Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre

Problème de maison

Exercice 1. On veut classifier les groupes d'ordre 8 à isomorphisme près.

1. Donner les groupes abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près.
2. On suppose maintenant que G est un groupe non-abélien d'ordre 8.
   (a) Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre 4.
   (b) Soit $y \in G \setminus \langle x \rangle$. Montrer que en considérant l'ordre de y que y satisfait soit $y^2 = e$ ou $y^2 = x^2$.
      i. Dans le cas $y^2 = e$, montrer que G est isomorphe au groupe dièdral D_4.
      ii. Dans le cas $y^2 = x^2$, montrer que G est isomorphe à $\mathbb{H}_8$.
3. Conclure.

Exercice 2. Posons $G = PSL_2(\mathbb{F}_3)$.

1. Calculer l'ordre de G. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
2. Montrer qu'il y a un seul 2-Sylow S_2 de G et que S_2 est isomorphe au groupe de Klein V_4.

Exercice 3. Soit $\pi : SL_2(\mathbb{F}_3) \twoheadrightarrow PSL_2(\mathbb{F}_3)$ la projection canonique.

1. Montrer que $H := \pi^{-1}(S_2)$ est un 2-Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$.
2. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{F}_3)$ d'ordre 2 est une homothétie.
3. En déduire que $\pi|_H$ n'admet pas une section.
4. Déterminer la structure du groupe H.