Polynôme minimal - Théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 3* — 1. Soient $E_1,\dots,E_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par définition, $JE_1 = E_n$, $JE_2 = E_1$, ..., $JE_n = E_{n-1}$; on a donc $J^2E_1 = E_{n-1}$, $J^2E_2 = E_n$, $J^2E_3 = E_2$, ..., $J^2E_n = E_{n-2}$ et, en raisonnant par récurrence, on vérifie que

$$J^pE_i = \begin{cases} E_{n-p+i} & \text{si } 1 \le i \le p-1 \\ E_n & \text{si } i = p \\ E_{i-p} & \text{si } p+1 \le i \le n \end{cases}$$

pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$. La traduction matricielle est fort simple : J^p est la matrice obtenue en séparant les $p-1$ premières colonnes de J des $n-p+1$ dernières et en permutant ces deux paquets.

Lorsque $p = n$, les formules précédentes donnent $J^nE_i = E_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et donc $J^n = I_n$. La matrice J est ainsi annulée par le polynôme $T^n - 1$; comme ce dernier est scindé à racines simples (ce sont les racines n-èmes de l'unité), il en est de même du polynôme minimal de J et la matrice J est donc diagonalisable.

Étant donnés des scalaires $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que la matrice $\lambda_0 I_n + \lambda_1 J + \dots + \lambda_{n-1}J^{n-1}$ soit nulle,

$$0 = (\lambda_0 I_n + \lambda_1 J + \dots + \lambda_{n-1}J^{n-1})E_1 = \lambda_0 E_1 + \lambda_1 E_n + \dots + \lambda_{n-1}E_2)$$

et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Cela établit que les matrices $I_n, J, \dots, J^{n-1}$ constituent une famille libre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit m_J le polynôme minimal de J. D'une part, ce polynôme est de degré au moins n car, ainsi qu'on vient de le voir, il n'existe pas de polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$ annulant J ; d'autre part, m_J divise le polynôme $T^n - 1$ puisque ce dernier annule J. On a donc $m_J = \lambda(T^n - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, puis $m_J = T^n - 1$ car le polynôme minimal d'un endomorphisme est *unitaire* (par définition).

Les valeurs propres de J sont les racines du polynôme $T^n - 1$, à savoir les n racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$: $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Le vecteur $E(1) = E_1 + \dots + E_n$ est manifestement un vecteur propre pour J associé à la valeur propre 1. Plus généralement, si ξ est une racine n-ème de l'unité, le vecteur $E(\xi) = E_1 + \xi E_2 + \xi^2 E_3 + \dots + \xi^{n-1}E_n$ est un vecteur propre pour J associé à la valeur propre ξ car

$$\begin{aligned} JE(\xi) = J(E_1 + \xi E_2 + \xi^2 E_3 + \dots + \xi^{n-1}E_n) &= E_n + \xi E_1 + \xi^2 E_2 + \dots + \xi^{n-1}E_{n-1} \\ &= \xi(E_1 + \xi E_2 + \dots + \xi^{n-1}E_n) = \xi E(\xi). \end{aligned}$$

En désignant par $\xi_1,\dots,\xi_n$ les n racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, les vecteurs $E(\xi_1)$, $E(\xi_2),\dots,$ $E(\xi_n)$ constituent donc une base de $\mathbb{C}^n$ diagonalisant J et la matrice de passage correspondante est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

2. En vertu du calcul des puissances de J à la question 1, $A = a_1 I_n + a_2 J + \dots + a_n J^{n-1}$.

Soit P la matrice de passage considérée à la fin de la question 1. Puisque $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ($\xi_1,\ \dots,\ \xi_n$ sont les n racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$), $J^p = PD^pP^{-1}$ pour tout entier natutrel p et donc

$$Q(J) = PQ(D)P^{-1}$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[T]$. La matrice $Q(D)$ étant diagonale, égale à $\mathrm{diag}(Q(\xi_1),\dots,Q(\xi_n))$, la matrice $Q(J)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les évaluations de Q en les valeurs propres de J :

$$\mathrm{Sp}(Q(J)) = \{Q(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(J)\}.$$

