}_i$ par simplicité de $\underset{\sim}{s}_i$. -

Corollaire 1. Soit $\underset{\sim}{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, alors $\underset{\sim}{g} = [\underset{\sim}{g}, \underset{\sim}{g}]$ et tout idéal ou toute image homomorphe de $\underset{\sim}{g}$ est nulle ou semi-simple. De plus tout idéal non nul est une somme de certains idéaux simples de $\underset{\sim}{g}$.

Preuve : Laissée en exercice.

Corollaire 2. Soit $\underset{\sim}{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\rho : \underset{\sim}{g} \to gl(V)$ un représentation de dimension finie. Alors $\rho(\underset{\sim}{g}) \subset \underset{\sim}{sl}(V) = \{u \in gl(V);\ \mathrm{tr}\, u = 0\}$ et si ρ est fidèle la forme linéaire β associée à ρ est non dégénérée.

Preuve. La première assertion résulte de $\underset{\sim}{g} = [\underset{\sim}{g}, \underset{\sim}{g}]$. Soit $\underset{\sim}{a}$ l'orthogonal de $\underset{\sim}{g}$ pour β ; on a $\beta(\underset{\sim}{a}, D\underset{\sim}{a}) = 0$, donc $\rho(a)$ est résoluble par 2.11. Si ρ est fidèle, $\underset{\sim}{a} = (0)$.

Corollaire 3. Soit $\underset{\sim}{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, alors $\mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g} = \mathrm{Der}\, \underset{\sim}{g}$, i.e. toute dérivation est intérieure.

Preuve. Commençons par remarquer que si $\delta \in \mathrm{Der}\, \underset{\sim}{g}$ et $x \in \underset{\sim}{g}$ alors $[\delta, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(\delta x)$. En particulier $\mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g} \triangleleft \mathrm{Der}\, \underset{\sim}{g}$. Puisque $\underset{\sim}{g} \simeq \mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g}$, la forme de Killing β de $\mathrm{Der}\, \underset{\sim}{g}$ restreinte à $\mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g}$ est donc non dégénérée (puisque celle de $\underset{\sim}{g}$ l'est). Si $\underset{\sim}{b}$ est l'orthogonal de $\mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g}$ pour β, on a donc $\underset{\sim}{b} \cap \mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g} = (0)$ et par suite $[b, \mathrm{ad}\, \underset{\sim}{g}] = 0$

Soit $\delta \in \underset{\sim}{b}$, alors $ad(\delta x) = [\delta, ad\, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, donc $\delta x = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, i.e $\delta = 0$. Ainsi $\underset{\sim}{b} = (0)$ et il découle que β est non dégénérée, puis $\operatorname{Der} \mathfrak{g} = ad\, \mathfrak{g}$. □

3.4 Lemme de Schur. Elément de Casimir.

Rappelons que si $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on dit que ρ est simple (ou irréductible) si tout sous-espace de V stable par $\rho(\mathfrak{g})$ est égal à (0) ou à V. On dira aussi que V est un $\mathfrak{g}$-module simple ou irréductible.

On appelle commutant de ρ la sous-k-algèbre de $\operatorname{End} V$:
$D = \{ U \in \operatorname{End} V / U\rho(x) = \rho(x) U, \forall x \in \mathfrak{g} \}$.

Si l'on considère V comme un $U(\mathfrak{g})$-module la représentation ρ est irréductible si et seulement si V est un $U(\mathfrak{g})$-module simple.

Théorème : Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation linéaire irréductible d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Alors D est un corps. Si de plus V est de dimension finie alors, D est de dimension finie sur k. En particulier, si k est algébriquement clos $D = k$

Preuve : Soit $U \in D$; $\operatorname{Ker} U$ et $\operatorname{Im} U$ sont des sous-$\mathfrak{g}$-modules de V donc si $U \neq 0$: $\operatorname{Ker} U = (0)$ et $\operatorname{Im} U = V$. Ce qui prouve l'inversibilité de $U \neq 0$. On a donc prouvé la première assertion.
Comme $D \subset \operatorname{End} V$, D est de dimension finie sur k. La deuxième en résulte de façon évidente.

Remarque : Le lemme de Quillen [Dixmier, 2.6.4], permet de montrer que D est algébrique sur k lorsque V est de dimension quelconque.

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, on note $\{f_1, \dots, f_n\}$ la base duale pour une forme $\mathfrak{g}$-invariante β ~~Killing~~. $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Pour x dans $\mathfrak{g}$, on a $[x, e_i] = \sum a_{ij} e_j$ et $[x, f_i] = \sum b_{ij} f_j$. Par $\mathfrak{g}$-invariance, il vient :

$$a_{ik} = \beta([x, e_i], f_k) = \beta(e_i, [x, f_k]) = -b_{ki}$$

On appelle élément de Casimir l'élément $c_\beta = \sum_i e_i f_i \in U(\mathfrak{g})$.
A l'aide de l'identité $[x, yz] = [x,y]z + y[x,z]$ et compte tenu de $a_{ik} = -b_{ki}$, on a : $\forall x \in \mathfrak{g}$, $[x, c] = \sum a_{ij} e_j f_i + \sum b_{ij} e_i f_j = 0$.
Donc c commute avec les générateurs de $U(\mathfrak{g})$, c est dans le centre de $U(\mathfrak{g})$.

LEMME : Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation fidèle. Soit $c_\rho = c_\beta|_V$ pour l'action de l'algèbre enveloppante sur V. Alors, c_ρ est dans le commutant de ρ, sa trace est égale à $\dim \mathfrak{g}$. Si de plus k est algébriquement clos et ρ irréductible, $c_\rho = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} Id_V$.

Preuve : La première assertion vient du fait que c est ~~dans~~ central dans $U(\mathfrak{g})$.
$Tr(c_\rho) = Tr \sum_i \rho(e_i)\rho(f_i) = \sum_i Tr\, \rho(e_i)\rho(f_i) = \sum \beta(e_i, f_i) = \dim \mathfrak{g}$.
Si ~~de plus~~ k est algébriquement clos et ρ irréductible, c_ρ est scalaire ~~$= \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} Id_V$~~ par lemme de Schur.

$\square$

3.5. Semi-simplicité des représentations, théorème d'H. Weyl.

Soit $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On dit que ρ est complètement réductible si tout sous-$\mathfrak{g}$-module U de V possède un supplémentaire : il existe un sous-$\mathfrak{g}$-module W tq $V = U \oplus W$. Il est classique que cette condition équivaut à V est somme directe de $\mathfrak{g}$-modules simples.

Exercice : Soit $\mathfrak{t}(2,k) = kE_{11} \oplus kE_{12} \oplus kE_{22}$ l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{gl}(k^2)$. Montrer que $W = kE_{12}$ est un sous-module simple de $\mathfrak{t}(2,k)$ pour l'action adjointe. Possède-t-il un supplémentaire ~~pas~~ comme ad $\mathfrak{t}(2,k)$-module ?

Théorème : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie. Alors ρ est complètement réductible.

Preuve : Quitte à diviser par $\operatorname{Ker}\rho$, on peut supposer $V \neq 0$ et ρ fidèle. ~~Notons~~ D'après l'étude faite en appendice, (Proposition), il suffit de montrer :
$H^1(\mathfrak{g}, U) = 0$ pour tout module U de dimension finie. Par récurrence sur $\dim U$ et par l'exercice 3 de l'appendice, il suffit de le montrer pour U irréductible. On veut donc montrer que si $0 \to U \to V \to k \to 0$ est une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules, alors $V \simeq U \oplus k$, où k est le module trivial. Soit c l'élément de Casimir associé à V. $c|_{V/W} = c.k = 0$, donc $c(V) \subset W$. Il vient (ρ étant fidèle)

$$0 \neq \operatorname{Tr}_V c = \operatorname{Tr}(c|_W) + \operatorname{Tr}(c|_{V/W}) = \operatorname{Tr}(c|_W).$$

Comme $c(V) \subset W$, $\operatorname{Ker} c \neq 0$. Par un argument de dimension, on a :
$V = \operatorname{Ker} c \oplus W$ et $\operatorname{Ker} c$ est un $\mathfrak{g}$-module. $\square$

Exercice 1 : Les éléments suivants de $\underset{\sim}{sl}(2,k)$ $= \mathfrak{g}$: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\underset{\sim}{sl}(2,k)$.

1) Montrer que $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$

2) Montrer que $\mathfrak{g}$ est simple.

3) Soit $U := U(\mathfrak{g})$ et $V = Ue + Uh$, montrer que V est un sous-$\mathfrak{g}$-module de U pour l'action à gauche et que $U/_V \simeq k[f]$ comme espace vectoriel. (utiliser la filtration de U). où $k[f] \hookrightarrow U \to U/V$
ker $= 0$ Donc $k[f] \hookrightarrow U/_V$
$=$ par filtration.

4) Décrire l'action de $\mathfrak{g}$ sur $k[f]$ à ~~de~~ ... de façon ...

5) Montrer que $k[f]^+ = \bigoplus_{i>0} k f^i$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module de $k[f]$ qui ne possède pas de supplémentaire comme $\mathfrak{g}$-module

Exercice 2 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Montrer que $U := U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} U_n$, où $\{U_n\}$ est une famille de $\mathfrak{g}$-module (pour l'action adjointe), de dimension finie, telle que $\bigoplus_{i=0}^{n} U_i = F_n$ où F_n désigne la filtration canonique.

