

Sous-espaces caractéristiques - Décomposition spectrale d'un endomorphisme - Exponentielle d'endomorphismes

Exercice 1.* 1. Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x = (x - \pi(x)) + \pi(x)$ et $x - \pi(x) \in \text{Ker}(\pi)$, $\pi(x) \in \text{Im}(\pi)$ en vertu de la condition $\pi^2 = \pi$. Cette décomposition est unique car $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(\pi) = \{0\}$: un élément x de $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(\pi)$ s'écrit sous la forme $x = \pi(y)$ avec $\pi^2(y) = 0$, donc est nul puisque $\pi = \pi^2$.

Remarque : il est bon d'observer que tout projecteur π est diagonalisable puisque le polynôme $T^2 - T$ est scindé à racines simples sur K ; on a donc $E = \text{Ker}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi - \text{id}_E)$ et l'égalité $\text{Ker}(\pi - \text{id}_E) = \text{Im}(\pi)$ se déduit immédiatement de l'équation $\pi^2 = \pi$. Ainsi, la décomposition de E obtenue n'est pas autre chose que la décomposition en somme directes des sous-espaces propres de π ...

Bien évidemment, la décomposition $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ ne garantit pas que l'endomorphisme u soit un projecteur : pour obtenir un contre-exemple, il suffit de partir d'une décomposition $E = E' \oplus E''$, de choisir un automorphisme quelconque u'' de E'' et de considérer l'endomorphisme u de E défini par $u(x' + x'') = u''(x'')$; on a $E' = \text{Ker}(u)$ et $E'' = \text{Im}(u)$, mais u est un projecteur si et seulement si $u'' = \text{id}_{E''}$.

2. Comme on l'a remarqué, $\text{Im}(\pi) = \text{Ker}(\pi - \text{id}_E)$ est le sous-espace propre de π associé à la valeur propre 1 ; en juxtaposant une base de $\text{Ker}(\pi)$ et une base de $\text{Im}(\pi)$, on obtient donc une base de E dans laquelle la matrice de π est de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & I_r \end{pmatrix}$$

avec $r = \dim \text{Im}(\pi) = \text{rg}(\pi)$ et l'égalité $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\pi)$ devient évidente.

3. Étant donnés deux projecteurs π_1, π_2 ,

$$\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2)^2 &= \pi_1^2 + \pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2^2 \\ &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_1. \end{aligned}$$

Si $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$, $\pi_1 + \pi_2$ est manifestement un projecteur.

Réciproquement, si $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur, $\pi_1 \circ \pi_2 = -\pi_2 \circ \pi_1$. Contrairement aux apparences, cette dernière condition implique que π_1 et π_2 commutent : il en découle en effet que π_2 stabilise les sous-espaces $\text{Ker}(\pi_1)$ et $\text{Im}(\pi_1)$ (le vérifier !) et donc commute avec π_1 puisque tel est évidemment le cas sur $\text{Ker}(\pi_1)$, où $\pi_1 = 0$, et sur $\text{Im}(\pi_1) = \text{Ker}(\pi_1 - \text{id}_E)$, où $\pi_1 = \text{id}$. Ainsi, si $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur, $\pi_1 \circ \pi_2 = -\pi_2 \circ \pi_1$ et $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$, donc $2\pi_1 \circ \pi_2 = 0$. Lorsque $2 \neq 0$ dans le corps K (c'est-à-dire lorsque la caractéristique de K n'est pas égale à 2), nous en déduisons $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

Remarque : lorsque le corps K est de caractéristique 2, $(u + v)^2 = u^2 + v^2$ pour tous endomorphismes u, v qui commutent et la somme de deux projecteurs est donc un projecteur si et seulement si ceux-ci commutent.

4. Dans cette dernière question, $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur et K est de caractéristique différente de 2 donc $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

L'inclusion $\text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Ker}(\pi_2) \subset \text{Ker}(\pi_1 + \pi_2)$ est évidente ; réciproquement, étant donné $x \in \text{Ker}(\pi_1 + \pi_2)$, $\pi_1(x) = -\pi_2(x) = -\pi_2^2(x) = \pi_2(\pi_1(x)) = 0$ et donc $\text{Ker}(\pi_1 + \pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Ker}(\pi_2)$.