Comme $A = Q(J)$ avec $Q = a_1 + a_2 T + \dots + a_n T^{n-1}$, cette matrice est diagonalisable et ses valeurs propres sont les nombres complexes $a_1 + a_2\xi + \dots + a_n\xi^{n-1}$, ξ parcourant l'ensemble des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Le déterminant de A est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, soit

$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Q}(\xi_i).$$

Exercice 4* — 1. Un endomorphisme v de E admet 0 pour valeur propre si et seulement si $\mathrm{Ker}(v)$ contient un vecteur non nul, donc si et seulement si v n'est pas inversible. Comme l'endomorphisme u considéré est inversible, $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

2. Soit $\mathrm{P} = \det(u - \mathrm{Tid_E})$ le polynôme caractéristique de u. Les valeurs propres de u étant précisément les racines de P, l'observation faite à la question 1 se traduit par $\mathrm{P}(0) \neq 0$ [1].

En vertu du théorème de Cayley-Hamilton, $\mathrm{P}(u) = 0$. Écrivant P sous la forme $\mathrm{P} = \mathrm{TQ} + \mathrm{P}(0)$ avec $\mathrm{Q} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$, ceci conduit à l'identité

$$u\mathrm{Q}(u) + \mathrm{P}(0)\mathrm{id_E} = 0,$$

soit, comme $\mathrm{P}(0) \neq 0$,

$$u\tilde{\mathrm{Q}}(u) = \tilde{\mathrm{Q}}(u)u = \mathrm{id_E}$$

en posant $\tilde{\mathrm{Q}} = -\frac{1}{\mathrm{P}(0)}\mathrm{Q}$. On obtient ainsi $u^{-1} = \tilde{\mathrm{Q}}(u)$, ce qui prouve que l'inverse de u s'exprime sous la forme d'un polynôme en u.

Exercice 5* — 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ un polynôme premier au polynôme minimal m_u de u ; en vertu du théorème de Bézout, il existe des polynômes $\mathrm{R}, \mathrm{S} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ tels que $\mathrm{RP} + \mathrm{S}m_u = 1$. Substituant u à T dans l'identité précédente, nous obtenons $\mathrm{R}(u)\mathrm{P}(u) + \mathrm{S}(u)m_u(u) = \mathrm{id_E}$, donc $\mathrm{R}(u)\mathrm{P}(u) = \mathrm{id_E}$ puisque $m_u(u) = 0$, et en concluons que l'endomorphisme $\mathrm{P}(u)$ est inversible.

2. Soit réciproquement $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ un polynôme tel que l'endomorphisme $\mathrm{P}(u)$ soit inversible et soit $\delta = \mathrm{pgcd}(\mathrm{P}, m_u)$. Écrivant P et m_u sous la forme $\mathrm{P} = \delta\tilde{\mathrm{P}}$ et $m_u = \delta\tilde{m_u}$ avec $\tilde{\mathrm{P}}, \tilde{m_u} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$, on observe tout d'abord que l'inversibilité de $\mathrm{P}(u)$ implique celle de l'endomorphisme $\delta(u)$ (puisqu'alors $\delta(u)\tilde{\mathrm{P}}(u)\mathrm{P}(u)^{-1} = \tilde{\mathrm{P}}(u)\mathrm{P}(u)^{-1}\delta(u) = \mathrm{id_E}$), puis que l'identité $\delta(u)\tilde{m_u}(u) = m_u(u) = 0$ et l'inversibilité de $\delta(u)$ entraînent $\tilde{m_u}(u) = 0$.

Comme m_u est le polyôme minimal de u, m_u doit alors diviser le polynôme annulateur $\tilde{m_u}$. D'autre part, $\tilde{m_u}$ divise m_u par définition ; on a donc $m_u = \lambda\tilde{m_u}$ avec $\lambda \in \mathrm{K}^\times$. Le polynôme δ est ainsi une constante non nulle, ce qui signifie précisément que les polynômes P et m_u sont premiers entre eux.

Exercice 6 — Quel que soit le sous-espace vectoriel u-stable F de E, la restriction de u à F définit un endomorphisme $u_{|\mathrm{F}}$ de F et $\mathrm{P}(u_{|\mathrm{F}}) = \mathrm{P}(u)_{|\mathrm{F}}$ pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$.

