Playlists et Vidéos Youtube

Pour l'externe à l'usage des candidats à l'interne

Fondamentaux

Structures quotients (7 vidéos) *(structure quotient ensembliste, passage au quotient, groupe, quotient et théorème de Lagrange, groupe quotient, sous-espaces quotient : formule du rang et noyaux emboîtés, idéaux, passage au quotient, lemme chinois, équations diophantiennes avec 31)*

Il s'agit d'une série de vidéos où on présente les structures quotient dans le programme universitaire.

Vidéo 1 : On montre qu'une application est une bijection qui s'ignore.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on présente le quotient d'un groupe par un sous-groupe non nécessairement distingué.

Vidéo 3 : On montre ici comment obtenir des structures de groupes quotient à l'aide d'un sous-groupe distingué.

Vidéo 4 : On s'attaque maintenant aux structures d'espaces vectoriels quotient. On en trouve des bases, on déduit la dimension de l'espace quotient et on remarque que la formule du rang est totalement naturelle dans ce contexte.

Vidéo 5 : Une preuve élégante (mais classique !) de l'essoufflement de la suite des noyaux emboîtés est présentée. Elle utilise le passage au quotient.

Vidéo 6 : On se dirige maintenant vers l'arithmétique en introduisant les idéaux. Ceux-ci permettent de construire des structures d'anneaux quotient, tout en généralisant la relation "divise" des entiers.

Vidéo 7 : Dans cette dernière vidéo, on montre comment les structures quotient peuvent amener à résoudre des équations diophantiennes.

Gymnastique des corps (8 vidéos)

Dans cette playlist, il ne s'agira pas de théorie des corps, mais juste d'un exposé de survol des différents types de corps sur lesquels on travaille dans le contexte de l'écrit, et pour chacun de ces types (caractéristique, finitude, ordre, algébriquement clos, les spécificités du corps des réels...), décrire les ouvertures que nous offre ce type et quels en sont les pièges. J'en parlerai dans le contexte 1) des algèbres de polynômes, 2) de la réduction 3) des formes quadratiques.

Vidéo 1 : On regarde attentivement les conséquences et les pièges qui se présentent selon si le corps sur lequel on travaille est fini ou non.

Vidéo 2 : Après avoir étudié les spécificités des corps infinis ou finis, on s'attaque au cas des corps de caractéristique zéro ou p.

Vidéo 3 : Ici, on regarde ce qui est possible ou pas, selon si l'on travaille (sur des polynômes, en réduction, ou formes quadratiques) sur un corps algébriquement clos ou non. On regarde ensuite les problèmes de caractéristiques 2 (ou pas).

Vidéo 4 : On regarde maintenant les spécificités du corps des réels, puis celui des complexes lorsque l'on travaille sur des polynômes ou sur la réduction.

Déterminant (8 vidéos) *(forme n-linéaire alternée, unicité existence, multiplicativité, conséquences, mineurs et caractérisation du rang, formule de l'inverse par la comatrice, forme volume, développement de Laplace et formule de Binet)*

Vidéo 1 : On va parler de déterminants dans une série de vidéos. A travers les résultats successifs, on voit comment le déterminant, qui démarre comme un calcul un peu pataud sur une matrice carrée, acquiert ses titres de noblesses. Le but de cette playlist est de fournir les clefs d'une leçon sur le déterminant, tout en préparant le prochain cours sur la réduction. Ici, on montre le théorème principal du déterminant en insistant sur l'unicité d'une fonction vérifiant des propriétés simples, plutôt que sur sa formule explicite.

Vidéo 2 : On prouve et on illustre le théorème principal d'existence et d'unicité du déterminant.

Vidéo 3 : On a montré que l'ensemble des applications de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui sont à la fois n-linéaires et alternées sont toutes proportionnelles au déterminant (et réciproquement). On montre plusieurs conséquences pratiques et théoriques de ce résultat : déterminant des matrices triangulaires, triangulaires par blocs, invariance par transposition du déterminant. Mais c'est surtout la multiplicativité du déterminant qui aura des conséquences profondes sur la suite du cours d'algèbre linéaire.

