Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

27 MAI 2014

Durée : 3h

There is only one thing we say to Death: "Not today!"

Game of Thrones, 2011.

Probleme 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathbf{Gr}(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V, muni de l'action naturelle de $\mathrm{GL}(V)$:

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathbf{Gr}(V) \to \mathbf{Gr}(V), \quad (g, W) \mapsto g(W).$$

Le but de cet exercice est de déterminer le cardinal de l'ensemble

$$X = \{u \in \mathrm{End}(V) \mid u^2 = \mathrm{id}\}.$$

On va distinguer deux cas : $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$.

A. *Préliminaires*

1. Montrer que X est stable pour l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}(V)$.
2. En comptant le nombre de bases de V, expliciter le cardinal $\gamma_n(q)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en fonction de n et de q.
3. Avec la même méthode, comptez le nombre de parties libres à m éléments de V, $m \leq n$. Puis, montrer que le nombre de matrices de taille (n, m) de rang m, est égal à $\frac{\gamma_n(q)}{q^{m(n-m)}\gamma_{n-m}(q)}$.

B. *Cas où $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.*

1. Montrer qu'un endomorphisme u est dans X si et seulement s'il est diagonalisable de spectre inclus dans $\{1, -1\}$.
2. Démontrer que l'application

$$X \to \mathbf{Gr}(V) \times \mathbf{Gr}(V), \quad u \mapsto (\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}), \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}))$$

   établit une bijection entre X et le sous-ensemble Y de $\mathbf{Gr}(V) \times \mathbf{Gr}(V)$ formés des couples de sous-espaces supplémentaires.
3. On considère l'action diagonale de $\mathrm{GL}(V)$ sur Y, par $g.(W, W') = \big(g(W), g(W')\big)$. Montrer que l'on obtient $n+1$ orbites et les décrire.
4. Démontrer l'identité

$$|X| = \sum_{d=0}^{n} \frac{\gamma_n(q)}{\gamma_d(q)\gamma_{n-d}(q)}.$$

C. *Cas où $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2.*

1. Montrer que u est dans X si et seulement s'il est de la forme $u = \mathrm{Id} + \nu$, avec $\nu^2 = 0$.

   On introduit l'application

$$\pi : X \to \mathbf{Gr}(V), \quad u \mapsto \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$$

2. On fixe $W \in \mathbf{Gr}(V)$ de dimension d et une base de V qui prolonge une base de W. Montrer que, si $u \in X$ tel que $W = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$, alors la matrice de ν associée à u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 0_d & A \\ 0 & 0_{n-d} \end{pmatrix}$, où A est une matrice de taille $(d, n-d)$ de rang $n - d$.

3. Déduire que $\pi^{-1}(W)$ est non vide si et seulement si $n - d \leq d$ et que dans ce cas,

$$|\pi^{-1}(W)| = \frac{\gamma_d(q)}{q^{(n-d)(2d-n)}\gamma_{2d-n}(q)}$$

4. Démontrer l'identité

$$|X| = \sum_{\frac{n}{2} \leqslant d \leqslant n} \frac{\gamma_n(q)}{q^{(n-d)(3d-n)}\gamma_{n-d}(q)\gamma_{2d-n}(q)}.$$

Problème 2

Le but de l'exercice est de montrer que le groupe $\mathrm{SO}(2n+1) \subset \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})$, formé des matrices orthogonales réelles de déterminant 1, ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. Soit donc H un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(2n+1)$ et $h \in H$, $h \neq \mathrm{Id}$. Le but est de montrer que $H = \mathrm{SO}(2n+1)$. On munit l'espace $\mathbb{R}^{2n+1}$ de sa structure canonique d'espace euclidien et on note $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ sa base orthonormée canonique.

A. *Préliminaires*

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de h alors $\overline{\lambda}$ l'est également. En déduire que 1 est valeur propre de h.

   On pourra utiliser, sans preuve, que les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont des complexes de module 1.

   Dans la suite, on notera k la dimension du sous-espace propre E_1 associé. On note que $0 < k < 2n+1$, puisque h n'est pas l'identité.

2. Soit $(f_1, \cdots, f_k, \cdots, f_{2n+1})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $(f_1, \cdots, f_k)$ soit une base de E_1. Montrer que pour toute partie I à k éléments de $[1, 2n+1]$, il existe ρ_I dans $\mathrm{O}(2n+1)$ qui envoie $(f_1, \cdots, f_k)$ sur $(e_i)_{i \in I}$. Puis, montrer que l'on peut trouver ρ_I dans $\mathrm{SO}(2n+1)$, ce que l'on supposera par la suite.

B. *Différentielles*

Pour toute partie I à k éléments, on pose $h_I = \rho_I \circ h \circ \rho_I^{-1} \in H$. Soit $\phi_I : \mathrm{SO}(2n+1) \to \mathrm{SO}(2n+1)$ telle que $\phi_I(g) = g h_I g^{-1} h_I^{-1}$.

1. Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2n+1)$ de $\mathrm{SO}(2n+1)$ est l'espace des matrices anti-symétriques.

2. Montrer que ϕ_I est à valeurs dans H, qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle en l'identité.

3. Soit $\phi := \prod_I \phi_I$ (on aura fixé un ordre sur l'ensemble des parties à k éléments de $[1, 2n+1]$). Montrer que la différentielle en l'identité de ϕ est donnée par

$$\mathrm{d}_e\phi(A) = \binom{2n+1}{k} A - \sum_I h_I A h_I^{-1},$$

   pour tout A dans $\mathfrak{so}_{2n+1}$.

C. *Noyau de la différentielle*

Soit A une matrice de $\ker \mathrm{d}_e\phi$. On note q la forme quadratique sur $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ définie par $q(M) = \mathrm{tr}({}^tMM)$.

1. Montrer que q est une forme définie positive.
2. Montrer que $q(h_I A h_I^{-1}) = q(A)$, puis en déduire

$$\frac{1}{K}\sum_I q(h_I A h_I^{-1}) = q(A) = q\big(\frac{1}{K}\sum_I h_I A h_I^{-1}\big), \text{ où } K = \binom{2n+1}{k}$$

3. Pour m quelconque, montrer que si A_i, $1 \leq i \leq m$, est une famille de matrices de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, alors

$$m\big(q(A_1) + \cdots + q(A_m)\big) - q(A_1 + \cdots + A_m) = \sum_{1\leq i<j\leq m} q(A_i - A_j).$$

   En déduire que $h_I A h_I^{-1} = A$ pour tout I.
4. Montrer que A stabilise $\rho_I(E_1)$ pour tout I, puis, que A stabilise $\mathbb{R}e_i$ pour tout i.
5. En utilisant B.1, montrer que $A = 0$.

D. *Conclusion*

1. Déduire de ce qui précède que H contient un ouvert de $\mathrm{SO}(2n+1)$.
2. Conclure que $H = \mathrm{SO}(2n+1)$.