Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

6 Juin 2017

Durée : 3h

Exercice 1. *Connexité de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$

On propose ici une preuve de la connexité du sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, constitué des matrices inversibles à déterminant positif, à l'aide de la décomposition polaire.

1. Montrer, à l'aide de la décomposition polaire, que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est homéomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ \simeq \mathrm{SO}_n \times \mathcal{S}_n^{++}$, où SO_n désigne le groupe spécial orthogonal et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. Expliquez pourquoi SO_n et $\mathcal{S}_n^{++}$ sont connexes (donnez juste les étapes), puis conclure.

Problème 1. *Automorphisme extérieur de* $\mathfrak{S}_6$

Le but du problème est de se faire plaisir avec un automorphisme extérieur (très exotique dans l'univers des groupes symétriques) de $\mathfrak{S}_6$.

1. (Question de cours) Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ des droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$ est transitive, et que son noyau est le sous-groupe des homothéties de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

2. (Question de cours) Donner (avec preuve à l'appui) le cardinal de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$.

3. En déduire un morphisme injectif de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ dans $\mathfrak{S}_6$, dont on notera H l'image. Dire pourquoi H ne stabilise aucune droite de $\mathbb{F}_5^2$, ou si l'on préfère, aucun élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.

4. Quel est l'indice de H dans $\mathfrak{S}_6$?

5. En faisant agir à gauche $\mathfrak{S}_6$ sur l'ensemble des classes $X := \mathfrak{S}_6/H$, fournir un morphisme ϕ de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathfrak{S}(X)$.

6. Montrer que ϕ est injectif, et en déduire qu'il est surjectif.

   On pourra rappeler sans preuve la liste des sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.

7. Déduire de ϕ un automorphisme $\tilde{\phi}$ de $\mathfrak{S}_6$.

8. Montrer qu'un automorphisme intérieur, *i.e.* de la forme $g \mapsto kgk^{-1}$, envoie le fixateur de x dans X dans le fixateur de $k \cdot x$ et en déduire que $\tilde{\phi}$ n'est pas intérieur.

Problème 2. *L'image de l'exponentielle*

Le but du problème est d'étudier la surjectivité de l'exponentielle dans divers contextes.

A. *Surjectivité de l'exponentielle complexe*

On veut montrer dans un premier temps que l'exponentielle, vue comme application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, est surjective. On part donc d'une matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et on veut montrer que A se trouve dans l'image de l'exponentielle. On note $\mathbb{C}[A]$ l'espace des polynômes en A et $\mathbb{C}[A]^*$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathbb{C}[A]$.

1. Montrer que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, puis que ce sous-groupe est connexe par arcs.

   On pourra utiliser sans preuve le fait que $\mathbb{C}$, privé d'un ensemble fini de points, est connexe par arcs.

2. Montrer que l'image par l'exponentielle d'un polynôme en A est encore un polynôme en A.

3. Montrer que l'exponentielle définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ vers $(\mathbb{C}[A]^*, \cdot)$.

4. Montrer, à l'aide du théorème d'inversion locale, que $\exp\big(\mathbb{C}[A]\big) = \mathbb{C}[A]^*$.

5. En déduire que l'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et, à la volée, que pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme R dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $\exp\big(R(A)\big) = A$.

B. *Image de l'exponentielle réelle*

On va montrer que, si T est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $T = \exp(S)$ pour une matrice réelle S si et seulement si $T = R^2$, pour une matrice réelle R.

1. Montrer que si $T = \exp(S)$, avec S réelle, alors T est le carré d'une matrice réelle que l'on explicitera en fonction de S.

2. Réciproquement, soit T une matrice réelle, R une matrice réelle telle que $T = R^2$, et P un polynôme, *a priori* complexe, tel que $R = \exp\big(P(R)\big)$, qui existe par A-5). En écrivant $T = R\overline{R}$, montrer que $T = \exp\big((P + \overline{P})(R)\big)$, et conclure la réciproque.

3. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que T n'est pas dans l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'exponentielle.

C. *Image de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle*

On veut montrer que l'exponentielle définit une application surjective de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vers l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})^*$ des matrices diagonalisables inversibles.

1. Montrer que si A est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(A)$ est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})^*$.

2. On suppose que N est une matrice nilpotente telle que $\exp(N) = \mathrm{I}_n$. On veut montrer que N est nulle. On suppose, par l'absurde que l'indice de nilpotence m de N vérifie $m > 1$.

   (a) On pose $B := \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{(k+1)!} N^k$. Montrer que B est inversible et que $NB = 0$.

   (b) Conclure que N est nulle.

3. On suppose ici $A = D + N$ la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est

$$\exp(A) = \exp(D) + N', \text{ où } N' = \exp(D)\big(\exp(N) - \mathrm{I}_n\big).$$

4. Montrer alors que si exp(A est diagonalisable, alors A est diagonalisable, et en déduire la surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})^*$.

5. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $\exp A = \mathrm{I}_n$.