Vidéo 4 : On observe dans cette vidéo les conséquence de la multiplicativité du déterminant : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ceci implique la stabilité par conjugaison du déterminant, mais aussi le fait que le déterminant est capable de déceler si un système forme ou non une base ; d'où son nom amplement mérité. Mieux, l'invariance par conjugaison permet d'élever le rôle du déterminant : on peut définir le déterminant d'un endomorphisme indépendamment d'un choix de base. Enfin, définit la notion de mineur et on énonce la formule qui donne explicitement l'inverse d'une matrice inversible en fonction de la transposée de la comatrice. Elle sera prouvée dans la prochaine vidéo.

Vidéo 5 : On attaque la preuve de la formule explicite de l'inverse d'une matrice (inversible). On étudie ensuite les systèmes de Cramer.

Vidéo 6 : Voici une preuve d'un résultat sur le déterminant qui aura de multiples (mais bénéfiques) conséquences. Le rang d'une matrice (rectangulaire, soyons fous) est égale à la taille maximale d'un mineur non nul. On illustre ensuite le déterminant dans sa maîtrise des contraintes : il peut donner l'équation d'une droite, vectorielle, affine, et même l'équation d'un cercle. On pourrait continuer avec les coniques mais on s'arrêtera là.

Vidéo 7 : Une petite vidéo presque simpliste sur le déterminant comme forme volume.

Groupes

Compter avec les groupes (8 vidéos) *(la formule de la classe, S_n, nombres multinomiaux, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, sous-espaces en somme directe, matrices diagonalisables)*

On va montrer dans une série de vidéos comment les groupes permettent de compter. Ici, on dévoile la stratégie des groupes : une machine de guerre pour créer des situations où le lemme du berger peut s'appliquer.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on attaque tout de suite avec l'exemple du groupe symétrique. On voit comment les nombres multinomiaux découlent de la formule des classes (sauf qu'il n'y a qu'une seule classe).

Vidéo 3 : On passe facilement du groupe symétrique au groupe linéaire en remplaçant "sous-ensembles" par "sous-espaces" et "partitions" par "sous-espaces en somme directe". On obtient des dénombrements où les factorielles sont remplacées par des cardinaux de groupes linéaires sur un corps fini.

Vidéo 4 : On s'attaque au nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini. On obtient une jolie formule.

Vidéo 5 : La formule obtenue pour dénombrer les matrices diagonalisables était jolie, mais peu utile en l'état. Elle comportait trop de termes quand le corps devenait grand. Toutefois, on peut la réarranger car plusieurs termes sont regroupables. On peut alors donner une estimation de la probabilité de choisir une matrice diagonalisable au hasard sur un corps fini. On finit sur ce résultat épatant.

Vidéo 6 : On veut compter le nombre de matrices de rang r sur un corps fini. Pour l'instant, on se contente d'un calcul préliminaire : celui du calcul du nombre de sous-espaces de dimension k fixée.

Vidéo 7 : On s'attaque au nombre de matrices de taille (m, n) et de rang r sur un corps fini. On en profite pour présenter l'action de Steinitz qui partitionne l'espace des matrices selon leur rang.

Vidéo 8 : Une fois le nombre de matrices de rang r obtenu, on lui donne une forme plus parlante, pour y découvrir des phénomènes naturels comme l'isomorphisme canonique et la dualité.

Le groupe orthogonal (4 vidéos) *(générateurs de O_n, de SO_n, SO_3 est simple)*

On étudie le groupe orthogonal d'un espace euclidien.

Vidéo 1 : On s'intéresse à l'engendrement du groupe orthogonal par des réflexions orthogonales.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on montre le résultat classique de l'engendrement du groupe spécial orthogonal par des retournements orthogonaux.

Vidéo 3 : On attaque ici la simplicité de SO_3. Il ne faudra pas moins de deux vidéos pour en venir à bout.

Vidéo 4 : Dans cette dernière vidéo, on parachève la preuve de la simplicité de SO_3.

Agrégation interne et externe : Groupes cycliques

Vidéo 1 : On introduit les groupes cycliques, d'une manière un peu grossière (comme groupe isomorphie à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis, de manière plus abstraite (groupe fini monogène). On donne ensuite quelques exemples (et contre-exemple) de groupes cycliques dans la nature.