Comme $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$, $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Ker}(\pi_1)$ et donc $\text{Im}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) = 0$. L'inclusion $\text{Im}(\pi_1 + \pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1) \oplus \text{Im}(\pi_2)$ est évidente ; réciproquement, étant donné $x \in \text{Im}(\pi_1) \oplus \text{Im}(\pi_2)$, $x = \pi_1(y) + \pi_2(z)$ et $\pi_1(x) = \pi_1^2(y) = \pi_1(y)$, $\pi_2(x) = \pi_2^2(z) = \pi_2(z)$, donc $x = \pi_1(x) + \pi_2(x) \in \text{Im}(\pi_1 + \pi_2)$.

Complément : il convient d'observer que les projecteurs $\pi \in \mathcal{L}(E)$ sont les pendants algébriques des décompositions de l'espace vectoriel E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels. De manière précise, l'application $\pi \mapsto (\text{Im}(\pi), \text{Ker}(\pi))$ réalise une bijection entre l'ensemble des endomorphismes π de E tels que $\pi^2 = \pi$ et l'ensemble des couples (E', E'') formés de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Étant donné un couples (E', E'') de sous-espaces supplémentaires, le projecteur π correspondant est défini par $\pi|_{E'} = \text{id}_{E'}$ et $\pi|_{E''} = 0$; la permutation des sous-espaces E' et E'' correspond au remplacement du projecteur π par le projecteur $\text{id}_E - \pi$.

Exercice 2.* *Remarque préliminaire : l'énoncé suppose implicitement que les applications $\pi : E \rightarrow E_i$ sont surjectives.*

Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$. Étant donné $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe une unique application linéaire $\pi_i : E \rightarrow E$ telle que $\pi_i(x) = x$ si $x \in E_i$ et $\pi_i(x) = 0$ si $x \in E_j$ avec $j \neq i$ (si cela ne vous semble pas tout-à-fait évident, il n'y a qu'à considérer une base de E obtenue en juxtaposant des bases de chacun des sous-espaces E_1, \dots, E_n); on a évidemment $\text{Im}(\pi_i) = E_i$, $\text{Ker}(\pi_i) = \bigoplus_{j \neq i} E_j$, $\pi_i^2 = \pi_i$, $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $i \neq j$ et $\text{id}_E = \pi_1 + \dots + \pi_n$.

Soient réciproquement $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs tels que $\text{Im}(\pi_i) = E_i$ pour tout i , $\pi_i \circ \pi_j = 0$ pour tous i, j avec $i \neq j$ et $\text{id}_E = \pi_1 + \dots + \pi_n$. La décomposition de E en somme directe des sous-espaces E_i peut s'établir en raisonnant par récurrence sur $n \geq 2$ à partir du cas $n = 2$ étudié à la question 4 de l'exercice précédent, le point étant que $\pi'_p = \pi_1 + \dots + \pi_p$ et π_{p+1} sont des projecteurs tels que $\pi'_p \circ \pi_{p+1} = \pi_{p+1} \circ \pi'_p = 0$. Il est tout aussi simple de démontrer directement notre assertion : la condition $\text{id}_E = \pi_1 + \dots + \pi_n$ garantit que tout vecteur x de E s'écrit comme la somme des vecteurs $x_i = \pi_i(x) \in E_i = \text{Im}(\pi_i)$ et cette décomposition est unique car, si $x = x'_1 + \dots + x'_n$ avec $x'_i \in \text{Im}(\pi_i)$, $\pi_i(x) = \pi_i(x'_i)$ pour tout i puisque $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $j \neq i$ et $x'_i = \pi_i(x'_i) = \pi_i(x)$ car $\text{Im}(\pi_i) = \text{Ker}(\text{id}_E - \pi_i)$.