Appliquant cette observation au polynôme minimal m_u de u, nous obtenons $m_u(u_{|\mathrm{F}}) = m_u(u)_{|\mathrm{F}} = 0$; m_u est donc un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{F}}$ et c'est par conséquent un multiple du polynôme minimal $m_{u_{|\mathrm{F}}}$ de $u_{|\mathrm{F}}$.

Si l'endomorphisme u est diagonalisable, son polynôme minimal m_u est scindé à racines simples et il en est de même pour tout polynôme divisant m_u ; en particulier, le polynôme minimal $m_{u_{|\mathrm{F}}}$ de $u_{|\mathrm{F}}$ est scindé à racines simples et l'endomorphisme $u_{|\mathrm{F}}$ de F est donc diagonalisable.

Exercice 7* — Comme dans l'exercice précédent, $m_u(u_{|\mathrm{F}}) = m_u(u)_{|\mathrm{F}} = 0$ et $m_u(u_{|\mathrm{G}}) = m_u(u)_{|\mathrm{G}} = 0$ donc m_u est un multiple commun des polynômes minimaux m_F et m_G de u_F et u_G respectivement ; de manière équivalente, $\mathrm{ppcm}(m_\mathrm{F}, m_\mathrm{G}) | m_u$.

Soit $\delta = \mathrm{pgcd}(m_\mathrm{F}, m_\mathrm{G})$. En écrivant les polynômes m_F et m_G sous la forme $m_\mathrm{F} = \delta\tilde{m}_\mathrm{F}$ et $m_\mathrm{G} = \delta\tilde{m}_\mathrm{G}$ avec $\tilde{m}_\mathrm{F}, \tilde{m}_\mathrm{G} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{ppcm}(m_\mathrm{F}, m_\mathrm{G}) &= \delta\tilde{m}_\mathrm{F}\tilde{m}_\mathrm{G} \\ &= \tilde{m}_\mathrm{G}m_\mathrm{F} \\ &= \tilde{m}_\mathrm{F}m_\mathrm{G} \end{aligned}$$

et il est maintenant facile de voir que ce polynôme annule l'endomorphisme u.

Posons $v = \mathrm{ppcm}(m_\mathrm{F}, m_\mathrm{G})$ et considérons un vecteur x dans E, que l'on écrit sous la forme $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$ avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$. Comme $v = \tilde{m_\mathrm{G}}(u)m_\mathrm{F}(u)$,

$$v(x_\mathrm{F}) = \tilde{m_G}(u)(m_\mathrm{F}(u)(x_\mathrm{F})) = \tilde{m_\mathrm{G}}(u)(m_\mathrm{F}(u_{|\mathrm{F}})(x_\mathrm{F})) = 0\ ;$$

1. Il est connu *a priori* que $\mathrm{P}(0) = \det(u)$, de sorte que l'inversibilité de u équivaut à la non-nullité du terme constant $\mathrm{P}(0)$ de son polynôme caractéristique.

en utilisant l'identité $v = \tilde{m_F}(u)m_G(u)$, on prouve de même que $v(x_G) = 0$. Nous obtenons ainsi que le polynôme $\text{ppcm}(m_F, m_G)$ annule u, donc qu'il est divisible par m_u, et la conclusion $m_u = \text{ppcm}(m_F, m_G)$ découle des relations de divisibilité $m_u | \text{ppcm}(m_F, m_G)$ et $\text{ppcm}(m_F, m_G) | m_u$ une fois que l'on a observé que tous les polynômes considérés sont unitaires.

Exercice 8 — Le polynôme $T^3 - T$ est scindé à racines simples : $T^3 - T = T(T-1)(T+1)$. Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$, son polynôme minimal m_A divise $T^3 - T$ et est donc scindé à racines simples ; les valeurs propres de A appartiennent à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ et il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale ayant a coefficients égaux à 0, b coefficients égaux à 1 et c coefficients égaux à -1, a, b, c étant des entiers naturels soumis à la seule condition : $a + b + c = n$. Réciproquement, le polynôme minimal d'une matrice diagonale D de cette forme est $T^{\varepsilon_a}(T-1)^{\varepsilon_b}(T+1)^{\varepsilon_c}$ avec, pour tout $x \in \{a, b, c\}$, $\varepsilon_x = 0$ si $x = 0$ et $\varepsilon_x = 1$ si $x \geq 1$, et la matrice PDP^{-1} est une solution de l'équation considérée quelle que soit la matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons ainsi décrit toutes les solutions de l'équation $X^3 - X$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 — 1. L'identité $(T^2 + 1) - T^2 = 1$ est une relation de Bézout entre les polynômes premiers entre eux T et $T^2 + 1$. En substituant A à T, nous obtenons la relation