Vidéo 2 : Nous allons montrer une propriété d'hérédité des groupes cycliques : tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique. Mieux, pour tout diviseur de n, il existe un unique sous-groupe (cyclique) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d. On exploite ensuite cette propriété pour établir une formule sur la fonction d'Euler, puis pour donner une caractérisation des groupes cycliques par le nombre de ses éléments d'ordre fixé.

Vidéo 4 : On attaque le problème des actions de groupes cycliques. Dans un premier temps, on donne toutes les actions d'un groupe cyclique sur un ensemble fini n. Puis, on donne des exemple d'actions impliquées dans des théorèmes célèbres (lemme de Cauchy, loi de réciprocité quadratique, collier de perle). Ces actions sont juste évoquées, et non pas détaillées.

Le collier de perles (6 vidéos) *(formule de Burnside, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, cas général Cyclique, D_n)*

On va essayer de ne pas se rouiller pendant cette période de confinement ! Voici une présentation (un peu improvisée de par la soudaineté des évènements) du collier de perles en trois parties, suivie d'un épilogue. Il s'agit de problèmes de dénombrement par action d'un groupe cyclique. Sur la fin, on donne des indications pour l'action du groupe diédral.

Vidéo 5 : On répond à une question très naturelle des coloriages du n-gone modulo isométries, et non plus modulo rotations.

Vidéo 6 : On répond à une question très naturelle des coloriages du n-gone modulo isométries et non plus modulo rotations. Ceci nous amène à observer le groupe diédral. On finit sur une formule générale du nombre de coloriages, qui distingue le cas pair et le cas impair.

Réduction

Réduction – polynômes d'endomorphisme (7 vidéos)

Vidéo 1 : On commence un nouveau cours d'agrégation interne sur la réduction. Tout d'abord avec une partie motivation, histoire de comprendre où l'on va à partir de ce que l'on sait déjà. On rappelle donc brièvement ce que l'on a fait avec les applications linéaires et leurs matrices, histoire de lancer le programme.

<u>Vidéo 2</u> : On commence par définir les polynômes d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. Ce ci est défini comme un morphisme d'algèbre allant de l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[X]$ vers l'algèbre des endomorphismes de E. Ce morphisme définit, d'une part, l'algèbre des polynômes de l'endomorphisme u, et d'autre part, le polynôme minimal de u, vu comme générateur de l'idéal noyau.

<u>Vidéo 3</u> : On attaque la preuve du lemme des noyaux, qui peut être vu comme un avatar de l'identité de Bezout (et finalement l'arithmétique des polynômes) dans la géométrie de l'espace E "muni de l'endomorphisme u".

<u>Vidéo 4</u> : En mathématiques, on est toujours confronté au choix de la théorie et de la pratique. Le polynôme minimal est un polynôme annulateur (d'un endomorphisme u), plutôt du côté de la théorie. En revanche, le polynôme caractéristique est un polynôme plus facilement calculable par sa définition et également annulateur par Cayley-Hamilton. Ses racines sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

<u>Vidéo 5</u> : On prouve ici le théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnon.

<u>Vidéo 6</u> : On fait le point sur les propriétés du polynôme caractéristique. Degré, indépendance du corps, divisibilité par le polynôme minimal μ et divise μ^n.

<u>Vidéo 7</u> : On a montré que le polynôme caractéristique était "coincé" entre le polynôme minimal et une puissance (égale à la dimension de l'espace) du polynôme minimal. On en donne une preuve alternative instructive lorsque le corps est le corps des complexes (ou un corps algébriquement clos). On en déduit

ensuite le polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme restreint aux sous-espaces caractéristiques.

Réduction-Diagonalisation

Vidéo 1 : Voici la suite du cours sur la réduction. On étudie les matrices dites diagonalisables et on donne tous les critères classiques de diagonalisabilité, allant des critères géométriques aux critères, plus efficaces, qui impliquent les polynômes.

Vidéo 2 : On présente les grands classiques des applications des critères polynomiaux de la diagonalisabilité. 1) l'induit d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, 2) la diagonalisation simultanée, 3) diagonalisabilité des endomorphismes de multiplication par une matrice.