3.6. L'algèbre de Lie $\underset{\sim}{sl}_2$ et ses représentations de dimension finie.

Soit sl_2 comme dans l'exercice de 1. (feuille). Soit r un entier ≥ 0 et ρ_r l'application linéaire de sl_2 dans $M_{r+1}(k)$ telle que

$$\rho_r(h) = \begin{pmatrix} r & & & \\ & r-2 & & (0) \\ & (0) & \ddots & \\ & & & -r \end{pmatrix}, \quad \rho_r(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \quad 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_r(e) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & & (0) \\ & 0 & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \mu_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mu_i = i(r-i+1)$. On vérifie sans peine que ρ_r est une représentation de sl_2 dans k^{r+1}

Proposition. La représentation ρ_r est simple.

Preuve. Soit W un sous espace de k^{r+1}, stable par ρ_r, non nul. Soit $w \in W - \{0\}$ et $\{e_1, \dots e_{r+1}\}$ la base canonique de k^{r+1}. Pour n bien choisi, $\rho_r(f)^n w$ est un multiple non nul de e_{r+1}. Donc $e_{r+1} \in W$. En transformant e_{r+1} par les puissances successives de $\rho_r(e)$, on voit que $e_i \in W$ pour tout i, (on rappelle que k est de caractéristique 0, donc les μ_i sont non nuls). Donc $W = V$.

LEMME. Soit ρ une représentation de sl_2 dans V, $\mu \in k$, v_0 un élément de V tel que $\rho(h)v_0 = \mu v_0$.

(i) On a $\rho(h)\rho(e)v_0 = (\mu+2)\rho(e)v_0$, $\rho(h)\rho(f)v_0 = (\mu-2)\rho(f)v_0$

(ii) Soit $v_i = \rho(f)^i v_0$, supposons $\rho(e)v_0 = 0$. Alors

$\rho(e)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$. (avec $v_{-1} = 0$).

Preuve. Laissée en exercice.

THEOREME. Soit ρ une représentation simple de sl_2, de dimension $r+1$. Alors ρ est équivalente à ρ_r, i.e. on peut trouver une base de V telle que ρ s'écrive comme ρ_r.

Preuve. On suppose tout d'abord k algébriquement clos.

a) Il existe un $v \in V - \{0\}$ qui est vecteur propre de $\rho(h)$. Soit $\rho(h)v = \lambda v$. On a par le lemme: $\rho(h)\rho(e)^i v = (\lambda + 2i)\rho(e)^i v$. Comme $\rho(h)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe i_0 tel que $\rho(e)^{i_0} v \neq 0$, $\rho(e)^{i_0+1} v = 0$. Posons $\rho(e)^{i_0} v = v_0$, $\lambda + 2i_0 = \mu$. On a

$\rho(h)v_0 = \mu v_0$, $\rho(e)v_0 = 0$.

b) Posons $\rho(f)^i v_0 = v_i$. On a $\rho(h)v_i = (\mu - 2i)v_i$. Soit v_s le dernier v_i non nul. Alors, $\rho(h)v_0 = \mu v_0$, $\rho(h)v_1 = (\mu-2)v_1$, $\dots$, $\rho(h)v_s = (\mu - 2s)v_s$. Donc, la suite $(v_0, \dots, v_s)$ est libre, et: $\rho(f)v_0 = v_1, \dots \rho(f)v_{s-1} = v_s$, $\rho(f)v_s = 0$. Enfin, $\rho(e)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$, par le lemme.

On voit que $kv_0 + \dots + kv_s$ est stable pour ρ donc égal à V. Donc $s = r$

c) On a $(r+1)(g-r)v_r = \rho(e)v_{r+1} = \rho(e)\cdot 0 = 0$. Donc $g = r$. 28
On constate alors que ρ est équivalente à ρ_r.

d) Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. D'après ce qui précède, les valeurs propres de $\rho(h)$ dans $\bar{k}$ sont des entiers rationnels. Donc $\rho(h)$ admet un vecteur propre non nul dans V, et la preuve précédente fonctionne. □

COROLLAIRE. Toute représentation de dimension finie de sl_2 est équivalente à une représentation de la forme $\rho_{r_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{r_p}$. □

Exercice : Décrire en termes du corollaire les représentations suivantes.
(i) La représentation naturelle $sl_2 \longrightarrow gl(k^2)$ (via l'injection naturelle)
(ii) La représentation adjointe.

Exercice : Décrire le module $\mathcal{F}^2$ pour $U(g)$, $g = sl_2$. (On rappelle l'existence d'un Casimir quadratique)

3.7 L'algèbre de Lie $\underset{\sim}{sl}(V)$

Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Rappelons que $\underset{\sim}{sl}(V)$ est un idéal de $gl(V)$ et que la décomposition de $y \in gl(V)$ en
$y = \left(y - \frac{Tr(y)}{\dim V} Id_V\right) + \frac{Tr\, y}{\dim V} Id_V$ montre que $gl(V) = \underset{\sim}{sl}(V) \times k\, Id_V$.

On a $\dim \underset{\sim}{sl}(V) = n^2 - 1$. Comme le centre de $gl(V)$ est $k\, Id_V$, on a $z(\underset{\sim}{sl}(V)) = (0)$. Soit $x \in \underset{\sim}{sl}(V)$, comme élément de $End\, V$ il possède une décomposition de Jordan $x = s + n$, s composante semi-simple, n composante nilpotente. Puisque $Tr(n) = 0$, on a $Tr(s) = 0$, donc s et $n \in \underset{\sim}{sl}(V)$. En outre, $ad\, x = ad\, s + ad\, n$ est la décomposition de Jordan de $ad\, x$ dans $End\, \underset{\sim}{gl}(V)$, [Humphreys, 4.2]; et puisque $\underset{\sim}{sl}(V) \triangleleft gl(V)$, c'est aussi celle de $ad\, x$ dans $End\, \underset{\sim}{sl}(V)$. Par conséquent, $ad\, s$ est semi-simple et $ad\, n$ est nilpotent dans $\underset{\sim}{sl}(V)$.

On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V et on identifie V à k^n au moyen de cette base. On désigne par e_{ij} la matrice $n \times n$ qui a tous ses coefficients nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Alors, $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ est une base dite canonique de $\mathfrak{gl}(n)$ et on a les formules.

$$(*) \qquad e_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i \,, \quad e_{ij}\cdot e_{k\ell} = \delta_{jk} e_{i\ell} \,, \quad [e_{ij}, e_{k\ell}] = \delta_{jk} e_{i\ell} - \delta_{\ell i} e_{kj}$$

Clairement, $\mathfrak{sl}(n)$ admet pour base $\{e_{ij}\}_{1\leq i\neq j\leq n} \cup \{H_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1}\}_{1\leq i\leq n-1}$

On dit que c'est la base canonique de $\mathfrak{sl}(n)$.

Désormais, on note $\mathfrak{g}$ à la place de $\mathfrak{sl}(n)$ et on pose $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{1\leq i<j\leq n} k e_{ij}$,

$\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{1\leq i<j\leq n} k e_{ji}$, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} k H_i$. Il résulte de 2.6 (vi)

que $\mathfrak{n}^\pm$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm$, $\mathfrak{b}^\pm$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$.

La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne formée d'éléments semi-simples.

Si $\hat{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{i=1}^{n} k e_{ii}$, on a $\mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus k\, Id$.

Soit $\{\hat{\varepsilon}_i,\ 1\leq i\leq n\}$ la base duale de $\{e_{ii},\ 1\leq i\leq n\}$ dans $\hat{\mathfrak{h}}^*$.

De $(*)$ on tire $[h, e_{ij}] = (\hat{\varepsilon}_i(h) - \hat{\varepsilon}_j(h))\, e_{ij}$, $1\leq i,j\leq n$.

On pose $\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i|_{\mathfrak{h}}$. Remarquons que

$\hat{\mathfrak{h}}^*_0 := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\varepsilon}_i \ /\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0\}$ s'identifie à $\mathfrak{h}^* = \{\varphi \in \hat{\mathfrak{h}}^*,\ \varphi(Id) = 0\}$ par l'application de restriction $f \longmapsto f|_{\mathfrak{h}}$ qui envoie $\hat{\varepsilon}_i$ sur ε_i. On a donc on a $[h, e_{ij}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)\, e_{ij}$ $\forall h \in \mathfrak{h}$.

Introduisons quelques notations et définitions.

L'ensemble $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \ /\ 1\leq i\neq j\leq n\} \subset \mathfrak{h}^*$ est appelé système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Les éléments de $R^+ := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \ /\ i<j\}$ et $R^- = -R^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \ /\ j<i\}$ sont respectivement les racines positives et négatives. On écrit $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$ selon le cas. Pour tout $\alpha \in R$, $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ on pose : $H_\alpha = e_{ii} - e_{jj}$, $X_\alpha = e_{ij}$, $X_{-\alpha} = e_{ji}$, $\mathfrak{g}^\alpha = k X_\alpha$.

On a $\underset{\sim}{n}^+ = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}^\alpha$, $\underset{\sim}{n}^- = \bigoplus_{\alpha<0} \mathfrak{g}^\alpha$.

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ on pose $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in R^+$ et $B = \{\alpha_1, \dots$ on dit que B est une base de R (notez que B est une base de $\underset{\sim}{h}^*$). On a $H_i = H_{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Remarques. (1) Il découle des formules $(*)$ que :

$\forall \alpha \in R$, $\forall h \in \underset{\sim}{h}$, $[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha$;

$\forall \alpha \in R^+$, $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$,

$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

(2) Soit $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in R^+$, on a $\alpha = \sum_{i \leq k \leq j-1} \alpha_k$. Il en résulte que tout élément $\alpha \in R^+$, resp. R^-, s'écrit de manière unique $\sum_{k=1}^{n-1} a_k \alpha_k$ avec $a_k = 0$ ou 1, resp. 0 ou -1, et les a_k non tous nuls ; l'entier $\sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$, noté $ht(\alpha)$ est appelé hauteur de α.

Il existe une unique racine positive de hauteur maximale $(n-1)$, c'est $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$.

