Algèbre, Master 1 **8 janvier 2019**
2018–2019

Examen d'Algèbre

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Problème 1 Trouver le nombre de représentations irréductibles, à isomorphisme près, du groupe G dans chacun des cas : (a) $G = \mathcal{S}_3$, (b) $G = \mathcal{S}_5$ et (c) $G = \mathcal{S}_5 \times \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Problème 2 Soit $\mathbb{F}_{p^n}$ un corps de p^n éléments où p est un nombre premier et $n \geq 1$, un entier naturel. On se propose de démontrer que le polynôme $X^4 + 1 \in \mathbb{F}_{p^n}[X]$ est toujours réductible.

1. Montrer le résultat pour $p = 2$. On supposera dans la suite p impair.
2. Montrer que si a et b sont deux entiers strictement positifs tels que b divise a, alors $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ possède au moins un élément d'ordre b.
3. Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{p^2}^*$ contient au moins un élément d'ordre 8, puis, déduire que le polynôme $X^4 + 1$ possède une racine α dans $\mathbb{F}_{p^2}$.
4. Montrer que $X^4 + 1$ est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout p. (Indication : Quel est le degré du polynôme annulateur minimal de α sur $\mathbb{F}_p$?)
5. Conclure.

Problème 3 1. Classifier à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre 8.

*Désormais on désigne par G un groupe **non-abélien** d'ordre 8.*

2. Montrer que le centre $Z(G)$ du groupe G est non trivial.
3. Montrer que le groupe quotient $G/Z(G)$ n'est pas cyclique.
4. En déduire que $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 4. (Indication : Que se passerait-il si tous les éléments non triviaux étaient d'ordre 2 ?)
6. Soit $g \in G$ un élément d'ordre 4 et soit $h \in G \setminus \langle g \rangle$.
   (a) Montrer que si $\mathrm{ord}(h) = 2$ alors G est isomorphe au groupe diédral D_4.
   (b) Soit $\mathrm{ord}(h) = 4$.
      (i) Montrer que G contient un seul élément d'ordre 2.
      (ii) Montrer que G est isomorphe au groupe de quaternions H_8.
      Rappelons que $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ où $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$.
7. Classifier à isomorphisme près les groupes non-abéliens d'ordre 8.

Problème 4 Soit G un groupe fini, ϕ et ψ deux caractères de G.

1. (*Question de cours*) Montrer que le produit $\phi\psi$ est un caractère de G.
2. (*Question de cours*) Montrer que la fonction $\overline{\psi}$ définie par $\overline{\psi}(g) = \overline{\psi(g)}$ est un caractère et que ψ est irréductible si et seulement si $\overline{\psi}$ est irréductible.
3. Montrer que si ψ est de degré 1, $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.
4. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\overline{\psi}$ n'est pas irréductible. (Indication : On pourrait comparer $(\psi\overline{\psi}, 1)$ et (ψ, ψ).)
5. Soit ϕ irréductible de degré d. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de G de degré d. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1, et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors on a $\phi(g) = 0$. (Indication : Utiliser $1 - 3$.)