$$I_3 = (A^2 + I_3) - A^2$$

dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, laquelle implique immédiatement la décomposition $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A) \oplus \text{Ker}(A^2 + I_3)$. En effet, quel que soit le vecteur $X \in \mathbb{R}^3$,

$$X = (A^2 + I_3)X - A^2X$$

et $(A^2 + I_3)X \in \text{Ker}(A)$, $A^2X \in \text{Ker}(A^2 + I_3)$ puisque $A^3 + A = 0$; si d'autre part X appartient simultanément à $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A^2 + I_3)$, alors $X = (A^2 + I_3)X - A^2X = 0$.

2. Le polynôme minimal m_A de A est un diviseur de $T^3 + T = T(T^2 + 1)$, soit T, $T^2 + 1$ ou $T(T^2 + 1)$. Le cas $m_A = T$ est exclu puisque $A \neq 0$. Le cas $m_A = T^2 + 1$ est également exclu : en effet, si $m_A = T^2 + 1$, alors le polynôme caractéristique P_A de A est une puissance de $(T^2 + 1)$ car les polynômes m_A et P_A ont les mêmes facteurs irréductibles et ceci est impossible car P_A est de degré 3. Nous obtenons donc $m_A = T(T^2 + 1)$.

3. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Ker}(A)$; nous avons donc par hypothèse $x \neq 0$ et $Ax \neq 0$. S'il existait deux nombres réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls et tels que $\lambda x + \mu Ax = 0$, alors λ et μ seraient tous les deux non-nuls puisque $x, Ax \neq 0$; on aurait alors $Ax = -\frac{\lambda}{\mu}x$, ce qui signifierait, comme $x \neq 0$, que $-\frac{\lambda}{\mu}$ serait une valeur propre de A, c'est-à-dire une racine réelle du polynôme $m_A = T^3 + T$, et ceci contredirait la non-nullité de λ.

La famille (x, Ax) est donc libre.

4. Comme $A \neq 0$, $\text{Ker}(A) \neq \mathbb{R}^3$ et il existe un vecteur x non-nul dans le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(A^2 + I_3)$ en vertu de la question 1. Ce sous-espace étant en outre stable par A puisque $(A^2 + I_3)A = A^3 + A = 0$, il contient la famille (x, Ax) et est donc de dimension au moins 2 d'après la question précédente. Cette discussion conduit à la majoration $\dim \text{Ker}(A) = 3 - \dim \text{Ker}(A^2 + I_3) \leq 1$. D'un autre côté, le polynôme minimal de A admettant 0 comme racine, 0 est une valeur propre de A et donc $\dim \text{Ker}(A) \geq 1$. Nous avons ainsi prouvé que le noyau de A est de dimension 1.

Soit e un vecteur non-nul dans $\text{Ker}(A)$ et soit x un vecteur non-nul dans $\text{Ker}(A^2 + I_3)$. La famille (x, Ax) étant libre en vertu de la question 3, elle constitue une base du sous-espace bidimensionnel $\text{Ker}(A^2 + I_3)$ et (e, x, Ax) est alors une base de $\mathbb{R}^3$ en vertu de la question 1. Désignant par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e, x, Ax), $P^{-1}AP$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs Ae, Ax et AAx dans la base (e, x, Ax) ; il est manifeste que les deux premières colonnes sont celles que l'on souhaite, et il en est de même pour la dernière puisque, x appartenant à $\text{Ker}(A^2 + I_3)$, $A^2x = -x$.

Exercice 10* — 1. Il suffit de calculer $\det(A - XI_n)$. En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det(A - XI_n) = -X \det(A_1 - XI_{n-1}) - (-1)^n a_0,$$

où A_1 est la matrice compagnon du polynôme $X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - \ldots - a_1$. À partir de cette identité et du cas évident $n = 1$, on prouve par récurrence sur n que $P_u = P_A$ n'est autre que le polynôme $(-1)^n P$.