Proposition. Soit α, β deux racines

(i) $a_{\beta\alpha} := \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\{t \in \mathbb{Z} \,/\, \beta + t\alpha \in R \cup \{0\}\} = [-t', t'']$, t' et $t'' \geq 0$, $t' - t'' = a_{\beta\alpha}$

(iii) $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in R$

(iv) Si $\beta - \alpha \notin R \cup \{0\}$. Alors $a_{\beta\alpha} \leq 0$, $t' = 0$, $t'' = -a_{\beta\alpha}$

(v) Si $\beta + \alpha \in R$, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$

Si $\beta = -\alpha$ $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = k H_\alpha$

Si $\beta + \alpha \notin R$ et $\beta \neq -\alpha$, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = (0)$.

(iv) les seules racines proportionnelles à α sont α et $-\alpha$.

Preuve. C'est une vérification directe qui ne pose pas de difficulté.

Notation et Remarques. (1) En généralisant ce qui précède, il est commode de poser pour $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$ quelconque

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{ x \in \mathfrak{g} \,/\, [h, x] = \lambda(h)\, x,\ \forall\, h \in \underset{\sim}{h} \}.$$

Alors $\mathfrak{g}^0 = h$, $\mathfrak{g}^\lambda \neq (0)$ ssi $\lambda \in R \cup \{0\}$; $\mathfrak{g}^\lambda$ est appelé sous-espace propre associé au poids λ.

(2) La sous algèbre $kH_\alpha \oplus kX_\alpha \oplus kX_{-\alpha}$, $\alpha \in R^+$ est isomorphe à $\underset{\sim}{sl}_2$ dans l'isomorphisme qui fait correspondre à H_α, X_α, $X_{-\alpha}$ les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème. Soit $n \geq 2$; l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \underset{\sim}{sl}_n$ est simple.

Preuve. On a $\dim \mathfrak{g} > 1$ puisque $n \geq 2$. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$. On va montrer que $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{J}$, ce qui implique $\mathfrak{J} = \mathfrak{g}$.
En effet $[X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i}$, on tire $\underset{\sim}{h} \subset \mathfrak{J}$, puis $2X_{-\alpha} = [H_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{J}$, $X_\alpha \in k[X_{\alpha_i}, [X_{\alpha_{i+1}}, \cdots [X_{\alpha_{j-1}}, X_{\alpha_j}]]]$ si $\alpha = \alpha_i + \cdots + \alpha_j$,
D'où $\mathfrak{g} = \mathfrak{J}$. Remarquons qu'il suffit pour cela de prouver que $X_{\tilde\alpha} \in \mathfrak{J}$, où $\tilde\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$ est la plus grande racine : il est clair qu'en faisant des crochets successifs avec des $X_{-\beta}$, $\beta \in B$ on arrive à

$[\cdots [X_{\tilde\alpha}, X_{-\beta}] \cdots] \in \mathfrak{g}^{\alpha_j} \setminus (0)$ (se souvenir que $[X_\alpha, X_{-\beta}] \in \mathfrak{g}^{\alpha-\beta} \setminus (0)$ si $\alpha - \beta \in R$). Commençons par montrer que $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{n}^+ \neq (0)$.

Soit $x \in \mathfrak{J} \setminus (0)$, $x = \sum_{\beta \in R^+} a_\beta X_\beta + \sum_{\beta \in R^-} b_\beta X_\beta + h$, $h \in \underset{\sim}{h}$.

1er cas. Si $b_\beta = 0$ pour tout $\beta \in R^-$: $x = h + \sum_{\alpha \in R^+} a_\alpha X_\alpha$. Si $h = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon il existe $\beta \in R^+$ tel que $[h, X_\beta] = \beta(h) X_\beta \neq 0$ (pourquoi ?). Alors, il vient pour ce β

$$[x, X_\beta] = \beta(h) X_\beta + \sum_{\alpha \in R^+} a_\alpha [X_\alpha, X_\beta] \in \beta(h) X_\beta + \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}.$$

Comme $ht(\alpha+\beta) > ht\,\beta$,

on a $0 \neq [x, X_\beta] \in \mathfrak{J} \cap \underset{\sim}{\mathfrak{n}}^+$.

$2^{ème}$ Cas : il existe $\beta \in R^-$ tel que $b_\beta \neq 0$. Prenons un β de hauteur maximale, t, et raisonnons par récurrence sur t. Si $t = 1$, alors $\beta = -\alpha_j$ et $0 \neq [x, X_{\alpha_j}] \in \underset{\sim}{b}^+$ et on est ramené au cas 1.
Si $t \geq 2$, on écrit $-\beta = \sum_{k \leq i \leq l} \alpha_i$, alors

$[x, X_{\alpha_k}]$ a une composante $X_{\beta+\alpha_k}$ de hauteur minimale $= t-1$.

Nous avons donc trouvé un $x \in \underset{\sim}{n}^+ \cap J \setminus \{0\}$, il ne reste plus par récurrence sur la hauteur à trouver par itération des $[X_{\alpha_i}, -]$ convenablement choisis à trouver que $X_{\tilde{\alpha}} \in J$. Ce qui termine la démonstration.

Remarques. La représentation adjointe : $g \to \mathrm{ad}\, g \subset gl(g)$ est donc irréductible.

Théorème 2. La forme de Killing K sur $g = \underset{\sim}{sl}(n,k)$ est donnée par :
$K(x,y) = 2n\, \mathrm{Tr}(xy)$, $\forall x, y \in \underset{\sim}{sl}(n,k)$.

Preuve. Avant tout, nous pouvons suggérer en exercice une preuve calculatoire qui consiste à calculer : $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, e_{ij}\, \mathrm{ad}\, e_{kl}) = \sum_{1 \leq p,q \leq n} (\delta_{lp}\delta_{jk}\delta_{ip} - \delta_{lp}\delta_{iq}\delta_{jq}\delta_{kp} - \delta_{kq}\delta_{jp}\delta_{lq}\delta_{ip} + \delta_{kq}\delta_{il}\delta_{jq})$.
La preuve qui suit utilise la simplicité de $sl(n,k)$.
Soit $F \supseteq k$ une extension algébriquement close de k. Puisque la forme de Killing de g_F est l'extension à celle de g et que $g_F = \underset{\sim}{sl}(n,F)$, il est clair qu'il suffit de faire la preuve pour k algébriquement clos. On sait que g est simple. La forme bilinéaire symétrique $(x,y) \longmapsto b(x,y) = \mathrm{Tr}\, xy$ est non dégénérée sur $g = sl(n,k)$ (elle l'est sur $gl(n) = sl(n) \oplus k\, \mathrm{Id}_V$ et $k\, \mathrm{Id}_V$ est l'orthogonal de $sl(n)$). Donc, $K(x,y) = b(u(x),y)$ pour un $u \in \mathrm{End}\, g$. En outre, $b([x,y],z) + b(y,[x,z]) = 0$. Donc b est g-invariante. On en déduit que u vérifie $u([x,y]) = [x, u(y)]$

(utiliser le fait que K et q invariante et b non dégénéré). En d'autres termes u est dans le commutant du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ pour la représentation adjointe. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, le lemme de Schur affirme qu'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda\, Id$. Donc $K(x,y) = \lambda\, b(x,y)$, ou encore $K = \lambda b$. Pour calculer λ, on peut par exemple remarquer que $K(e_{ij}, e_{ji}) = 2n = \lambda b(e_{ij}, e_{ji}) = \lambda$ si $i \neq j$, ce qui se vérifie très facilement. D'où le théorème.

Corollaire 1. Si $\lambda, \mu \in \underset{\sim}{h}^*$ et $\lambda + \mu \neq 0$, $\mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathfrak{g}^\mu$ sont orthogonaux pour K. La restriction de K à $\mathfrak{g}^\lambda \times \mathfrak{g}^{-\lambda}$, et donc à $\underset{\sim}{h} \times \underset{\sim}{h}$, est non dégénérée. Si $x, y \in \underset{\sim}{h}$ on a :

$$K(x,y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(x)\,\alpha(y).$$

Preuve. Remarquons pour cela que $b(e_{ij}, e_{kl}) = 0$ si $\lambda = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ et $\mu = \varepsilon_k - \varepsilon_l$ sont dans R dès que $j \neq k$. Par contre $b(e_{ij}, e_{ji}) = 1$, $i \neq j$, donc si $\lambda \neq 0$, K est non dégénérée sur $\mathfrak{g}^\lambda \times \mathfrak{g}^{-\lambda}$. Si $\lambda = 0$, les formules

$$b(H_i, H_k) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = k \\ -1 & \text{si } i = k+1 \text{ ou } k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

prouvent les autres assertions.

Corollaire 2. (i) Pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$ il existe un unique $h_\lambda \in \underset{\sim}{h}$ tel que $\lambda(h) = K(h_\lambda, h)$ pour tout $h \in \underset{\sim}{h}$. Si $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\alpha \in R$, on a

$$[x,y] = K(x,y)\, h_\alpha.$$

(ii) On a pour tout $\alpha \in R$: $2K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = K(H_\alpha, H_\alpha) = \dfrac{4}{K(h_\alpha, h_\alpha)}$,

où $H_\alpha = \dfrac{2h_\alpha}{K(h_\alpha, h_\alpha)}$, $\quad h_\alpha = \dfrac{2H_\alpha}{K(H_\alpha, H_\alpha)}$

Preuve. (i) La première assertion est conséquence de la non dégénérescence de K sur $\underset{\sim}{h} \times \underset{\sim}{h}$. Pour la deuxième, on remarque que, pour tout $h \in \underset{\sim}{h}$,

$K(h,[x,y]) = K([h,x],y) = K(\alpha(h)x,y) = K(h_\alpha,h)K(x,y)$
$= K(h, K(x,y)h_\alpha)$. Puisque $[x,y] \in \mathfrak{g}^0 = \underset{\sim}{h}$ et que K est non dégénérée sur $\underset{\sim}{h}$, on a bien $[x,y] = K(x,y)h_\alpha$. Par définition, on sait que $\alpha(h_\alpha) = K(h_\alpha, h_\alpha)$ et $[h_\alpha, X_\alpha] = \alpha(h_\alpha)X_\alpha$; on en tire $\left[\frac{h_\alpha}{K(h_\alpha,h_\alpha)}, X_\alpha\right] = X_\alpha$. D'autre part, il découle de (i) que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha})h_\alpha = \underset{\smile}{H_\alpha}$, donc
H_α est déjà défini précédemment : $H_\alpha = h_{\alpha}$ ..

