**3.1. Remarque**

Nous verrons dans le théorème qui suit que lorsque l'on écrit les décompositions de Dunford de deux matrices, $A = D + N$ et $A' = D' + N'$, alors, $A$ est semblable à $A'$ implique que $D$ semblable à $D'$ et $N$ à $N'$.

Mais la réciproque est fausse comme le prouve le contre-exemple suivant. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables, car elles n'ont pas le même polynôme minimal $\big(\mu = X(X-1)^2$ pour la première, et $\mu' = X^2(X-1)$ pour la seconde$\big)$.

Il faut donc avoir des hypothèses un peu plus fines, non pas sur la décomposition de Dunford dans sa globalité, mais localement, c'est-à-dire pour chaque sous-espace caractéristique. Dans le théorème qui suit, on note $n_\omega$ l'endomorphisme induit par la composante nilpotente $n$ de l'endomorphisme $u$ au sous-espace caractéristique associé à la valeur propre $\omega$.

**3.2. Théorème.** *Soit $u = d + n$ et $u' = d' + n'$ les décompositions de Dunford de deux endomorphismes complexes de même polynôme caractéristique $\chi$.*

*Si $u$ est semblable à $u'$, alors, pour toute valeur propre $\omega$ de $u$ (donc de $u'$), le tableau de Young $Y(n_\omega)$ est égal au tableau de Young $Y(n'_\omega)$. En particulier, on a bien que $d$ est semblable à $d'$ et $n$ est semblable à $n'$.*

*Réciproquement, si pour toute racine $\omega$ de $\chi$, $Y(n_\omega) = Y(n'_\omega)$, alors, $u$ est semblable à $u'$.*

*Démonstration.*

On décompose $\chi$ en $\chi = \prod_\omega (X - \omega)^{k_\omega}$.

Supposons les endomorphismes $u$ et $u'$ semblables, et soit $g$ inversible tel que $u' = gug^{-1}$. Il vient $d' + n' = gdg^{-1} + gng^{-1}$. On vérifie que le membre de droite est également une décomposition de Dunford (une diagonalisable plus une nilpotente qui commutent). L'unicité de la décomposition de Dunford implique que $d$ et $d'$ sont semblables ainsi que $n$ et $n'$.

L'implication voulue est un raffinement de ce résultat. Soit $\omega$, avec la multiplicité $k_\omega$, dans le spectre de $u$ (et donc de celui de $u'$). Alors, par le principe de conjugaison, voir principe I-A.1.26, l'automorphisme $g$ envoie le sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(u - \omega \operatorname{Id})^{k_\omega}$ de $u$ sur le sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(u' - \omega \operatorname{Id}_n)^{k_\omega}$. L'endomorphisme $u_\omega$ induit par $u$ à $\operatorname{Ker}(u - \omega \operatorname{Id})^{k_\omega}$ et l'endomorphisme $u'_\omega$ induit par $u'$ à $\operatorname{Ker}(u' - \omega \operatorname{Id})^{k_\omega}$ donnent alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(u-\omega\,\mathrm{Id})^{k_\omega} \arrow[r, "u_\omega"] \arrow[d, "g"'] & \operatorname{Ker}(u-\omega\,\mathrm{Id})^{k_\omega} \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Ker}(u'-\omega\,\mathrm{Id})^{k_\omega} \arrow[r, "u'_\omega"] & \operatorname{Ker}(u'-\omega\,\mathrm{Id})^{k_\omega}
\end{tikzcd}$$

On a donc $u'_\omega = g u_\omega g^{-1}$ et comme, par construction de la décomposition de Dunford, voir théorème III-A.3, $u_\omega = \omega\mathrm{Id}+n_\omega$, $u'_\omega = \omega\mathrm{Id}+n'_\omega$ sont les décompositions de Dunford respectives de $u_\omega$ et de $u'_\omega$, il vient donc $n'_\omega = g n_\omega g^{-1}$, et donc, $n'_\omega$ et $n_\omega$ ont même dimensions de noyaux emboîtés. Cela prouve l'implication.

Passons à la réciproque. Soit $\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_t$ le nombre de cases des colonnes du tableau de Young $Y(n_\omega)$. Alors, il existe une base de $\operatorname{Ker}(u-\omega\,\mathrm{Id})^{n_\omega}$ dans laquelle $n_\omega$ s'écrit matriciellement $\operatorname{diag}(J_{\nu_1}, \dots, J_{\nu_t})$, et donc $u_\omega$ s'écrit matriciellement $\omega \mathrm{I}_{k_\omega} + \operatorname{diag}(J_{\nu_1}, \dots, J_{\nu_t})$. Il en est de même pour $u'_\omega$, puisque $u_\omega$ et $u'_\omega$ ont même tableau de Young associé. Comme cela est vrai pour toute valeur propre $\omega$, $u$ et $u'$ ont des matrices communes dans des bases différentes. Ainsi, $u$ et $u'$ sont semblables. □

**3.3. Exemple.** Dans la remarque III-3.1, les matrices ne sont pas semblables, car pour la première on a

$$T(Y_0) = \begin{array}{|c|c|}\hline \phantom{x} & \phantom{x} \\ \hline \end{array}, \quad T(Y_1) = \begin{array}{|c|}\hline \phantom{x} \\ \hline \phantom{x} \\ \hline \end{array},$$

et pour la seconde

$$T(Y_0) = \begin{array}{|c|}\hline \phantom{x} \\ \hline \phantom{x} \\ \hline \end{array}, \quad T(Y_1) = \begin{array}{|c|c|}\hline \phantom{x} & \phantom{x} \\ \hline \end{array}.$$

**3.4. Exercice (Stabilisateurs pour la conjugaison)**

*Soit $A$ la matrice de l'endomorphisme $u$ dans une base fixée. Montrer qu'avec les hypothèses du théorème, le stabilisateur de $A$ pour l'action de conjugaison de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *(donc, le commutant de $A$, en fait) est isomorphe au produit direct $\prod_{\omega\in \operatorname{Spec}(u)} G_{Y(n_\omega)}$, où $G_{Y(n_\omega)}$ est le stabilisateur de $n_\omega$ décrit dans la proposition* III-2.8.3.

Comme les projecteurs spectraux sont polynomiaux en $u$, on obtient qu'un élément du stabilisateur laisse fixe les sous-espaces caractéristiques. Il reste à stabiliser, pour la conjugaison, $\omega \mathrm{I} + n_\omega$, et ce, pour tout $\omega$. Mais cela équivaut à stabiliser $n_\omega$. On utilise alors la proposition III-2.8.3. Enfin, le produit est direct car les matrices de $G_{Y(n_\omega)}$ sont des matrices diagonales par blocs pour des blocs distincts.

◇