Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

2 Juin 2016

Durée : 3h

Exercice préliminaire.

Soit q une forme quadratique sur un espace E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On suppose que E se décompose en somme directe de deux sous-espaces *q-orthogonaux* $E = F \oplus F'$, et que la signature de q restreinte à F, resp. F', est (r, s), resp. (r', s'). Montrer que la signature de q est $(r + r', s + s')$.

Problème 1. *Signature de la forme trace*

1. Montrer que la forme $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné pour toute norme sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $q : A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ définit une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner explicitement sa forme polaire.
4. On étudie la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques, puis au sous-espace des matrices antisymétriques. Montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour la forme quadratique.
5. Montrer, en utilisant l'exercice préliminaire, que la signature de cette forme quadratique est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
6. En déduire que la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est non dégénérée.

Problème 2. *Application de la décomposition polaire*

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in U(n)$ telles que $A = UBU^*$. On veut montrer que A et B sont $\mathrm{O}(n)$-semblables.

1. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X + iY = U$. Montrer, en considérant le polynôme P tel que $P(t) = \det(X + tY)$, qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $X + \eta Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $Q := X + \eta Y$.
2. Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$. En déduire que $A = QBQ^{-1}$.
3. Montrer que ${}^tA = U\,{}^tBU^{-1}$, puis, en déduire ${}^tA = Q\,{}^tBQ^{-1}$.
4. Déduire de ce qui précède que B commute avec ${}^tQQ$.
5. Soit $Q = VR$ la décomposition polaire de Q, avec $V \in \mathrm{O}(n)$ et $R \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que B commute avec R. En déduire que A et B sont $\mathrm{O}(n)$-semblables.

Problème 3. *Nombre de matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

On désigne par $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit n et k deux entiers positifs. On fixe k entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

1. Soit $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des k-uplets $(E_1, \cdots, E_k)$ de sous-espaces de $\mathbb{F}_q^n$, tels que

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_k = \mathbb{F}_q^n, \quad \dim E_i = n_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

   Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ agit naturellement de façon transitive sur $\mathcal{E}_k$.

2. En déduire que le cardinal de $\mathcal{E}_k$ est égal à

$$|\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| \Big/ \prod_{i=1}^{k} |\,\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|.$$

3. En déduire que le nombre de matrices diagonalisables[1] de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est:

$$\sum_{n_1+\cdots+n_q=n, n_i \geq 0} \frac{|\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\,\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}.$$

   On construira une bijection en assignant à la matrice diagonalisable A la famille de sous-espaces $(E_\zeta)_{\zeta \in \mathbb{F}_q}$, où E_ζ est le sous-espace propre de A pour la valeur propre $\zeta \in \mathbb{F}_q$.

Problème 4. *Isomorphisme exceptionnel* $\mathrm{PSU}(1,1) \simeq \mathrm{SO}_0(2,1)$

Le but de l'exercice est de montrer l'isomorphisme exceptionnel entre $\mathrm{PSU}(1,1)$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$. On rappelle que A^* désigne la transposée de la conjuguée de la matrice A.

A. On note

$$\mathrm{U}(1,1) := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ AJA^* = J\} \text{ et } \mathrm{SU}(1,1) := U(1,1) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{U}(1,1)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \lambda\bar{b} \\ b & \lambda\bar{a} \end{pmatrix},$$

   où λ est un complexe de module 1 et a et b deux complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

2. Montrer, en utilisant le théorème de submersion, que

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1\}$$

   est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. En déduire que $\mathrm{SU}(1,1)$ est une sous-variété de dimension 3.

3. On note

$$\mathfrak{u}(1,1) := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ MJ + JM^* = 0\}.$$

   Montrer que $\mathfrak{u}(1,1)$ est un sous-espace réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que si $A \in \mathrm{U}(1,1)$, $M \in \mathfrak{u}(1,1)$, alors $AMA^{-1} \in \mathfrak{u}(1,1)$.

[1] On entend bien sûr diagonalisable dans $\mathbb{F}_q$, c'est-à-dire semblable, sur $\mathbb{F}_q$, à une matrice diagonale.

4. Soit $\mathfrak{su}(1,1)$ le sous-espace des matrices de $\mathfrak{u}(1,1)$ de trace nulle. Montrer que $\mathfrak{su}(1,1)$ est de dimension 3.

5. En faisant agir $\mathrm{SU}(1,1)$ par conjugaison $\mathfrak{su}(1,1)$, construire un isomorphisme exceptionnel $\mathrm{PSU}(1,1) \simeq \mathrm{SO}_0(2,1)$, où $\mathrm{PSU}(1,1)$ est le quotient de $\mathrm{SU}(1,1)$ par le sous-groupe distingué des homothéties de $\mathrm{SU}(1,1)$, et où $\mathrm{SO}_0(2,1)$ est la composante connexe de l'identité dans le groupe $\mathrm{O}(2,1)$.

   Donner les étapes de la démonstration en admettant que $\mathrm{SU}(1,1)$ *est connexe.*