$h_\alpha = \frac{H_\alpha}{K(X_\alpha,X_{-\alpha})}$. Finalement $\left[\frac{H_\alpha}{K(h_\alpha,h_\alpha)K(X_\alpha,X_{-\alpha})}, X_\alpha\right] = X_\alpha$

donne $\frac{2}{K(h_\alpha,h_\alpha)K(X_\alpha,X_{-\alpha})} = 1$ (car $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$)

On en déduit $H_\alpha = \frac{2h_\alpha}{K(h_\alpha,h_\alpha)}$, puis $K(H_\alpha,H_\alpha) = \frac{4}{K(h_\alpha,h_\alpha)^2}K(h_\alpha,h_\alpha)$

$= \frac{4}{K(h_\alpha,h_\alpha)} = 2K(X_\alpha,X_{-\alpha})$. Il vient donc $h_\alpha = \frac{2H_\alpha}{K(H_\alpha,H_\alpha)}$. $\square$

Corollaire 3. Il existe sur $\underset{\sim}{h}^*$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie par $\forall \lambda,\rho \in \underset{\sim}{h}^*$, $K^*(\lambda,\rho) = K(h_\lambda, h_\rho) = \lambda(h_\rho) = \rho(h_\lambda)$

Preuve : C'est une conséquence triviale des corollaires précédents. $\square$

Remarques. (1) Il existe donc un isomorphisme respectant les formes K^* et K entre $\underset{\sim}{h}^*$ et $\underset{\sim}{h}$, défini par $\lambda \longrightarrow h_\lambda$. L'élément $H_\lambda = \frac{2h_\alpha}{K(h_\alpha,h_\alpha)}$ est appelé coracine de α ; dans $\underset{\sim}{h}^*$ il correspond par l'isomorphisme précédent à $\frac{2\alpha}{K^*(\alpha,\alpha)}$. Remarquons que $K^*\left(\lambda, \frac{2\alpha}{K^*(\alpha,\alpha)}\right) =$

$\frac{2K^*(\lambda,\alpha)}{K^*(\alpha,\alpha)} = K(h_\lambda, H_\alpha) = \lambda(H_\alpha)$.

(2) Identifions la forme K^* sur $\underset{\sim}{h}^* \simeq \underset{\sim}{h}_0^* = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\varepsilon}_i \mid \sum \lambda_i = 0\}$,
Pour cela rappelons que $\{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}\}$ est une base de $\underset{\sim}{h}^*$ et que $\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i|_h$. On va calculer les $K^*(\alpha_i, \alpha_j)$.

On a $K^*(\alpha_i, \alpha_j) = K(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) = \dfrac{4K(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j})}{K(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i})\,K(H_{\alpha_j}, H_{\alpha_j})}$

donc $K^*(\alpha_i, \alpha_j) = \dfrac{4\,b(H_i, H_j)}{2n\, b(H_i, H_i)\, b(H_j, H_j)}$, où $b(x,y) = tr(xy)$

et $H_i = H_{\alpha_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$. Puisque $b(H_i, H_i) = 2$ pour tout i, il vient :

$$K^*(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{1}{2n} \times \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i+1,\ i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant, notons $(\ /\ )$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\hat{\underset{\sim}{h}}^*$ pour laquelle $(\hat{\varepsilon}_i / \hat{\varepsilon}_j) = \delta_{ij}$. Elle induit une forme bilinéaire non dégénérée sur l'hyperplan $\hat{h}_0^*$ et dans la base $\{\hat{\alpha}_i = \hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i+1}\}$ de $\hat{\underset{\sim}{h}}_0^*$ on a :

$$\forall\ 1 \leq i \leq j \leq n-1 \quad (\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i+1,\ i-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $K^* = \frac{1}{2n}(\ /\ )$ compte tenu de l'identification $\underset{\sim}{h}^* \cong \hat{\underset{\sim}{h}}_0$.

Pour tout $\alpha \in R$, on pose $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha/\alpha)}$ (se rappeler que $R \subseteq \underset{\sim}{h}^*$),

alors : $(\lambda / \alpha^\vee) = \dfrac{2(\lambda/\alpha)}{(\alpha/\alpha)} = \dfrac{2K^*(\lambda, \alpha)}{K^*(\alpha, \alpha)} = \lambda(H_\alpha)$ pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$.

Pour tout $\alpha \in R$, on note s_α l'endomorphisme de $\underset{\sim}{h}^*$ défini par

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha = \lambda - \frac{2(\lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha.$$

On a $s_\alpha^2 = Id$ et $(s_\alpha x \,|\, s_\alpha y) = (x\,|\,y)$. Notons qu'avec les notations de la proposition 1, on a : $\forall \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) = \beta - q_{\beta\alpha}\alpha \in R$; donc $s_\alpha(R) = R$.

s_α fixe l'orthogonal de α et $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. On dit que s_α est la reflexion relative à α. On appelle groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, h)$, noté W, le sous-groupe des automorphismes de $(\underset{\sim}{h}^*, (\ |\ ))$ engendré par s_α. On a $w(R) = R$ $\forall w \in W$, donc W est fini.

Calculons l'action de s_{α_i} sur la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ de $\underset{\sim}{h}^*$:

$$\cancel{s_{\alpha_i}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1}) = \begin{cases} \varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1} & \text{si } \ell \notin \{i, i\pm 1\} \\ -(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) & \text{si } \ell = i \\ \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i+1} & \text{si } \ell = i-1 \\ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{si } \ell = i+1 \end{cases}}$$

on $s_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$, $\quad s_{\alpha_i}(\alpha_{i+1}) = \alpha_{i+1} + \alpha_i$, $\quad s_{\alpha_i}(\alpha_{i-1}) = \alpha_{i-1} + \alpha_i$,

$s_{\alpha_i}(\alpha_j) = 0$ sinon.

Pour tout $w \in W$, notons $\hat{w}$ l'automorphisme de $(\hat{\underset{\sim}{h}}^*, (\ |\ ))$ égal à w sur $\hat{\underset{\sim}{h}}_0^*$ et à l'identité sur $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i$. ~~Rappelons que si $v \in \hat{h}^*$ avec $(v|v) \neq 0$ on définit la reflexion~~ s_v par $s_v(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda|v)}{(v|v)} v$, $\forall \lambda \in \hat{h}^*$

Un calcul immédiat donne : $\cancel{\hat{s}_{\alpha_i} = s_{\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i+1}}}$

(~~Remarquer que~~ $\hat{s}_{\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i+1}}$ fixe $\hat{\varepsilon}_\ell$, $\ell \neq i, i+1$ et permute $\hat{\varepsilon}_i$ et $\hat{\varepsilon}_{i+1}$

~~(Puis, comparer aux formules donnant $s_{\alpha_i}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1})$.~~

Si $X = \{\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n\}$ dont le groupe de permutation est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$), on déduit de ce qui précède un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_n$ défini par $w \longmapsto \bar{w}/X$, qui à s_{α_i} fait correspondre la permutation $(i, i+1)$.

On pose $E_{\mathbb{Q}} := \underset{\sim}{h}^*_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha\in R} \mathbb{Q}\alpha$ et $E^*_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha\in R} \mathbb{Q} H_\alpha$. Alors $\underset{\sim}{h}$ s'identifie à $\underset{\sim}{h}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} k$, $\underset{\sim}{h}^*$ à $h^*_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} k$ et $E^*_{\mathbb{Q}}$ au dual de $E_{\mathbb{Q}}$. On pose aussi

$$E_{\mathbb{R}} = \underset{\sim}{h}^*_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \quad Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i \subset E_{\mathbb{Q}}.$$

Les éléments de $Q(R)$ sont appelés poids radiciels. Les espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, $E_{\mathbb{Q}}$, resp. $E_{\mathbb{R}}$, sont munis de $(\,/\,)$, qui, est définie positive. ($\mathrm{Tr}\, x^2 \geq 0$ et non dégénérée par coroll. 1). Notons que W opère sur $E_{\mathbb{Q}}$ et $E_{\mathbb{R}}$ en laissant $(\,/\,)$ invariante. Définissons l'ensemble des poids de R par :

$$P(R) = \{\lambda \in E_{\mathbb{R}},\ (\lambda / \alpha^\vee) = \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } \alpha \in R\}$$

Comme $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_{n-1}^\vee\}$ est une base de $E_{\mathbb{Q}}$, il existe une base duale, $\{\varpi_1, \dots, \varpi_{n-1}\}$ dans $E_{\mathbb{Q}}$, relativement à $(\,/\,)$: $\quad (\bar{\varpi}_i \mid \alpha_i^\vee) = \varpi_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$.

Comme $\{\varpi_1, \dots, \varpi_{n-1}\}$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$, on a en revenant aux définitions.

$$Q(R) \subset P(R) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\varpi_i \subset E_{\mathbb{Q}}$$

(Ici $P(R)/Q(R)$ est fini, de cardinal n.