Exercice 3.* 1. L'hypothèse $Q(\lambda) \neq 0$ signifie précisément que les polynômes $(T - \lambda)^k$ et Q sont premiers entre eux et on peut donc écrire une identité de Bézout $UQ + V(T - \lambda)^k = 1$ avec $U, V \in K[T]$. L'inclusion $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)^k$ découle immédiatement de l'identité

$$\text{id}_E = U(u)Q(u) + V(u)(u - \lambda \text{id}_E)^k = U(u)Q(u) + (u - \lambda \text{id}_E)^k V(u).$$

L'inclusion réciproque est évidente puisque $Q(u)(u - \lambda \text{id}_E)^k = m_u(u) = 0$.

2. Les identités $\text{id}_E = U(u)Q(u) + V(u)(u - \lambda \text{id}_E)^k = Q(u)U(u) + (u - \lambda \text{id}_E)^k V(u)$ et $(u - \lambda \text{id}_E)^k Q(u) = 0$ impliquent immédiatement la décomposition de E en somme directe des sous-espaces $\text{Ker}(Q(u))$ et $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ (*lemme de décomposition des noyaux*); vu la question précédente, on obtient la décomposition

$$E = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^k \oplus \text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^k \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)^k.$$

3. Les sous-espaces $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$ sont stables par u car les endomorphismes u et $u - \lambda \text{id}_E$ commutent. Écrivant un vecteur quelconque x de E sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' \in \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$ et $x'' \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$,

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= P(u)(x') + P(u)(x'') \\ &= m'(u)(u - \lambda \text{id}_E)(x') + (u - \lambda \text{id}_E)m'(u)(x'') = 0 \end{aligned}$$

car le polynôme m' (resp. $T - \lambda$) annule la restriction de u au sous-espace $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)^k$ (resp. $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$); on a donc $P(u) = 0$.

Le polynôme minimal m_u de u divise le polynôme $(T - \lambda)m'$; si l'on suppose en outre que λ est une valeur propre de u , m_u s'écrit sous la forme $m_u = (T - \lambda)\tilde{m}$ et le polynôme \tilde{m} divise m' . Le scalaire λ est une racine simple de m_u si et seulement si $\tilde{m}(\lambda) \neq 0$; comme cette condition sera vérifiée si $m'(\lambda) \neq 0$, il suffit de s'assurer que λ n'est pas racine de m' .

Si l'on avait $m'(\lambda) = 0$, λ serait une valeur propre de la restriction de u au sous-espace $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$ et ce dernier contiendrait donc un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$. La condition $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) = \{0\}$ montre que ceci est impossible; on a donc $m'(\lambda) \neq 0$ et λ est une racine simple de m_u .

4. Commençons par observer que les conditions

$$(i) \ E = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$$

$$(i') \ \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) = \{0\}$$

sont équivalentes puisqu'on a déjà l'égalité $\dim(E) = \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) + \dim \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$. Les conditions

$$(ii) \ \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$$

$$(ii') \ \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2 \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$$

sont également équivalentes en vertu de l'inclusion $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$. Il en découle que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes si et seulement si les conditions (i') et (ii') le sont.

(i') \Rightarrow (ii') : quel que soit $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$, $(u - \lambda \text{id}_E)(x)$ appartient simultanément aux sous-espaces $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$, donc est nul.

(ii') \Rightarrow (i') : quel que soit $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$, $x = (u - \lambda \text{id}_E)(y)$ avec $y \in E$ et $(u - \lambda \text{id}_E)^2(y) = (u - \lambda \text{id}_E)(x) = 0$; on a alors par hypothèse $(u - \lambda \text{id}_E)(y) = 0$, d'où $x = 0$.

5. Supposons que l'endomorphisme u soit diagonalisable. Chaque valeur propre λ de u est une racine simple du polynôme minimal de u , donc

$$E = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$$

en vertu de la question 2 (avec $k = 1$) et $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$ en vertu de la question 4.

Exercice 4.* — En vertu du théorème du rang, les conditions $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{rg}(u - \lambda \text{id}_E)^2$ et $\dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$ sont équivalentes et, vu l'inclusion $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$, elles sont également équivalentes à l'égalité $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$.

