Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche
Groupes Classiques et Géométrie

Examen, 1ère session

28 Mai 2013

Durée : 3 heures

Rédiger avec honnêteté intellectuelle permet non seulement de trouver le droit chemin vers le résultat attendu mais aussi de jouer sur la corde sensible du correcteur. Inversement, toute tentative de persuasion frauduleuse, allant du bluff à la mythomanie, en passant par l'imposture, sera sanctionné avec la sévérité qu'il se doit.

Exercice 1

Attention aux mirages numériques en caractéristique 2.

1. Soit $\mathbf{K}$ un corps fini à q éléments. On note $u_n(q)$ le nombre de racines n-ième de l'unité dans $\mathbf{K}$.
   (a) Calculer l'ordre du groupe $\mathrm{PSL}(n, \mathbf{K})$ en fonction de q et $u_n(q)$.
   (b) Montrer que $u_3(4) = 3$ et donner la valeur de $u_{2^k}(2)$.
   (c) Vérifier que les groupes $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)$ ont le même ordre.
   On ne demande pas particulièrement de calculer cet ordre. Une décomposition en facteurs premier suffira.
2. Si $\mathbf{K}$ est de caractéristique 2, démontrer que tout élément d'ordre 2 dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ est de la forme $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$, où N est une matrice nilpotente d'indice 2.
3. Démontrer que, dans le groupe
$$\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2) = \mathrm{SL}(4, \mathbf{F}_2) = \mathrm{GL}(4, \mathbf{F}_2),$$
les éléments d'ordre 2 se répartissent en deux classes de conjugaison distinctes, dont on donnera des représentants sous forme de Jordan.
4. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ un élément d'ordre 2.
   (i) Démontrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_4)$ telle que
$$\mathrm{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (ii) Démontrer que l'on peut choisir P dans $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$.
5. Démontrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ est l'image d'un élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$.
   On pourra utiliser le fait que tout élément de $\mathbf{F}_4$ est un carré à l'aide l'automorphisme de Frobenius.
6. *Déduire de ce qui précède que les groupes* $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ *et* $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)$ *ne sont pas isomorphes.*

Exercice 2

On se propose d'établir un analogue du théorème de décomposition polaire pour le groupe orthogonal complexe
$$\mathrm{O}(n,\mathbf{C}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\}$$
et d'en tirer quelques conséquences.

Nous utiliserons les notations standard suivantes :
$$\mathrm{U}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\}, \qquad \mathrm{O}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\},$$
$$\mathcal{H}_n = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{A}^* = \mathrm{A}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n^{++} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{H}_n \mid \forall \mathrm{X} \in \mathbf{C}^n - \{0\}, \quad \mathrm{X}^*\mathrm{A}\mathrm{X} > 0\},$$
où l'on a posé $\mathrm{A}^* = {}^t\overline{\mathrm{A}}$ pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{C})$.

On rappelle que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_n^{++}$.

1. Démontrer que $\mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \cap \mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(n)$.
2. Vérifier que $\mathrm{U}(n)$ et $\mathcal{H}_n^{++}$ sont stabilisés par les anti-involutions $\mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$.
3. Considérons une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et écrivons sa décomposition polaire hermitienne :
$$\mathrm{A} = \mathrm{V}\mathrm{R}, \quad \text{où } \mathrm{V} \in \mathrm{U}(n) \text{ et } \mathrm{R} \in \mathcal{H}_n^{++}.$$
Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C})$
(ii) $\mathrm{V} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C})$ et $\mathrm{R} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C})$.
4. Soit $\mathcal{A}_n = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t\mathrm{X} + \mathrm{X} = 0\}$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour toute matrice $\mathrm{R} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$:
(i) $\mathrm{R} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \cap \mathcal{H}_n^{++}$
(ii) $\mathrm{R} = \exp(i\mathrm{T})$, avec $\mathrm{T} \in \mathcal{A}_n$.
5. Démontrer que l'application
$$\mathrm{O}(n) \times \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathrm{O}(n,\mathbf{C}), \quad (\mathrm{V},\mathrm{T}) \longmapsto \mathrm{V}\exp(\mathrm{iT})$$
est un homéomorphisme.
6. Le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$ est-il compact ?
7. Décrire les composantes connexes de $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'exhiber un isomorphisme *exceptionnel* entre $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})/\{\pm\mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbf{C})$.

On note $\mathcal{A}_4$ le sous-espace $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ formé des matrices antisymétriques
$$A(a,b,c,d,e,f) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbf{C}.$$

On introduit le pfaffien d'une telle matrice antisymétrique. Le pfaffien est l'application
$$\mathrm{Pf} : \mathcal{A}_4 \to \mathbf{C}, \ A(a,b,c,d,e,f) \mapsto af - be + cd.$$

1) Montrer que le pfaffien est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathcal{A}_4$. Montrer par un calcul direct l'égalité valable pour tout A de $\mathcal{A}_4(\mathbf{C})$:
$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A).$$

2) On suppose ici que A est une matrice antisymétrique inversible. Montrer que l'application

$$\kappa \,:\, \mathrm{SL}_4(\mathbf{C}) \to \{\pm 1\},\ P \mapsto \frac{\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP)}{\mathrm{Pf}(A)}$$

est bien définie. Montrer ensuite que κ est constante.

3) Montrer que pour toute matrice antisymétrique A et toute matrice P de $SL_4(\mathbf{C})$, on a $\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP) = \mathrm{Pf}(A)$.

4) On considère l'action (à gauche) de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ par congruence sur $\mathcal{A}_4(\mathbf{C})$ et le morphisme d'action $\varphi : \mathrm{SL}_4(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A}_4(\mathbf{C}))$ qui en résulte.
a) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-groupe d'un groupe isomorphe à $\mathrm{O}_6(\mathbf{C})$.
b) Montrer que $\ker\varphi = \{\pm \mathrm{Id}\}$.

Indication : Montrer d'abord que toute matrice de $\ker\varphi$ *est diagonale en montrant dans un premier temps qu'elle stabilise la matrice antisymétrique*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Décrire les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}_6(\mathbf{C})$ comme sous-espaces respectifs de $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ et $\mathcal{M}_6(\mathbf{C})$. Donner ensuite leur dimension sur $\mathbf{C}$.

6) Montrer qu'il existe un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbf{C})$.

On pourra se servir du résultat suivant : si un morphisme de groupes de Lie possède un noyau discret alors sa différentielle est injective.