Un calcul élémentaire fournit

PROPOSITION 2. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,k)$ on a :

(i) $\varpi_j = (\hat{\varepsilon}_1 + \dots + \hat{\varepsilon}_j) - \frac{j}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \hat{\varepsilon}_\ell$ dans $\hat{h}_0^*$, donc

$\bar{\varpi}_j = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_j$ sur $\underset{\sim}{h}$.

(ii) $\varpi_j = \frac{1}{n}\big[(n-j)\alpha_1 + 2(n-j)\alpha_2 + \dots + (j-1)(n-j)\alpha_{j-1} + j(n-j)\alpha_j + j(n-j-1)\alpha_{j+1} + \dots + j\,\alpha_{n-1}\big]$

(iii) $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \varpi_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\alpha_i.$

Définition. Les poids $\varpi_1, \dots, \varpi_{n-1}$ sont appelés poids fondamentaux.
$P^{+}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{N}\varpi_i = \{\lambda \in P(R),\ \lambda(H_{\alpha_i}) \geq 0 \text{ pour tout } i\}$ est l'ensemble des poids entiers dominants.

voir pour cette section Bourbaki 4,5,6 Algèbre de Lie Table 1 Donner les exemples de A_1 et A_2

3.7 Structure des algèbres de Lie semi-simples.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple quelconque. Nous allons énoncer sans démonstration les résultats donnant la structure de $\mathfrak{g}$; ils généralisent ceux démontrés dans 3.6. [Di, Bou; 2,3,4].

On désigne toujours par K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Tout $x \in \mathfrak{g}$ s'écrit de façon unique $x = s + n$ avec $s \in \mathfrak{g}$ ad-semi-simple et $n \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent. Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation linéaire de dimension finie de $\mathfrak{g}$ alors $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ est la décomposition de Jordan de x dans $\mathfrak{g}$, l'élément s est appelé composante semi-simple de x, n est la composante nilpotente de x.

Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ si :

1) $\mathfrak{h}$ est commutative
2) Tous les éléments de $\mathfrak{h}$ sont semi-simples (i.e. ad-semi simples)
3) $\mathfrak{h}$ est maximale parmi les sous-algèbres vérifiant 1) et 2)

On démontre qu'il existe $l \in \mathbb{N}$, appelé rang $\mathfrak{g}$ tel que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ soient de dimension $l = rg(\mathfrak{g})$. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est dite déployante si tous les éléments $ad\, x \in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ sont diagonalisables, $x \in \mathfrak{h}$. Par exemple la sous-algèbre des matrices diagonales $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sl}(n,k)$ est une sous-algèbre de Cartan déployante. Par contre la sous-algèbre de Cartan $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ est non déployante de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Lorsque k est algébriquement clos, toute sous-algèbre de Cartan est évidemment déployante.

Désormais, on suppose fixé un couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ formé d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ possédant une sous-algèbre de Cartan déployante notée $\mathfrak{h}$. Les constructions qui suivent sont relatives à ce choix de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Si l'on change de sous-algèbre de Cartan, les données que l'on obtient sont "isomorphes" (dans un sens à préciser").

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose $\mathfrak{g}^\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h).x,\ h \in \mathfrak{h}\}$.
L'ensemble $R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}^\alpha \neq (0)\}$ est appelé système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Alors :

(i) On a : $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in R$.

Si $\alpha \in R$ on a $-\alpha \in R$ et $\dim [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = 1$; il existe des éléments $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $H_\alpha \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tels que :

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$$

Donc $kX_\alpha \oplus kX_{-\alpha} \oplus kH_\alpha \simeq sl_2(k)$.

(ii) On a $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Soient $\alpha, \beta \in R$ alors toutes les assertions de la proposition 3.7

(iii) Toutes les assertions des corollaires suivant 3.7. sont vraies.

(iv) Il existe $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset R$, $l = rg(\mathfrak{g})$, appelé base de R telle que $\forall \alpha \in R$, $\alpha = \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}\ \forall i$, ou $a_i \in -\mathbb{N}\ \forall i$. On pose $R^+ = \{\sum_i a_i \alpha_i \in R \mid a_i \geq 0\ \forall i\}$, $R^- = \{\sum a_i \alpha_i \in R \mid a_i \leq 0,\ \forall i\}$.
Ce sont respectivement les racines positives et négatives de R. Alors, $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}^\alpha$ sont nilpotents (maximales) et $\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm$ sont résolubles (maximals). On dit que $\mathfrak{b}^\pm$ sont les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$.

(v) Soit $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha = \lambda - \dfrac{2K^*(\lambda, \alpha)}{K^*(\alpha, \alpha)}\alpha$, où K^* est la forme de Killing sur $\mathfrak{h}^*$, $\alpha \in R$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
On a $s_\alpha(R) = R$ et on désigne par W le groupe (fini) engendré par les s_α. On dit que c'est le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tout élément

de W préserve K^*.

(vi) On construit comme dans la section précédente les espaces vectoriels
$$E_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Q}\alpha, \quad E_{\mathbb{Q}}^* = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Q}H_\alpha, \quad E_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \quad E_{\mathbb{R}}^* = E_{\mathbb{Q}}^* \otimes \mathbb{R}.$$

On définit ensuite $Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$, les poids radiciels et
$P(R) = \{\lambda \in E_{\mathbb{R}} \,/\, \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \ \forall \alpha \in R\}$, les poids de R.
Si $\{\varpi_1, \dots, \varpi_\ell\}$ est la base dual des $\alpha_i^\vee = \dfrac{2\alpha_i}{K^*(\alpha_i, \alpha_i)}$, on a
$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varpi_i$.
Les poids entiers dominants sont les éléments de
$$P^{++}(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{N}\varpi_i = \{\lambda \in P(R) \,/\, \lambda(H_{\alpha_i}) \geq 0 \ \forall i\}.$$

ii) Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \times \dots \mathfrak{s}_t$ avec $\mathfrak{s}_i$ idéal simple de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_i$ sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{h}_i$ déployante, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \dots \times \mathfrak{h}_t$ est une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$ et le système R de racines s'identifie à $R_1 \times \dots \times R_t$. On se ramène ainsi à l'étude d'algèbres de Lie simples. On les classifie par type, tout d'abord les cas dits classiques.

* type A_{n-1}, $n \geq 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, k)$

* type B_n, $n \geq 2$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, k) = \{x \in \operatorname{End} k^{2n+1} \,/\, \varphi(xv, w) + \varphi(v, xw) = 0\}$
où φ est une forme symétrique non dégénérée sur k^{2n+1}.

* type C_n, $n \geq 2$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, k) = \{x \in \operatorname{End} k^{2n} \,/\, \varphi(xv, w) + \varphi(v, xw) = 0\}$
où φ est une forme alternée non dégénérée sur k^{2n}

* type D_n, $n \geq 3$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, k) = \{x \in \operatorname{End} k^{2n} \,/\, \varphi(xv, w) + \varphi(v, xw) = 0\}$
forme symétrique non dégénérée sur k^{2n}.

On y ajoute les cas exceptionnels.

Types E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 ; correspondant à des algèbres de Lie simples exceptionnelles.

On a alors

Théorème. Supposons k algébriquement clos. Si deux algèbres de Lie semi-simples ~~sont isomorphes~~ ont des systèmes de racines isomorphes, alors elles sont isomorphes.

3.8. Modules de plus haut poids

On fixe $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie semi-simple et $\underline{h}$ sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$, $l = \dim \underline{h} = rg(\mathfrak{g})$. Les notations sont celles de 3.7 auxquelles on ajoute :

$$\begin{cases} Q^+(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{N}\alpha_i \\ \text{Si } \lambda, \mu \in \underline{h}^*, \text{ on dit que } \lambda \leq \mu \text{ si } \mu - \lambda \in Q^+(R) \end{cases}$$

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\underline{h}^*$.

Rappelons que l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ admet pour base les monômes ordonnés en les éléments d'une base fixée de $\mathfrak{g}$. On pourra par exemple utiliser la base : $\{X_{-\beta_1}, \dots, X_{-\beta_n}\} \cup \{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}\} \cup \{X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_n}\}$ où $R^{\pm} = \{\pm\beta_i\}$ et $B = \{\alpha_i\}$.

Rappelons la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \underline{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ donne des isomorphismes d'espace vectoriels : $U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\underline{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+) \simeq U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\underline{b}^+)$

Nous utiliserons le fait que les $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in B$ engendrent $\mathfrak{n}^+$ comme algèbre de Lie : si $\alpha \in R^+$, $\alpha = \sum_i a_i \alpha_i$ donc $\mathfrak{g}^\alpha$ s'obtient en crochetant les $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ un nombre convenable de fois.

Le centre de $U(\mathfrak{g})$ sera noté $Z(\mathfrak{g})$. Un $\mathfrak{g}$-module M admet un caractère central si tout $z \in Z(\mathfrak{g})$ opère par multiplication scalaire dans M. Si $\chi_M(z)$ est ce scalaire, l'application $\chi_M : Z(\mathfrak{g}) \to k$ est un homomorphisme d'algèbre. Si M est simple de dimension finie,

M admet un caractère central.

Remarque. Si k est algébriquement clos, $Z(\mathfrak{g})$ est un anneau de polynômes en l variables sur k, cf. [Di, 7.3.8].

Pour tout $\mathfrak{g}$-module V et tout $\lambda \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*$, on pose

$$V^\lambda = \{ v \in V \mid h.v = \lambda(h)v, \quad h \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}} \}.$$

La dimension de V^λ s'appelle la multiplicité de λ dans V. Si $V^\lambda \neq 0$, on dit que λ est un poids de V. Il est clair que la somme $\sum_{\lambda \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*} V^\lambda$ est directe dans V (éventuellement nulle).

On a les remarques élémentaires.

(a) $\mathfrak{g}^\alpha . V^\lambda \subset V^{\lambda+\alpha}$, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$.