Cette égalité est évidemment vérifiée si λ n'est pas une valeur propre de u : en effet, l'endomorphisme $u - \lambda \text{id}_E$ est alors injectif et $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2 = \{0\}$.

L'exercice consiste donc à vérifier que l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$$

pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

Si u est diagonalisable, cette égalité a été prouvée à la fin de l'exercice précédent.

Réciproquement, si $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^2$ pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$, un raisonnement par récurrence immédiat permet d'établir l'égalité $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^p$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et tout entier naturel $p \geq 1$; de manière équivalente, chaque sous-espace caractéristique de u coïncide avec le sous-espace propre correspondant. Le polynôme caractéristique de u étant scindé, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u ; c'est donc également la somme directe des sous-espaces propres de u et l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 5. — 1. On voit facilement que 1 et 2 sont des valeurs propres de u . Les sous-espaces propres correspondants sont

$$\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5}) = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5}) = \mathbb{R}X_4$$

avec

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{tr}(u) = 7$ et $\det(u) = 4$, les deux dernières valeurs propres de u sont les solutions des équations $x + y = 3$ et $xy = 2$, c'est-à-dire 1 et 2, et le polynôme caractéristique de u est donc $-(T - 1)^3(T - 2)^2$. Nous en déduisons que les deux sous-espaces caractéristiques de u sont $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^3$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$.

Bien que ce ne soit pas demandé, on voit facilement que le polynôme minimal de u est $(T - 1)^2(T - 2)^2$. En effet, les multiplicités algébriques de 1 et 2 étant strictement supérieures à leurs multiplicités géométriques, les sous-espaces propres $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})$ et $\text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5})$ sont distincts des sous-espaces caractéristiques correspondants; les inclusions $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5}) \subset \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ et $\text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5}) \subset \text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ sont donc strictes et la décomposition

$$\mathbb{R}^5 = \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2 \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$$

s'en déduit en considérant les dimensions. Le polynôme minimal de u est donc bien $(T - 1)^2(T - 2)^2$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^3 = \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$.

2. Toute base de \mathbb{R}^5 obtenue en juxtaposant une base de chacun des sous-espaces caractéristiques de u a la propriété désirée.

On obtient une base de $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})$ en adjoignant à la base (X_1, X_2) de $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})$ un vecteur X_3 tel que $(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2 X_3 = 0$ et $(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5}) X_3 \neq 0$, ou encore tel que $(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5}) X_3$ soit un vecteur non nul de $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^5})$.

Il suffit pour cela de déterminer une solution $(X_3, \lambda_1, \lambda_2)$ de l'équation linéaire $(u - \text{id}_E)X_3 = X_3 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ telle que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ et, tous calculs faits, le triplet $(X_3, 0, 1)$, où

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

convient. Un raisonnement analogue montre que l'on obtient une base de $\text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ en adjoignant à X_4 le vecteur

$$X_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

solution de l'équation $(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^5})X_5 = 2X_5 + X_4$.

Dans la base $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, la matrice de u est sous forme réduite de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. — 1. Commençons par supposer $K = \mathbb{C}$. Par application du théorème de Dunford-Jordan, il existe une base de E dans laquelle de la matrice de u est de la forme $D + N$, où D est une matrice diagonale, N est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle et $DN = ND$. La matrice de l'endomorphisme e^u dans cette base est $e^D e^N$ et, comme la matrice $e^N = (I_n + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{n!}N^n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale,

$$\det(e^u) = e^{\text{tr}(u)} = \det(e^D) \det(e^N) = \det(e^D) = e^{\text{tr}(D)} = e^{\text{tr}(u)}.$$

Lorsque $K = \mathbb{R}$, on commence par considérer la matrice M de u dans une base de E et on applique ce qui précède à M en considérant cette matrice comme une matrice à coefficients dans \mathbb{C} : $\det(e^M) = e^{\text{tr}(M)}$; la conclusion découle alors des identités $\text{tr}(u) = \text{tr}(M)$ et $\det(e^u) = \det(e^M)$.