Vidéo 3 : On tente ici de définir des fonctions "inverses" sur les matrices, comme la racine k-ième, le logarithme... On se rend compte que même si ces fonctions existent bien sur $\mathbb{C}$, elles ne sont pas forcément définissables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La diagonalisabilité nous permet de le faire à l'aide de polynômes interpolateurs de Lagrange. Dans le cas non diagonalisable, on s'en sort sur un ouvert, en utilisant la décomposition de Dunford et en remplaçant astucieusement les séries de Taylor par des polynômes en une matrice nilpotente.

Réduction-trigonalisation

Vidéo 1 : On donne l'analogue des critères de diagonalisation dans le cadre de la trigonalisation sur un corps $\mathbb{K}$. On a bien entendu le critère par le polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, mais aussi un critère plus fort par l'existence d'un polynôme annulateur scindé. Enfin, un critère, géométrique est le bienvenu. Il se fera par l'existence d'un drapeau complet stable.

Vidéo 2 : On donne des raffinements et des applications à la trigonalisation. Tout d'abord, le critère du polynôme annulateur scindé, et comme application la trigonalisation simultanée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent. Nous passons ensuite à une jolie application qui peut être vue comme un "Cayley-Hamilton à plusieurs variables".

Vidéo 3 : On ouvre un volet sur les applications de la trigonalisation et de la trigonalisation simultanée (pour deux matrices trigonalisables qui commutent). On montre que le spectre du la puissance est la puissance du spectre, et que l'on a les mêmes commutations du langage avec l'exponentielle... On montre ensuite une version plus fine de la trigonalisation : si A est une matrice trigonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaire à spectre singleton. La taille d'un bloc associé à une valeur propre est la multiplicité algébrique de la valeur propre. C'est la porte ouverte sur la décomposition de Dunford.

Réduction et invariants de similitude

Vidéo 1 : On a collecté suffisamment de résultats généraux pour comment une série d'exercices à thème. On commence ici avec le thème des matrices semblables On va donc passer par ce que l'on appelle les invariants de similitudes. Mais, contrairement au cas des matrices équivalentes où tout était résolu avec le rang, les choses ne sont pas simples... On peut tout de même voir dans certains cas que deux matrices ne sont pas semblables, mais on mesure en même temps la faiblesse de nos critères. Patience...

Vidéo 2 : On commence avec un exercice qui permet de faire un petit tour du domaine en matière d'invariants de similitude pour déterminer si deux matrices sont semblables ou non. On fait ensuite le point sur les invariants partiels (polynôme caractéristiques, minimaux et autres), et les invariants totaux (dimension des noyaux emboîtés) qui permettent d'analyser la situation.

Réduction et formes normales

Vidéo 1 : On présente différentes formes normales pour les classes de similitudes. Formes diagonales, formes diagonales par blocs de Jordan, formes par matrices de compagnon. Ce qui caractérise une "forme normale" est sa simplicité, mais surtout l'unicité d'un élément de cette forme dans une classe. On résout ensuite un exercice de dénombrement des classes de similitude sur corps fini qui illustre notre propos.

Equations matricielles

Vidéo 1 : On va commencer une petite série sur les équations matricielles, vue comme une application classique de la réduction. On veut résoudre sur un exemple (qui se généralise facilement) d'équation de type $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme scindé simple sur un corps $\mathbb{K}$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On voit que l'ensemble des solutions est une réunion de classes de similitude, que l'on cherche à caractériser par leurs formes normales. On pose ensuite le même problème dans le cas Q scindé, amis non simple, ce qui nous oblige à faire appel aux réduites de Jordan. En appendice, on montre comment calculer le nombre de classes de similitude de l'ensemble solution en faisant appel aux séries génératrices.

Vidéo 2 : Après avoir résolu une équation matricielle basée sur un polynôme annulateur scindé, on attaque le plus délicat problème d'un polynôme non scindé. Pour simplifier, nous travaillons dans R. Les méthodes précédentes nous ont permis de résoudre le problème dans $\mathbb{C}$, mais comment obtenir les solutions sur R ? Le résultat repose sur une propriété essentielle de la réduction : deux matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables. On a le même résultat en remplaçant $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $(\mathbb{K},)$ où est une extension de $\mathbb{K}$.

Réduction et topologie

Vidéo 1 : On prouve le théorème d'équivalence des normes : deux normes définissent la même topologie. Ou, dit autrement, toute boule ouverte pour une norme contient une boule ouverte pour l'autre norme (et inversement). Donc, en théorie, on pourra parler de topologie normique sans préciser le choix de la norme. Et en pratique, on pourra selon le type de problème poser, choisir la norme qui nous convient le mieux.