(b) $\bigoplus_{\lambda \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*} V^\lambda$ est un sous $\mathfrak{g}$-module de V.

Le (a) découle de $hx.v = [h, x].v + xh.v$. On en déduit (b), puis (c) Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple tel que $V^\lambda \neq (0)$ pour un $\lambda \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*$, alors $V = \bigoplus_{\nu \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*} V^\nu$.

LEMME 1 et DEFINITION 1. Soient V un $\mathfrak{g}$-module et $v \in V$. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathfrak{b}^+ . v \subset kv$

(ii) $\mathfrak{h}.v \subset kv$ et $\mathfrak{n}^+ . v = (0)$

(iii) $\mathfrak{h}.v \subset kv$ et $\mathfrak{g}^\alpha . v = (0)$, $\forall \alpha \in B$

Dans ce cas on dit que v est un élément primitif de V.

Preuve. (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évident (iii) $\Rightarrow$ (i) provient de ce que les $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in B$ engendre $\mathfrak{n}^+$ comme algèbre de Lie. (i) $\Rightarrow$ (ii) consiste à noter que si $\lambda \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}^*$ avec $h.v = \lambda(h)v$ pour $h \in \underset{\sim}{\mathfrak{h}}$, alors $\forall \alpha \in R^+$, $\mathfrak{g}^\alpha . v \subset V^{\lambda+\alpha} = (0)$ (cf. (a)).

Proposition 1. Soit V un $\mathfrak{g}$-module tel que $V = U(\mathfrak{g})\cdot v$ où v est un élément primitif de poids $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$. Alors :

(i) $V = U(n^-)\cdot v$ comme $U(n^-)$-module

(ii) $V = \bigoplus_{\rho \in \underset{\sim}{h}^*} V^\rho$, $\dim V^\rho < \infty$, $\forall \rho \in h^*$; $\dim V^\lambda = 1$; tout poids de V est $\leq \lambda$.

(iii) Le commutant de V est réduit à $k\,\mathrm{Id}_V$. En particulier V admet un caractère central.

Preuve. (i) résulte de $U(\mathfrak{g}) = U(n^-)U(b^+)$ et de $U(b^+)\cdot v = kv$

(ii) Notons $R^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ et pour $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ posons :

$$X^q = X_{-\beta_1}^{q_1} \cdots X_{-\beta_n}^{q_n}, \quad \rho_q = \sum_{q=1}^{n} q_j \beta_j .$$ Pour $h \in \underset{\sim}{h}$, on a

$$h X^q = [h, X^q] + X^q h = -\rho_q(h) X^q + X^q h \text{ ; donc}$$

$h X^q \cdot v = (\lambda - \rho_q)(h) X^q \cdot v$. On déduit de (i) et de $U(n^-) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^n} k X^i$ que $V = \bigoplus_{\rho \in h^*} V^\rho$ où les poids de ρ sont nécessairement de la forme $\rho = \lambda - \rho_q$, donc $\leq \lambda$, et que $\dim V^\lambda = 1$.

(iii) Soit $c \in \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})} V$. Pour $h \in \underset{\sim}{h}$, on a $h\,c(v) = c(h\cdot v) = \lambda(h)c(v)$, donc $c(v) \in V^\lambda$ et $c(v) = \chi(c)v$ pour une $\chi(c) \in k$. Si $i \in \mathbb{N}^n$, on a $c(X^i\cdot v) = X^i \cdot c(v) = \chi(c) X^i v$ et puisque $V = \sum k X^i \cdot v$, on trouve $c = \chi(c)\,\mathrm{Id}_V$.

Définition 2. Un $\mathfrak{g}$-module V comme dans la proposition 1 est appelé module de plus haut poids (λ). (Ceci car tous les poids sont $\leq \lambda$).

Remarquons qu'un $\mathfrak{g}$-module simple V contenant un élément primitif (de poids λ) est un $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids (λ). En effet, si v est un tel élément, $V = U(\mathfrak{g})\cdot v$ par simplicité de V. Compte tenu du (c) précédent, on peut affirmer.

Corollaire 1. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ. Alors :

(i) Les éléments primitifs de V sont les éléments non nuls de V^λ qui est de dimension 1.

(ii) On a $V = \bigoplus_{\mu \in \underset{\sim}{h}^*} V^\mu$, $\dim V^\mu < \infty$.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$ il existe un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ.

Soit $\lambda \in \underset{\sim}{h}^*$ on note k_λ le $\underset{\sim}{b}^+$-module défini par : $k_\lambda = k$ comme e.v. et $(h+n)\cdot 1 = \lambda(h)\cdot 1$, $\forall h \in \underset{\sim}{h}$, $\forall n \in n^+$. (On vérifie immédiatement que k_λ est bien un $\underset{\sim}{b}^+$-module. Rappelons que $U(\mathfrak{g})$ est un $U(\underset{\sim}{b}^+)$-module à droite libre de base les X^q, $q \in \mathbb{N}^n$. (X^q comme dans la preuve de la proposition 1). On définit un $\mathfrak{g}$-module à gauche par :

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\underset{\sim}{b}^+)} k_\lambda$$

On dit que $M(\lambda)$ est le module de Verma associé à $(\mathfrak{g}, h, B, \lambda)$, on dira que c'est le module de Verma de plus haut poids λ.

Cette définition signifie que $M(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche engendré par l'élément $v_\lambda = 1 \otimes 1$, qui vérifie : $(h+n)\cdot v_\lambda =$ $(h+n) \otimes_{U(\underset{\sim}{b}^+)} 1 = 1 \otimes_{U(b^+)} (h+n)\cdot 1 = 1 \otimes \lambda(h) 1 = \lambda(h)\, 1 \otimes 1$.

Donc $(h+n)\cdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$. De plus :

$$M(\lambda) = U(n^-) \otimes_k \left(U(b^+) \otimes_{U(b^+)} k_\lambda \right) \simeq U(n^-) \otimes_k k = U(n^-)$$

comme k-espace vectoriel, et même comme $U(n^-)$-module à gauche.

Notons que $M(\lambda)$ est un $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids λ avec $M(\lambda)^\lambda = k v_\lambda$. D'autre part $U(n^-) = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}^n} k X^q$,

$X^q = X_{-\beta_1}^{q_1} \cdots X_{-\beta_n}^{q_n}$, si $R^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. De $[h, X^q] = -\rho_q(h) X^q$,

$\rho_q = \sum_{j=1}^n q_j \beta_j$, on déduit que les poids de $M(\lambda)$ sont les $\mu + q$ $\mu = \lambda - \rho_q$, q décrivant $\mathbb{N}^n$. Précisément, si $S_\mu = \{q \in \mathbb{N}^n / \mu = \lambda - \rho_q\}$, alors

$$M(\lambda)^\mu = \bigoplus_{q} (k X^q \otimes k)$$

THEOREME 1. 1) Soit V un $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids $\lambda \in \underline{h}^*$, $v \in V^\lambda$ un élément primitif. Alors, il existe un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{g}$-modules $\phi : M(\lambda) \to V$ tel que $\phi(v_\lambda) = v$. (49)

2) Il existe un plus grand sous-module K_λ de $M(\lambda)$, différent de $M(\lambda)$. Le quotient $L(\lambda) = M(\lambda)/K_\lambda$ est un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ.

3) Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids $\lambda \in \underline{h}^*$, alors V est isomorphe à $L(\lambda)$.

Preuve. 1°) Soit $I = \mathrm{Ker}\left(U(b^+) \longrightarrow \mathrm{End}\, k_\lambda = k\right)$; on a $k_\lambda = U(b^+)/I$ comme $U(\underline{b}^+)$-module. (I est engendré comme idéal par n^+ et les $h - \lambda(h)1$, $h \in \underline{h}$). Le $\mathfrak{g}$-module $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(b^+)} \left(U(b^+)/I\right)$ s'identifie donc à $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})I$, l'élément v_λ s'identifiant alors à la classe de 1.

Soit $\phi : \begin{cases} U(\mathfrak{g})\, v_\lambda \longrightarrow U(\mathfrak{g})\, v \\ a\, v_\lambda \longmapsto a\, v \end{cases}$

Il nous faut montrer que ϕ est bien défini car il est clair qu'il sera surjectif. On doit vérifier que $U(\mathfrak{g})\, I \cdot v = 0$ dans V ce qui est trivial car $(h - \lambda(h)) \cdot v = n^+ \cdot v = 0$.

2) Posons $M(\lambda)^+ = \bigoplus_{\nu \neq \lambda} M(\lambda)^\nu$. Soit $F \subsetneq M(\lambda)$ un sous $\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$, ~~on Mon~~ ~~Promontrque~~ $F \subset M(\lambda)^+ \subsetneq M(\lambda)$. On a évidemment $M(\lambda)^+ \subsetneq M(\lambda)$. Puisque F est un h-module (par restriction et que l'action de $\underline{h}$ est semi-simple sur $M(\lambda)$, donc sur F (voir Algebra semisimplicité), on a : $F = \sum_{\nu \in \underline{h}^*} F \cap M(\lambda)^\nu$. Si $F \cap M(\lambda)^\lambda \neq (0)$, alors $v_\lambda \in F$ et $U(\mathfrak{g})\, v_\lambda = M(\lambda) \subset F$, contradiction.