2. Supposons que l'endomorphisme u soit nilpotent et soit k un entier naturel tel que $u^{k+1} = 0$. On a

$$e^u - \text{id}_E = u + \frac{1}{2}u^2 + \dots + \frac{1}{k!}u^k$$

et l'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(e^u - \text{id}_E)$ est évidente. Pour établir l'inclusion réciproque, observons que, pour tout vecteur x dans $\text{Ker}(e^u - \text{id}_E)$,

$$u(x) = -\frac{1}{2}u^2(x) - \dots - \frac{1}{k!}u^k(x)$$

donc

$$u(x) = \left(-\frac{1}{2}u + \dots + \frac{1}{k!}u^{k-1} \right) (u(x)).$$

En substituant la première expression de $u(x)$ dans la seconde, on obtient une écriture de $u(x)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $u^3(x), \dots, u^k(x)$ et un raisonnement par récurrence immédiat permet d'établir

$$u(x) \in \text{Vect}(u^p(x), p \geq p_0)$$

pour tout entier $p_0 \geq 1$. Appliquant ce dernier résultat avec $p_0 = k + 1$, la nullité de u^{k+1} implique celle de $u(x)$ et donc $x \in \text{Ker}(u)$.

3. Les trois premières matrices ne posent pas de problème puisqu'elles sont de la forme $D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $DN = ND$. On obtient respectivement

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \vartheta \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ e^\lambda \vartheta & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les exponentielles des deux dernières matrices, on commence par les diagonaliser. On obtient sans difficulté

$$\begin{pmatrix} \lambda & \vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda + \vartheta & 0 \\ 0 & \lambda - \vartheta \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2}P$$

et

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda + i\vartheta & 0 \\ 0 & \lambda - i\vartheta \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

d'où

$$e \begin{pmatrix} \lambda & \vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda+\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{\lambda-\vartheta} \end{pmatrix} P^{-1} = e^\lambda \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & \sinh(\vartheta) \\ \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix}$$

et

$$e \begin{pmatrix} \lambda & -\vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} e^{\lambda+i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{\lambda-i\vartheta} \end{pmatrix} Q^{-1} = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.* — 1. Les polynômes $(T-1)^2$ et $T-2$ sont premiers entre eux et $(T-1)^2 - T(T-2) = 1$ est une relation de Bézout. On en déduit comme d'habitude que les endomorphismes $\pi_2 = -(u - \text{id}_E)^2$ et $\pi_1 = u(u - 2\text{id}_E)$ sont des projecteurs tels que $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$ et $\text{id}_E = \pi_1 + \pi_2$, d'images respectives $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$, d'où la décomposition

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E)^2 \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E).$$

2. Les projecteurs spectraux π_1 et π_2 étant des polynômes en u , ils commutent avec u .

On a $u\pi_2 = 2\pi_2$ puisque $\text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$ et $u\pi_1 = \pi_1 + (u - \text{id}_E)\pi_1$ avec $[(u - \text{id}_E)\pi_1]^2 = (u - \text{id}_E)^2\pi_1 = 0$ puisque $\text{Im}(\pi_1) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$. On en déduit

$$e^u \pi_2 = e^2 \pi_2$$

et

$$\begin{aligned} e^u \pi_1 &= e^{\pi_1 u} \\ &= e^{\pi_1} e^{(u - \text{id}_E)\pi_1} \\ &= (e\pi_1)(\text{id}_E + (u - \text{id}_E)\pi_1) \\ &= eu\pi_1. \end{aligned}$$

3. C'est déjà fait...

4. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} e^u &= e^u(\pi_1 + \pi_2) \\ &= e^u \pi_1 + e^u \pi_2 \\ &= eu\pi_1 + e^2 \pi_2 \\ &= eu^2(u - 2E) - e^2(u - \text{id}_E) \\ &= eu^3 - (e^2 + 2e)u^2 + 2e^2u - e^2\text{id}_E. \end{aligned}$$

Exercice 8.* — Les matrices sont données sans garantie et il est fortement conseillé de vérifier tous les calculs !