Vidéo 2 : On prouve le théorème d'équivalence des normes : deux normes définissent la même topologie. Ou, dit autrement, toute boule ouverte pour une norme contient une boule ouverte pour l'autre norme (et inversement). Donc, en théorie, on pourra parler de topologie normique sans préciser le choix de la norme. Et en pratique, on pourra selon le type de problème poser, choisir la norme qui nous convient le mieux.

Vidéo 3 : On tente ici de motiver les troupes en expliquant pourquoi la topologie est utile à la réduction. Suites géométriques de matrices, méthodes de Newton pour la résolution d'équations, définition de fonctions analytiques, preuves de propriétés de type algébrique par restriction à une partie dense, caractérisation topologiques de propriétés liées à la réduction. On donne aussi des contre-exemples au théorème d'équivalence des normes (corps non complet, dimension infinie).

Vidéo 4 : Après avoir défini la topologie ambiante, on commence les premières avancées dans l'outil topologique pour la réduction. On commence tout d'abord avec le théorème fondamental qui dit qu'en dimension finie toute forme linéaire est continue. Ce théorème va va nous permettre d'étudier un par un les invariants utilisés dans la réduction sous l'angle aigu de la continuité. Le déterminant, la trace, le polynôme caractéristique, fournissent des fonctions continues. En revanche, le rang est semi-continu inférieurement, ainsi que le polynôme minimal (pour la relation divise).

Vidéo 5 : On attaque le premier morceau : l'étude générale de la suite géométrique (A^m) où A est une matrice carrée complexe. On tombe comme on pouvait s'y attendre à une condition sur le spectre, avec une condition particulière pour la valeur propre 1.

Vidéo 6 : On finit ce volet "réduction et topologie" sur un florilège d'applications (on renvoie l'internaute aux livres Carnet de Voyage en Analystan et Carnet de Voyage en Algébrie pour des énoncés et des preuves précises) allant des suites géométriques de matrices, suites linéaires récurrentes d'ordre k, suites homographiques, théorème de Perron-Frobenius, application de la densité de GL_n, des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$.

Polynômes

Polynômes (7 vidéos)

Vidéo 1 : On définit ici l'anneau des polynômes $A[X]$ (ou $\mathbb{K}[X]$) sur un anneau intègre unitaire A (ou sur un corps $\mathbb{K}$). On en donne une "base", on étudie les propriétés du degré, l'injection naturelle de A dans $A[X]$, et enfin, cette spécificité de l'anneau de polynôme : le morphisme d'évaluation.

Vidéo 2 : On étudie l'arithmétique de l'anneau $K[X]$. Tout commence avec la notion de degré qui permet de définir un division euclidienne. A partir de là tout s'enchaîne : l'anneau $K[X]$ est principal, et donc factoriel. On étudie ensuite les anneaux quotient de $\mathbb{K}[X]$ par un idéal (forcément principal) et on montre que si P est non nul, $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension $\deg(P)$.

Vidéo 3 : On introduit le problème de trouver des racines d'un polynôme de $A[X]$. Cette vidéo est juste un balbutiement sur la nature arithmétique de la recherche de racine : un polynôme qui possède une racine fixée a est forcément multiple de $(X - a)$. Lorsque P annule plusieurs racines distincts a_i, alors P est multiple du produit des $(X - a_i)$.

Vidéo 4 : On étudie la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions polynômes en prenant soin de la distinguer de la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes. Cette distinction se fait à l'aide d'un morphisme d'algèbres entre les deux (de la seconde vers la première). Si le corps $\mathbb{K}$ est infini, alors le morphisme est iso et on peut confondre les deux algèbres. On fait l'étude lorsque le corps $\mathbb{K}$ est fini où l'on exhibe le noyau du morphisme.

Vidéo 5 : On introduit un outil majeur pour comprendre le PGCD de deux polynômes P et Q : le résultant. Pour cela, on introduit le résultant comme le déterminant de la matrice d'une application linéaire qui est iso si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. L'avantage d'avoir un tel critère de primalité entre P et Q par un déterminant est de pouvoir décliner le résultat dans des extensions, mais surtout dans des quotients si P et Q sont à coefficient dans un anneau. On fait également des petits calculs de discriminants en degré 2 et 3.

