Algèbre, Master 1 **8 janvier 2018**
2017–2018

Examen d'Algèbre

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Problème 1 1. Classifier à isomorphisme près les groupes d'ordre $2018 = 2 \cdot 1009$.
On pourra admettre que 1009 *est un nombre premier.*

2. Pour chaque groupe G d'ordre 2018 trouver le nombre et classifier à isomorphisme près les représentations irréductibles de G.
On pourra utiliser sans preuve, pour le cas non abélien, la classification donnée dans le cours.

Problème 2 Soit q une puissance d'un nombre premier p et soit K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que le polynôme $X^q - X$ n'a que des racines simples dans K.
2. Montrer que l'ensemble des racines dans K, différentes de zéro, du polynôme $X^q - X$ constitue un groupe cyclique pour la multiplication.
On pourra tout d'abord énoncer le théorème de structure des groupes abéliens finis.
3. Pour chaque entier positif n, on désigne par K_n le corps de décomposition de $X^{q^n} - X$ sur K. Déduire que $K_n = K[\alpha]$, où $\alpha \in K_n$.
4. On note m le degré $[K_n : K]$ de K_n sur K.
   (a) Montrer que le polynôme minimal de α sur K est à coefficients dans $\mathbb{F}_{q^n} \cap K$ pour un α bien choisi.
   (b) En déduire que le degré $[\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_{q^n} \cap K]$ est égal à m.
   (c) On suppose que K contient le corps $\mathbb{F}_q$.
      (i) Montrer que m divise n.
      (ii) (bonus) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des diviseurs (positifs) de m et l'ensemble des sous-corps K' de K_n qui contiennent K.
      On pourra établir une bijection entre les sous corps K' et les sous corps de $\mathbb{F}_{q^n}$ qui contiennent $\mathbb{F}_{q^n} \cap K$.

Problème 3 (Représentation par permutation de $\mathfrak{S}_5$ sur ses 5-Sylow)

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X non singleton. On construit l'action linéaire par permutation de G sur $\mathbb{C}^X := \langle e_x,\, x \in X\rangle$ définie par $\rho_{\text{perm}}(g)(e_x) := e_{g\cdot x}$.
   (a) On note χ_{triv} le caractère de la représentation triviale, et $\langle\ ,\ \rangle$ la forme invariante sur les caractères de G. Montrer, en utilisant la formule de Burnside, que $\langle \chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{perm}}\rangle$ est égal au nombre d'orbites de G sur X.

(b) Montrer que la droite engendrée par $\sum_{x\in X} e_x$ est une sous-représentation de cette représentation par permutation.

(c) Soit W un supplémentaire de cette droite, stable par G. Dites rapidement pourquoi ce supplémentaire existe. Deux représentations supplémentaires sont-elles toujours isomorphes ? Justifiez votre réponse.

2. Montrer que $\mathfrak{S}_5$ possède six 5-Sylow. On considère l'action par conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_5$ sur l'ensemble X de ses 5-Sylow. Expliquez pourquoi l'action restreinte à $\mathfrak{A}_5$ reste transitive.

3. On considère le morphisme ϕ de $\mathfrak{S}_5$ dans $\mathfrak{S}_6$ déduit de l'action de $\mathfrak{S}_5$ sur X. Montrer, en énumérant, sans preuve, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$ que ϕ est injectif. Montrer ensuite que l'image par ϕ d'un 5-cycle, resp. d'une double transposition, est un 5-cycle, resp. une double transposition.

4. (a) Montrer, par un argument de cardinalité, que le normalisateur d'un 5-Sylow dans $\mathfrak{S}_5$ ne peut pas contenir un 3-cycle.

   (b) En déduire que l'image par ϕ d'un 3-cycle est un double 3-cycle.

5. (Application) Calculer la norme du caractère de la représentation W de $\mathfrak{A}_5$. Puis, montrer que $\mathfrak{A}_5$ agit de façon doublement transitive sur ses 5-Sylow.