(i) On vérifie que $\text{Sp}(u) = \{2, 3, 4\}$, de sorte que le polynôme minimal de u est $(T-2)(T-3)(T-4)$. En décomposant la fraction rationnelle $(T-2)^{-1}(T-3)^{-1}(T-4)^{-1}$ en éléments simples, on obtient l'identité

$$\frac{1}{2}(T-3)(T-4) - (T-2)(T-4) + \frac{1}{2}(T-2)(T-3) = 1,$$

qui est une relation de Bézout pour les polynômes premiers entre eux $(T-3)(T-4)$, $(T-2)(T-4)$ et $(T-2)(T-3)$. Les endomorphismes

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(u - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}), \quad \pi_3 = -(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad \pi_4 = \frac{1}{2}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})(u - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})$$

sont les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$, $\text{Ker}(u - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\text{Ker}(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ respectivement. Leurs matrices respectives dans la base canonique sont

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Partant de l'identité $\text{id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$, on obtient

$$u^n = 2^n \pi_2 + 3^n \pi_3 + 4^n \pi_4$$

pour tout entier naturel n et la matrice de u^n dans la base canonique est

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^n + 14 \cdot 4^{n-1} & -2^n + 3^n & 2^{n-1} - 4 \cdot 3^n + 14 \cdot 4^{n-1} \\ -4 \cdot 3^n + 4^{n+1} & 3^n & -4 \cdot 3^n + 4^{n+1} \\ -3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 3^n - 10 \cdot 4^{n-1} & 2^n - 3^n & -2^{n-1} + 4 \cdot 3^n - 10 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a enfin

$$e^{tu} = e^{2t} \pi_2 + e^{3t} \pi_3 + e^{4t} \pi_4$$

pour tout nombre réel t et la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique est

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{2t} - 4e^{3t} + \frac{7}{2}e^{4t} & -e^{2t} + e^{3t} & \frac{1}{2}e^{2t} - 4e^{3t} + \frac{7}{2}e^{4t} \\ -4e^{3t} + 4e^{4t} & e^{3t} & -4e^{3t} + 4e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + 4e^{3t} - \frac{5}{2}e^{4t} & e^{2t} - e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + 4e^{3t} - \frac{5}{2}e^{4t} \end{pmatrix}.$$

(ii) On vérifie que $\text{Sp}(u) = \{1, 4\}$, la valeur propre étant de multiplicité géométrique égale à 2 ; l'endomorphisme u est donc diagonalisable et son polynôme minimal est $(T-1)(T-4)$.

En procédant comme en (i), on obtient les expressions

$$\pi_1 = -\frac{1}{3}(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad \pi_4 = \frac{1}{3}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$$

pour les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\text{Ker}(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ respectivement. Leurs matrices dans la base canonique s'en déduit immédiatement. Enfin,

$$u^n = \pi_1 + 4^n \pi_4 \quad \text{et} \quad B^n = \begin{pmatrix} -2 + 4^n & 1 + 4^n & 1 + 4^n \\ 1 + 4^n & -2 + 4^n & 1 + 4^n \\ 1 + 4^n & 1 + 4^n & -2 + 4^n \end{pmatrix}$$

pour tout entier naturel n et

$$e^{tu} = e^t \pi_1 + e^{4t} \pi_4, \quad e^{tB} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^t + e^{4t} & e^t + e^{4t} & e^t + e^{4t} \\ e^t + e^{4t} & -2e^t + e^{4t} & e^t + e^{4t} \\ e^t + e^{4t} & e^t + e^{4t} & -2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}$$

pour tout nombre réel t .