Vidéo 6 : On commence ici à s'intéresser aux relations coefficients/racines. On introduit de façon naturelle la notion de polynôme symétrique élémentaire et on énonce, sans le prouver, pour de sombres raisons d'hygiène corporelle, le théorème fondamental de polynômes symétriques : tout polynôme symétrique de $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ s'écrit de façon unique comme polynôme à coefficient entier des polynômes symétriques élémentaires. On illustre ce théorème sur un exemple avec la somme s_2 de Newton avant d'attaquer les identités de Newton dans une prochaine vidéo.

Vidéo 7 : On prouve les identités de Newton qui fournissent la somme de Newton s_k par récurrence en fonction des polynômes symétriques élémentaires à n variables. Tout d'abord pour $k = n$ à l'aide de la matrice compagnon, puis pour k plus petit que n et k plus grand que n à l'aide de deux astuces classiques. Pour finir, on résout un "système symétrique" à trois variables.

Agrégation externe et interne de mathématiques : Résultant

Vidéo 1 : On définit le résultant, en insistant sur l'application linéaire dont il est issu que sur l'expression du déterminant qui le définit habituellement. On se propose dans les vidéos qui suivent de donner rapidement un panel d'applications. Pour commencer, on calcule le discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$.

Vidéo 2 : On donne une propriété générale du résultant qui sera la clef des suivantes : le résultant se décline sur les anneaux et est compatible avec les morphismes d'anneaux (dans un sens à préciser). On en déduit deux conséquences importantes. La première dit que si deux polynômes unitaires sur $\mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, ils restent premiers entre eux modulo p premier sauf pour un nombre fini de p. La seconde dit que l'ensemble des entiers algébriques est un anneau (c'est-à-dire stable par l'addition et la multiplication).

Vidéo 3 : On attaque les applications du résultant en géométrie algébrique : intersections de courbes planes, équations cartésiennes d'une courbe rationnelle... et on finit avec une surprise (la différentielle du produit (A, B) et l'inversion locale).

Formes quadratiques-Normes

Formes de Hankel (7 vidéos) *(du cas où P n'a que des racines réelles au cas général)*

On propose ici une série de vidéos qui expliquent progressivement les formes de Hankel. L'idée est de partir d'un polynôme réel et, uniquement à l'aide d'identités de Newton et de la méthode de Gauss (sur les formes quadratiques), trouver son nombre de racines distinctes et de racines réelles.

Vidéo 1 : Pour l'étude d'un cas élémentaire, où les racines sont toutes réelles et distinctes, et la forme de Hankel est définie positive.

Vidéo 2 : Pour l'étude d'un autre cas élémentaire, où les racines sont toutes réelles mais non forcément distinctes, et la forme de Hankel est positive.

Vidéo 3 : Pour trouver la matrice de la forme de Hankel.

Vidéo 4 : Cette fois-ci, les nombres α_i ne sont plus forcément ni distincts ni réels, mais s'il ne sont pas réels, ils seront conjugués.

Vidéo 5 : On va ici, enfin (il était temps !), définir la forme de Hankel associée à un polynôme réel en toute généralité.

Vidéo 6 : On veut dans cette vidéo calculer la signature de la forme de Hankel associée à un polynôme réel T.

Vidéo 7 : On prouve le théorème de Hankel : la signature de la forme de Hankel d'un polynôme réel T "voit" son nombre de racines réelles, et son nombre de racines distinctes.

Exercices sur les formes quadratiques (8 vidéos)

Vidéo 1 : Une généralisation de la formule d'Apollonius, deux exercices sur le gonflement hyperbolique, principe du min-max de Rayleigh, image d'une sphère par une surjection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$, deux vidéos sur l'étude affine des coniques à partir de leur équation cartésienne, les formes quadratiques entières binaires qui servent à voir si deux matrices sont $\mathbb{Z}$-semblables.

Vidéo 2 : Un autre exercice sur les formes quadratiques réelles (ou pas). Il permet de montrer comment déjouer le piège fréquent des formes non "définies positives" de la restriction dégénérée. On n'a plus des orthogonaux en somme directe. On sort alors le remède miracle du "gonflement hyperbolique".