2. Soient $E_1, \ldots, E_n$ les vecteurs de la base canonique de K^n. Par définition de A, $AE_1 = E_2$, $AE_2 = E_3, \ldots$, $AE_{n-1} = E_n$ et $AE_n = a_0E_1 + \ldots + a_{n-1}E_n$, donc $A^pE_1 = E_{p+1}$ pour tout entier $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Nous allons vérifier que la matrice $P(A)$ est nulle. Cela revient à prouver $P(A)E_i = 0$ pour tout i et, comme $P(A)E_i = P(A)A^{i-1}E_1 = A^{i-1}P(A)E_1$, il suffit de s'assurer que $P(A)E_1 = 0$. Le calcul est facile :

$$\begin{aligned} P(A)E_1 &= A^n E_1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i E_1 \\ &= AA^{n-1}E_1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} \\ &= AE_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $P(A) = 0$, d'où $P_u(u) = 0$ d'après la question précédente.

Le polynôme unitaire P annule u. D'autre part, si $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des nombres réels tels que le polynôme $\lambda_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \lambda_1 X\lambda_0$ annule u, alors

$$0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i\right) E_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i E_{i+1}$$

et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, ce qui montre qu'il n'existe aucune polynôme non-nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ annulant u. Le polynôme minimal m_u de u est ainsi de degré au moins n et, puisqu'il divise P, $m_u = P$ car ces deux polynômes sont unitaires.

4. Pour établir que le sous-espace $E_x = \mathrm{Vect}(x, v(x), \ldots, v^p(x)$ est stable par v, il suffit de vérifier qu'il contient les images des vecteurs $x, v(x), \ldots, v^p(x)$ par v et seul le cas de $v^p(x)$ n'est pas complètement évident. Par définition de p, la famille $(x, v(x), \ldots, v^p(x), v^{p+1}(x))$ n'est pas libre et il existe donc des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 v(x) + \ldots + \lambda_{p+1} v^{p+1}(x) = 0.$$

La famille $(x, v(x), \ldots, v^p(x))$ étant libre par hypothèse, le coefficient λ_{p+1} n'est pas nul et on peut dès lors écrire $v^{p+1}(x)$ sous la forme

$$v^{p+1}(x) = -\frac{1}{\lambda_{p+1}}(\lambda_0 x + \ldots + \lambda_p v^p(x)),$$

ce qui prouve que l'image de $v^p(x)$ par v est contenue dans E_x.

5 & 6. En utilisant les notations de la question précédente, la matrice de v dans la base $\mathscr{B}_x$ de E_x est la matrice compagnon du polynôme

$$X^p + \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} X^{p-1} + \ldots + \frac{\lambda_0}{\lambda_{p+1}}.$$

7 & 8. Soit P_v le polynôme caractéristique de v et soit x un vecteur non nul dans E. Comme le sous-espace E_x de E est stable par v, P_v s'écrit sous la forme QP_x où P_x est le polynôme caractéristique de la restriction de v à E_x et $Q \in K[X]$. En vertu de ce qui précède, P_x annule la restriction de v à E_x et donc, en particulier, $P_x(v)(x) = 0$. Comme $P(v)(x) = Q(v)(P_x(v)) = 0$, nous en déduisons que l'endomorphisme $P_v(v)$ est nul et avons ainsi redémontré le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 11* — 1. On justifie comme dans la question 5 de l'exercice précédent qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dans K tels que

$$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$$

et on vérifie que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_x$ est la matrice compagnon du polynôme $T^n - (a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0)$.

2. L'unicité de la matrice compagnon d'un endomorphisme cyclique est une conséquence immédiate de la question 1 de l'exercice précédent : les coefficients de la dernière colonne d'une telle matrice sont en effet, au signe près, ceux du polynôme caractéristique de u et ne dépendent donc pas du choix du vecteur cyclique considéré.

3. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est diagonalisable s'il possède n valeurs propres distinctes.

La réciproque est vraie dans le cas d'un endomorphisme cyclique. En effet, si u est un endomorphisme cyclique, son polynôme minimal et son polynôme caractéristique coïncident en vertu de la question 3 de l'exercice précédent ; si u est diagonalisable, cela implique donc que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, ce qui signifie précisément que u possède n valeurs propres distinctes.