(iii) On vérifie que $\text{Sp}(u) = \{1, 2\}$, la valeur propre 2 étant de multiplicité algébrique 2 mais de multiplicité géométrique 1 seulement. Cet endomorphisme n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal est $(T-1)(T-2)^2$. On obtient une relation de Bézout entre $T-1$ et $(T-2)^2$ en faisant la division euclidienne du second par le premier :

$$1 = (T-2)^2 - (T-1)(T-3).$$

Les projecteurs spectraux sur les sous-espaces caractéristiques $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont respectivement

$$\pi_1 = (u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \text{ et } \pi_2 = -(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(u - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3}),$$

de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Avant de calculer u^n et e^{tu} , observons que $u\pi_2 = 2\pi_2 + (u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ avec $[(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2]^2 = 0$, de sorte que $u^n\pi_2 = (u\pi_2)^n = 2^n\pi_2 + n2^{n-1}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ et $e^{tu}\pi_2 = e^{2t}\pi_2 + e^{2t}t(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$. La matrice de $(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a par conséquent :

$$u^n = \pi_1 + 2^n\pi_2 + (u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2, \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 - n2^n & 2^{n-1}n & (n+1)2^n - 1 \\ 2(1 - 2^n) & 2^n & 2(2^n - 1) \\ -n2^n & n2^{n-1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$$

pour tout entier naturel n et

$$e^{tu} = e^t\pi_1 + e^{2t}\pi_2 + te^{2t}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2, \quad e^{tC} = \begin{pmatrix} e^t - 2te^{2t} & te^{2t} & -e^t + (1+2t)e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & e^{2t} & 2(e^{2t} - e^t) \\ -2te^{2t} & te^{2t} & (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

pour tout nombre réel t .

Exercice 9. — Le rang de l'endomorphisme u est manifestement égal à 1, ce qui signifie que 0 est une valeur propre de multiplicité géométrique $\dim \text{Ker}(u) = n$; c'est en fait l'unique valeur propre de u car $\text{tr}(u) = 0$ et u n'est pas diagonalisable.

L'image de u est de manière évidente la droite engendrée par le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1, lequel appartient à $\text{Ker}(u)$; nous avons donc $u^2 = 0$ et $e^{tu} = 1 + tu$ pour tout nombre réel t .

Exercice 10. — On désigne par E_1, \dots, E_n les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

1 & 2. Le sous-espace $\text{Ker}(A - (a-b)I_n)$ de \mathbb{R}^n est de dimension $n-1$ et engendré par les vecteurs $E_1 - E_2, E_2 - E_3, \dots, E_{n-1} - E_n$. La valeur propre $(a-b)$ est de multiplicité géométrique $n-1$ et, comme $\text{tr}(A) = na$, la dernière valeur propre x de A est la solution de l'équation $(n-1)(a-b) + x = na$, soit $x = a + (n-1)b$. Le sous-espace propre $\text{Ker}(A - (a + (n-1)b)I_n)$ est la droite engendrée par le vecteur $E_1 + \dots + E_n$.

Les vecteurs $E_1 - E_2, \dots, E_n - E_{n-1}$ et $E_1 + \dots + E_n$ constituent clairement une base de \mathbb{R}^n car les $n-1$ premiers forment une base de l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n$, lequel ne contient pas le dernier vecteur. Tous ces vecteurs étant des vecteurs propres de A , A est diagonalisable et, si P désigne la matrice dont les colonnes sont leurs coordonnées dans la base canonique (c'est la matrice ayant des 1 sur la diagonale, des -1 sur la première sous-diagonale et des 1 sur la dernière colonne, les autres coefficients étant nuls),

$$P^{-1}AP = \text{diag}(a-b, \dots, a-b, a + (n-1)b).$$

Lorsque $b \neq 0$, les deux valeurs propres de A sont distinctes et son polynôme minimal est donc $(T - (a-b))(T - (a - (n-1)b)) = T^2 - (2a - nb)T + (a-b)(a - (n-1)b)$.

Lorsque $b = 0$, $A = aI_n$ et son polynôme minimal est $T - a$.