Donc $F \subseteq M(\lambda)^+$. Soit K_λ la somme des sous $\mathfrak{g}$-modules propres de $M(\lambda)$, alors $K_\lambda \subseteq M(\lambda)^+$. Soit $L(\lambda) := M(\lambda)/K_\lambda$, alors $L(\lambda) = U(\mathfrak{g})\bar{v}$; si N est un sous module non trivial de $L(\lambda)$, alors $N + K_\lambda$ est un sous $\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$; par maximalité, $L(\lambda)$ est simple

2) Pour V il existe $\varphi : M(\lambda) \xrightarrow{\varphi} V$ et puisque $\operatorname{Ker}\varphi$ est
$v_\lambda \longmapsto v$ plus haut poids

un sous module de $M(\lambda)$, $\operatorname{Ker}\varphi \subset K_\lambda$. D'où $M(\lambda)/\operatorname{Ker}\varphi \simeq V$ est

simple et $K_\lambda = \operatorname{Ker}\varphi$, donc $V \simeq L(\lambda)$

NOTATION $M(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda)$ admettant un caractère central qui,

puisque $L(\lambda) = M(\lambda)/K_\lambda$ est le même. On le note χ_λ.

La classe de $v_\lambda = 1 \otimes 1$ dans $L(\lambda)$ est notée v_λ (ou $\bar{v}_\lambda$) et est appelée

le générateur canonique de $L(\lambda)$.

Exercice Montrer que si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\dim L(\lambda) < \infty$, alors

$\lambda \in P^+$

Plus généralement

Théorème (Dx 7.2.6) L'application $\lambda \longmapsto [L(\lambda)]$ établit

une bijection de $P^+(\mathfrak{g})$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de

$\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie

Théorème [Dix, 7.4.7] (Harish-Chandra). Soit $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Il y a équivalence entre

(i) $\chi_\lambda = \chi_\mu$

(ii) $\lambda \in W \cdot \mu = \{ w(\mu + \rho) - \rho, \ w \in W \}$ où

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{h})} \varpi_i$$

7.3 Formule des caractères de Weyl

Soit V un $\mathfrak{g}$-module, $\mathfrak{h}$ semi-simple, i.e. $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^\mu$.

Supposons de plus $\dim V^\mu < \infty$, $\forall \mu$. On définit le caractère de V par $ch(V) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\dim V^\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$

Notons que $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ est muni d'une action de W par $w e^\mu = e^{w\mu}$

Proposition. Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, alors $ch V$ est W-invariant, i.e. $w(ch V) = ch V$ $\forall w \in W$.

Preuve. Il suffit de montrer que si μ est un poids de V et $w \in W$ alors $w\mu$ est un poids de V de même multiplicité que μ.

V est somme directe de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. Donc par le corollaire ?, $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^\mu$. De plus, V est un $\mathfrak{sl}_2$-module de dimension finie via l'isomorphisme $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}H_\alpha \subset \mathfrak{g}$, $\alpha \in R$. Donc $\mu(H_\alpha)$ qui est valeur propre de H_α est dans $\mathbb{Z}$ pour tout μ dans V et α dans R. Donc $\mu \in P$.

Soit maintenant m_μ la multiplicité de μ dans V et $\alpha \in R$.

$n = \mu(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Soient $X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha$ les générateurs de $s\ell_2 \subset \mathfrak{g}$ associés. Soit $v \in V^\mu - \{0\}$

Si $n \geq 0$, alors $X_{-\alpha}^n v \neq 0$ d'après l'étude des $s\ell_2$-modules et $X_{-\alpha}^n v \in V_{\mu - n\alpha}$. Donc $X_{-\alpha}^n$ applique injectivement V_μ dans $V_{\mu - n\alpha}$.

Si $n \leq 0$ $(X_\alpha)^{-n}$ applique injectivement V_μ dans $V_{\mu - n\alpha}$.

Dans les deux cas on a prouvé que $s_\alpha \mu = \mu - n\alpha$ est un poids de V de multiplicité $\geq m_\mu$. Comme s_α est inversible, cela prouve la proposition. $\square$

(*) preuve au 48 bis

Déf : On note $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ formé des f vérifiant : $\left(f = \sum f^\lambda e^\lambda \right)$

$\mathrm{supp}\, f = \{ \lambda \;;\; f^\lambda \neq 0 \}$ est inclus dans une réunion finie de cônes $\nu - Q^+$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$.

On munit $\mathbb{Z} \langle \mathfrak{h}^* \rangle$ de la multiplication suivante :

$$\left(\sum c_\lambda e^\lambda \right) \left(\sum c'_\mu e^\mu \right) = \sum \left(\sum_{\lambda + \mu = \nu} c_\lambda c'_\mu \right) e^\nu$$

Les sommes $\sum_{\lambda+\mu=\nu} c_\lambda c'_\mu$ sont en effet des sommes finies d'après la condition sur les supports.

Remarque 1 Soit V un $\mathfrak{g}$-module admettant un caractère dans $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ alors tout sous-module V' et tout module quotient (est aussi fini i.e.) admettent un caractère dans $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ et $\mathrm{ch}\, V' + \mathrm{ch}\, V/V' = \mathrm{ch}\, V$.

Remarque 2 Les modules $M(\lambda)$ et $L(\lambda)$ admettent des caractères dans $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$.

Théorème : ([illegible]) L'application $\lambda \to [L(\lambda)]$ établit une bijection de P^{++} sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie.

Preuve. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie. Il est somme directe des composantes de poids et possède un plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Soit $\mathfrak{sl}_2 = kX_\alpha + kH_\alpha + kX_{-\alpha}$, $\alpha \in B$. V est un $(\mathfrak{sl}_2)$-module de plus haut poids $(\lambda, \alpha^\vee)$, donc $(\lambda, \alpha^\vee) \geq 0$ car V est de dimension finie. D'où $\lambda \in P^+$.

Inversement si $\lambda \in P^+$ montrons que $L(\lambda)$ est de dimension finie.

1er Pas : Soit v_λ le vecteur de plus haut poids, $\beta \in B$, alors

$$X_{-\beta}^m v_\lambda = 0 \quad \text{pour } m = (\lambda + \rho, \beta^\vee)$$

$X_{-\beta}^m v_\lambda$ est un vecteur primitif (car il est annulé par X_α, $\alpha \in B$). Effectivement, on montre que

$$[X_\alpha, X_{-\beta}] = \begin{cases} H_\beta & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \quad \text{car } \alpha - \beta \text{ n'est pas une racine de } \mathfrak{g}. \end{cases}$$

puis par récurrence

$$[X_\alpha, X_{-\beta}^n] = \begin{cases} n X_{-\beta}^{n-1} (H_\beta - n + 1) & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

En effet :

$$X_\beta X_{-\beta}^m v_\lambda = [X_\beta, X_{-\beta}^m] v_\lambda + X_{-\beta}^m X_\beta v_\lambda = m X_{-\beta}^{m-1} (H_\beta - m + 1) v_\lambda$$

$$= \left((\lambda, \beta^\vee) - (\lambda, \beta^\vee) - 1 + 1\right) v_\lambda = 0$$

et $X_\alpha X_{-\beta}^m v_\lambda = [X_\alpha, X_{-\beta}^m] v_\lambda + X_{-\beta}^m X_\alpha v_\lambda = 0$ pour $\alpha \neq \beta$

Donc $U(\mathfrak{g}) X_{-\beta}^m v_\lambda = U(\mathfrak{n}^-) X_{-\beta}^m v_\lambda$ est un sous $U(\mathfrak{g})$-module de $L(\lambda)$, dont les poids sont $< \lambda$. Par simplicité de $L(\lambda)$, ce module est nul.

D'où $X_{-\beta}^m v_\lambda = 0$

2ème Point : La somme V des $(\mathfrak{sl}_2)_p$-sous-modules de dimension finie de $L(\lambda)$ est un $\mathfrak{g}$-module, $p \in B$.

Soit V_1 un $(\mathfrak{sl}_2)_p$-module de dimension finie de $L(\lambda)$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{g} V_1 = \{\sum \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathfrak{g},\ v_i \in V_1\}$ est une $(\mathfrak{sl}_2)_p$-module somme de $(\mathfrak{sl}_2)_p$-sous-modules de dimension finie de $L(\lambda)$.

Or pour $e \in (\mathfrak{sl}_2)_p$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V_1$, $e(X \cdot v) = [e, X]\, v + X e v \in \mathfrak{g} V_1$. Ainsi $\mathfrak{g} V_1$ est donc un $(\mathfrak{sl}_2)_p$-module, de dimension finie d'où le résultat par ce qui précède.

3ème Point $V = L(\lambda)$

Effectivement, d'après le premier point, $k v_\lambda \oplus k X_{-p} v_\lambda \oplus \dots \oplus k X_{-p}^{m} v_\lambda$ est un $(\mathfrak{sl}_2)_p$-module de dimension finie. V est non nul et est un $\mathfrak{g}$-sous-module de $L(\lambda)$. Donc $V = L(\lambda)$

4ème Point Toute orbite du groupe de Weyl rencontre P^+

Soit $\mu = \sum c_i \alpha_i$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Comme W est fini, il existe $w \in W$ tel que $(w\mu, \rho)$ soit maximal. Or en effet $(w s_\alpha \mu, \rho) \leq (w\mu, \rho) = (w\mu, s_\alpha(\rho)) = (w\mu, \rho - \alpha) = (w\mu, \rho) - (w\mu, \alpha)$. Donc $(w\mu, \alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in B \Rightarrow w\mu \in P^+$

5ème Point : On conclut.