Vidéo 4 : On présente progressivement le principe de Rayleigh ou principe du mini-max en petite dimension. Il s'agit d'une caractérisation géométrique des valeurs propres. On en donne une application amusante sur une fonction trigonométrique.

Vidéo 6 : On attaque en deux vidéos la reconnaissance d'une conique à partir de son équation. On peut juger des coniques non dégénérées à partir de la donnée de deux données : une signature en dimension 2 et un déterminant de taille 3. Cette première vidéo permet d'éliminer les cas dégénérés.

Vidéo 7 : On donne un tableau qui permet une classification affine des coniques à partir de leur équation algébrique. Cette classification se fait grâce au théorème de Sylvester et à partir des trois mineurs principaux associés à la forme quadratique homogénéisée provenant de l'équation de départ.

Matrices de Gram

Une toute petite introduction aux matrices de Gram. Une définition dans le cas euclidien, quelques propriétés et surtout l'application classique au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace. Pour finir, une résurgence de la matrice de Gram à un endroit où l'on ne s'y attend pas...

Epreuve Math Géné 2020 Agreg externe (12 vidéos) *(Suites arithmético-géométriques de matrices, Gram-Schmidt, décomposition QR, inégalité d'Hadamard)*

Vidéo 3 : On montre l'inégalité dite de la borne de Cauchy qui donne un bon majorant pour les module des racines d'un polynôme complexe P. On va en donner un corollaire qui donne une borne aux modules des coefficients des polynôme unitaires qui divisent P.

Vidéo 4 : Voici un lien classique (déjà discuté dans la vidéo 2 du "théorème du confinement") entre la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, la décomposition QR, et l'inégalité d'Hadamard.

Vidéo 7 : On présente ici succinctement le résultant. Il s'agit d'un déterminant qui permet de voir si deux polynômes sont ou non premiers entre eux. Lorsque les deux polynômes sont à coefficients entiers, on peut les réduire modulo p premier et voir, grâce à la réduction du résultant, si les deux polynômes réduits sont ou non premiers entre eux. Si p est assez grand par rapport aux coefficients des deux polynômes, l'inégalité d'Hadamard va montrer que les deux polynômes sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il sont premiers entre eux sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. C'est d'autant plus fort que la décomposition modulo p est plus simple à vérifier que dans $\mathbb{Z}$.

Agrégation externe et interne : minmax et théorème spectral

Vidéo 1 : Le théorème spectral assure qu'une matrice symétrique réelle S est diagonalisable en base orthonormée. On va donner une caractérisation de ses valeurs propres à l'aide de la forme quadratique que S définit naturellement sur $\mathbb{R}^n$ par $q(x) = (x, Sx)$. C'est le principe du minmax appelé également théorème de Rayleigh.

Vidéo 2 : On a vu dans la vidéo 1 une version préliminaire du principe du minimax. Après deux petits exercices sur le sujet, afin de se mettre en jambes, on attaque la preuve du théorème complet appelé aussi théorème de Rayleigh. On trouve la preuve dans Nouvelles Histoires hédonistes de Groupes et de Géométries Chapitre V-D.27.

Normes, boules et stricte convexité

Vidéo 1 : On étudie le problème de stricte convexité des normes sur un espace vectoriel. On montre que l'axiome de stricte convexité correspond à un problème de stricte convexité des boules. On fournit ensuite un petit outillage pour montrer qu'une norme est strictement convexe.

Vidéo 2 : Nous étudions la distance d'un point à un fermé F. On commence dans le cadre où F est un hyperplan affine, une sphère, un fermé quelconque, puis, un fermé convexe dans le cadre d'une norme strictement convexe.

Vidéo 3 : On peut maintenant dans ce troisième volet prouver un théorème de séparation qui dit que si F est un fermé convexe et M un point hors de F, on peut trouver un hyperplan H qui les sépare, c'est-à-dire, un hyperplan qui définit deux demi-espaces ouverts H^+ et H^- tels que x soit dans H^+ et F inclus dans H^-.

Exercices de confinement- normes sur $\mathbb{R}[X]$

Vidéo 1 : On commence une série de petits exercices présentant des contre-exemples sur les normes non équivalentes lorsque les espaces vectoriels sont de dimension infinie.