3. La matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas l'une de ses valeurs propres, donc si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq (n-1)b$. Le calcul de A^{-1} se fait aisément en utilisant le polynôme minimal de A :

– lorsque $b = 0$, $A = aI_n$ et donc $A^{-1} = a^{-1}I_n$;

– lorsque $b \neq 0$, $A^2 - (2a + nb)A + (a - b)(a - (n - 1)b) = 0$ et donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{(a - b)(a - nb)}(A - (2a + nb)I_n).$$

4 & 5. Lorsque $b \neq 0$, la méthode la plus efficace pour calculer explicitement A^n et e^{tA} est d'utiliser les projecteurs spectraux de A . Partant de la relation de Bézout $(T - (a - (n - 1)b)) - (T - (a - b)) = nb$, nous obtenons immédiatement

$$I_n = \frac{1}{nb}((A - (a - (n - 1)b)I_n) - (A - (a - b)I_n))$$

et

$$A = \frac{1}{nb}((a - b)(A - (a - (n - 1)b)I_n) - (a - (n - 1)b)(A - (a - b)I_n)),$$

d'où

$$\begin{aligned} A^p &= \frac{1}{nb}((a - b)^p(A - (a - (n - 1)b)I_n) - (a - (n - 1)b)^p(A - (a - b)I_n)) \\ &= \frac{1}{nb}((a - b)^p - (a - (n - 1)b)^p)A + \frac{1}{nb}(a - b)(a - (n - 1)b)((a - (n - 1)b)^{p-1} - (a - b)^{p-1})I_n \end{aligned}$$

pour tout entier naturel $p \geq 1$ et

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{nb}(e^{(a-b)t}(A - (a - (n - 1)b)I_n) - e^{(a-(n-1)b)t}(A - (a - b)I_n)) \\ &= \frac{1}{nb}(e^{(a-b)t} - e^{(a-(n-1)b)t})A + \frac{1}{nb}((a - b)e^{(a-(n-1)b)t} - (a - (n - 1)b)e^{(a-b)t})I_n. \end{aligned}$$

Exercice 11. — 1. Le rang de l'endomorphisme $u - (1 - a)\text{id}_E$ est égal à 1 et $1 - a$ est donc une valeur propre de u de multiplicité géométrique égale à 3. Comme $\text{tr}(u) = 4$, la dernière valeur propre de u est $4 - 3(1 - a) = 1 + 3a$.

2. Si $a = 0$, $1 - a = 1 + 3a = 1$ et l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable car $u \neq \text{id}_E$.

3. Lorsque $a \neq 0$, les multiplicités géométriques et algébriques des valeurs propres $1 - a$ et $1 + 3a$ de u sont les mêmes (respectivement 3 et 1) et l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Le polynôme caractéristique de u est $(T - (1 - a))^3(T - (1 + 3a))$; son polynôme minimal est $(T - (1 - a))(T - (1 + 3a))$.

5. L'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces propres $E_1 = \text{Ker}(u - (1 - a)\text{id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(u - (1 + 3a)\text{id}_E)$ de u car leur intersection est nulle et $\dim \text{Ker}(u - (1 - a)\text{id}_E) = 3$, $\dim \text{Ker}(u - (1 + 3a)\text{id}_E) = 1$.

6. Les projecteurs spectraux s'obtiennent à partir de la relation de Bézout $(T - (1 - a)) - (T - (1 + 3a)) = 4a$: $\pi_1 = -\frac{1}{4a}(u - (1 + 3a)\text{id}_E)$ est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et $\pi_2 = \frac{1}{4a}(u - (1 - a)\text{id}_E)$ est le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .

7. On a $u^k = (1 - a)^k \pi_1 + (1 + 3a)^k \pi_2$ pour tout entier naturel k et $e^u = e^{1-a} \pi_1 + e^{1+3a} \pi_2$. Les matrices de π_1 et π_2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 étant respectivement

$$-\frac{1}{4a} \begin{pmatrix} -3a & a^2 & a^2 & a \\ 1 & -3a & a & 1 \\ 1 & a & -3a & 1 \\ a & a^2 & a^2 & -3a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} a & a^2 & a^2 & a \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ a & a^2 & a^2 & a \end{pmatrix},$$

le calcul des matrices de u^k et e^u ne pose pas de problème...