$L(\lambda)$ est somme directe de $(\mathfrak{sl}_2)_p$-modules de dimension finie. Comme dans la proposition 2.9, il vient que W agit sur l'ensemble des poids de $L(\lambda)$, donc $\Omega(L(\lambda)) = \Omega(L(\lambda)) \cap P^+$ est fini. Il y a donc un nombre fini d'orbites, donc un nombre fini de poids dans $L(\lambda)$. Comme chaque multiplicité $L(\lambda)^\mu$ est finie, $\dim L(\lambda) < \infty$. (C.Q.F.D) $\square$

Lemme A : Soit $\Delta = \prod_{\alpha\in R^+}(1-e^{-\alpha}) \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$. Alors

$$\operatorname{ch} M(\lambda) = \Delta^{-1} e^{\lambda}$$

Preuve $\dfrac{1}{1-e^{-\alpha}} = (1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+\dots) \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$. Donc,

$$\Delta^{-1} = \prod_{\alpha\in R^+}(1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+\dots) = \sum_{\gamma\in Q^+} P(\gamma)\, e^{-\gamma}, \text{ où}$$

$P(\gamma) = \#\{(n_\alpha)_{\alpha\in R^+} : \sum_{\alpha\in R^+} n_\alpha \alpha = \gamma\} = \dim U(\mathfrak{n}^-)^{-\gamma}$ par PBW

(rappelons que par PBW, $U(\mathfrak{n}^-) = \langle X_{-\alpha}^{n_\alpha}\rangle$)

Or $M(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-)\otimes_k k_\lambda$. D'où le lemme. $\square$

Lemme B Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et M un $\mathfrak{g}$-module tel que
(i) M admet le caractère central χ_λ
(ii) M admet un caractère dans $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$
Alors $\operatorname{ch} M$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\operatorname{ch} M(\mu)$, $\mu\in W\cdot\lambda$.

Preuve On suppose $M\neq 0$. Soit ν un élément maximal de Supp ch M, pour $\leq$. Posons $\dim M_\nu = m$. Il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme φ : $\bigoplus_{i=1}^{m} M(\nu) \xrightarrow{\varphi} M$. Le caractère central de $M(\nu)$ est donc χ_λ. (Si $v\in M(\nu)$, $\varphi(v)\neq 0$ alors $\forall z$, $\chi_\nu(z)\varphi(v) = z\varphi(v) = \chi_\lambda(z)\varphi(v)$. Donc $\chi_\nu = \chi_\lambda$).

Donc $\nu = w\cdot\lambda$

Soit $D_M = \{\mu\in W\cdot\lambda,\ \mu+Q^+ \text{ contient un poids de } M\}$.
D_M est non vide car $\nu\in D_M$.

On raisonne par récurrence sur $\# D_M$, qui est fini. Soit L et N (5)
le noyau et le conoyau de ϕ.

$$0 \to L \to \bigoplus M(\nu)^{n_\nu} \to M \to N \to 0$$

Et N admettant le caractère central χ_λ et l'homomorphisme $\left(\bigoplus M(\nu)\right)^{\cdot} \to M^{\cdot}$ induisant $D_N \subsetneq D_M$.

Soit $\mu \in D_L$, $\mu + Q_+$ est un poids de L, donc de $M(\nu)$, donc $\mu \in \nu + Q_+$. D'où $\mu \in D_M$ et $D_L \subsetneq D_M$. $(\nu \notin D_L)$

Or $\mathrm{ch}\, M = -\mathrm{ch}\, L + \sum \mathrm{ch}\, M(\nu) + \mathrm{ch}\, N$. On a le lemme par récurrence. □

Théorème de Weyl, $\quad \mathrm{ch}\, L(\lambda) = \dfrac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w\cdot\lambda}}{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})}$, où $\varepsilon(w)$

désigne le déterminant de w sur $\mathfrak{h}^*$.

Preuve : $L(\lambda)$ est de dimension finie et admet pour caractère central χ_λ. D'après les lemmes qui précèdent, $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $e^{w\cdot\lambda}$, $w \in W$. En exercice nous laissons le soin au lecteur de montrer que s_i établit une bijection de R^+ sur $R^+ - \{\alpha_i\} \cup \{-\alpha_i\}$. Il en résulte que pour l'action de W sur $\mathbb{Z}[\Lambda^*]$,

$$s_i(d) = (1 - e^{\alpha_i}) \prod_{\beta \in R^+ - \{\alpha_i\}} (1 - e^{-\beta}) \text{ ensuite } = -e^{-\alpha_i} d$$

On pose $d' = e^{\rho} d$. Il vient $s_i(d') = -d'$. Or $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ est W-invariant. Donc $w(d'\,\mathrm{ch}\, L(\lambda)) = \varepsilon(w)\, d'\,\mathrm{ch}\, L(\lambda)$, $w \in W$. ~~D'après le lemme qui précède~~ Comme $d'\,\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des $e^{w(\lambda+\rho)}$, il vient $d'\,\mathrm{ch}\, L(\lambda) = a \sum \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}$. Comme $\lambda \in P^+$, $\lambda + \rho$ est dans une chambre de Weyl, i.e. $W_{\lambda+\rho} = \{w \in W \mid w(\lambda+\rho) = \lambda+\rho\} = \mathrm{Id}$. En regardant le plus haut poids de la formule, il vient donc : $e^{\rho} \cdot 1 \cdot e^{\lambda} = a \cdot e^{\lambda+\rho}$ donc $a = 1$ et le théorème est montré. □

Remarque : la formule des caractères de Weyl a été prouvée par Hermann Weyl en utilisant l'intégration sur les groupes de Lie compacts. Cette preuve est due à Bernstein-Gelfand-Gelfand. Comme corollaire de ce théorème on montre :

$$\dim L(\lambda)^{\mu} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, P(w(\lambda+\delta) - (\mu+\delta)) \qquad (\text{Dix } 7\text{-}5\text{-}\ldots)$$

et plus subtilement

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda+\rho, \alpha^\vee) \Big/ \prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha^\vee) \qquad (\text{Hu}, 24.3)$$

~~Montrons cette dernière formule. On admet que pour w dans W, ρ − wρ est somme de racines positives distinctes, cf [ ]. Il en résulte~~ que $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho - \rho} = \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$ ~~sont égales. Effectivement~~ :

Il suffit de poser $\lambda = 0$ dans la formule de Weyl

~~$\sum \varepsilon(w) e^{w\rho}$ et $e^{\rho} \prod (1 - e^{-\alpha})$ sont W alternée, et ont leur poids dans $W\rho$ et ont pour plus grand terme e^{ρ}~~. On peut donc écrire la formule des caractères :

$$\boxed{\operatorname{Ch} L(\lambda) = \frac{A_{\lambda+\rho}}{A_\rho}} \quad \text{où} \quad A_\mu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\mu}$$

Considérons le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C} \\ e^{\lambda} & \longmapsto & 1 \end{array}$$

On a $\phi(\operatorname{Ch} L(\lambda)) = \dim L(\lambda)$. Or $\phi(A_\rho) = 0$ d'après ce qui précède et donc $\phi(A_{\lambda+\rho})$ aussi.

L'idée est donc de factoriser le morphisme ϕ de la manière suivante.

$$\begin{array}{rcccl} \phi : & \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] & \xrightarrow{\psi_\mu} & \mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & e^{\lambda} & \longmapsto & e^{(\lambda,\mu)t} & \longrightarrow 1 \end{array} \qquad \mu \in \mathfrak{h}^*$$

Le dernier morphisme étant le morphisme de spécialisation en 0.

Remarquons : $\psi_\mu(A_\lambda) = \psi_\mu\left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\lambda}\right) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{(w\lambda, \mu)t}$

$$= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{(\lambda, w\mu)t} = \psi_\lambda(A_\mu)$$

Donc $\Psi_\rho(A_\lambda) = \Psi_\lambda(A_\rho) = \prod_{\alpha\in R^+}\left(1 - e^{-(\lambda,\alpha)t}\right) e^{(\rho,}$

$= \prod_{\alpha\in R^+}(\lambda,\alpha)\; t^{\# R^+} +$ Termes supérieurs en t.

Maintenant,

$$\Psi_\rho(A_\rho)\,\Psi_\rho(\mathrm{Ch}\,L(\lambda)) = \Psi_\rho(A_{\lambda+\rho})$$

Les termes de plus bas degrés donnent

$$\prod_{\alpha\in R^+}(\rho,\alpha)\ \dim L(\lambda) = \prod_{\alpha\in R^+}(\lambda+\rho,\alpha)$$

D'où $\quad \dim L(\lambda) = \prod_{\alpha\in R^+}(\lambda+\rho,\alpha) \Big/ \prod_{\alpha\in R^+}(\rho,\lambda) = \prod_{\alpha\in R^+}(\lambda+\rho,\alpha^\vee) \Big/ \prod_{\alpha\in R^+}(\rho,\alpha$

Quelques sujets de conversations.

. La formule des caractères de Weyl donne : $\mathrm{ch}\,L(\lambda) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,\mathrm{ch}(M(w.\lambda))$

Ceci est réalisé par la résolution Bernstein - Gelfand - Gelfand

$$\to \cdots \to \bigoplus_{l(w)=k} M(w.\lambda) \cdots \longrightarrow \bigoplus M(\sigma_i.\lambda) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

En particulier pour sl_2 : $\quad 0 \to M(-n-2) \longrightarrow M(n) \longrightarrow L(n) \longrightarrow 0$

. La multiplicité de $L(w.\lambda)$ dans $M(\lambda)$ peut être calculée à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig. Ceci permet de comprendre $\mathrm{Ch}\,L(\lambda)$ pour tout λ.

. Le calcul de $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ est facile pour sl_2 ; $\lambda,\mu\in P^+$. On peut le représenter à l'aide d'un produit de graphes, chaque sommet d'un graphe représente un vecteur de poids de $L(\lambda)$ ou $L(\mu)$. On peut généraliser cette technique pour tout $\mathfrak{g}$ semi-simple en utilisant une Drinfel'd. $U(\mathfrak{g}) \overset{q=1}{\leftrightarrow} U_q(\mathfrak{g}) \overset{q=0}{\longrightarrow} U_0(\mathfrak{g})$. Les sommets du graphes correspondent à des éléments du quotient de $U_q(\mathfrak{g})$ à la « température » $q=0$. C'est la base cristalline de Kashiwara.