Vidéo 2 : On continue avec un exercice qui relie certaines normes sur $\mathbb{R}[X]$ à des "compacts infinis" de $\mathbb{R}$. Notons que "compact infini" est une notion essentielle dans les problèmes de prolongements analytiques en analyse complexe.

Vidéo 3 : On attaque un petit dernier sur les normes de $\mathbb{R}[X]$. On introduit une norme un peu farfelue sur $\mathbb{R}[X]$ et on montre que l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour cette norme. Au final, on voit que c'est peine perdue puisqu'un espace à base dénombrable sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être complet pour aucune norme.

Géométrie

Cours 13 agreg interne : Géométrie affine

Vidéo 1 : Voici une introduction à la géométrie affine dans le cadre de l'agrégation. On commence par s'acclimater, voire, se rassurer, avec une mise en relation entre les objets de la géométrie affine et leurs homologues en géométrie vectorielle.

Vidéo 2 : L'axiomatisation de la géométrie affine est plutôt simple, mais on peut l'aborder de deux manières. Une première axiomatisation "d'autorité", consiste à définir une application qui a un bipoint associe un vecteur, puis une définition des transformations affines. Mais on lui préférera la définition par les actions simplements transitives d'un espace vectoriel. Dans ce cadre, les notations et surtout, la définition des transformations affines, sont plus naturelles.

Vidéo 3 : Pour comprendre l'affine, on fait référence à nos connaissances du vectoriel, et ce via la bijection (qui, à v, associe A+v) que l'on obtient entre un espace vectoriel et un espace affine associé. Maintenant, pour comprendre une application affine f, il est pratique d'avoir un point A invariant, c'est-à-dire tel que f(A)=A, car on pourra identifier ainsi f à un endomorphisme phi de l'espace. Or, l'existence d'un point invariant est lié à la réduction (1 est-il dans le spectre de phi ?). Nous voilà revenu dans notre domaine de connaissance !

Vidéo 4 : On vient de voir que si l'endomorphisme associé ϕ à une application affine f ne voit pas 1 parmi son spectre, alors f possède un unique point invariant. Si on note A ce point invariant, la bijection b entre l'espace vectoriel E et l'espace affine muni du point A vérifie $f = b \circ \phi \circ b^{-1}$, et donc, finalement, on peut assimiler f et ϕ, ce qui est bien agréable. Malheureusement, on va devoir étudier les isométries qui ont souvent 1 parmi leur spectre. Il va donc falloir composer des applications affines avec invariant avec des translations. On commence donc par une digression sur la loi rond et surtout, sa représentation matricielle en affine.

Vidéo 5 : On prouve le théorème principal de ce cours : le théorème de décomposition réduite qui donne une condition générale pour qu'une application affine se décomposition unique en une translation (vérifiant certaines hypothèses) et une application affine à point fixe. Ce théorème est la clef pour passer de problèmes affines au monde plus domestiqué de la réduction des endomorphismes.

Cours 14 agreg interne : Géométrie affine euclidienne

Vidéo 1 : On attaque la géométrie affine euclidienne. Après les petites définitions d'usage, on montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même qui laisse invariante la distance euclidienne est nécessairement une application affine. Afin d'étudier ces applications, dites isométries affines, nous allons commencer par montrer que leur endomorphismes associés, c'est-à-dire les isométries vectorielles, vérifient la propriété demandées pour obtenir la décomposition réduite.

Vidéo 2 : On va classifier les isométries affines du plan euclidien. On commence bien entendu par les isométries vectorielles, en mettant l'accent sur l'étude de la valeur propre 1.

Vidéo 3 : On attaque maintenant la classification en dimension 3. Au programme, symétries glissées et vissages qu'il est bon de connaître. Un rapide coup d'oeil à la dimension n nous convaincra que la classification n'est pas beaucoup plus difficile !

Vidéo 4 : Voici un exercice classique à l'oral durant une leçon sur les isométries du plan et de l'espace : la construction des éléments caractéristiques d'une symétrie glissée composée de trois symétries orthogonales par rapport à trois axes du plan euclidien. Présenté par Antoine.

Cours 14 agreg interne : Géométrie affine, barycentres et convexité

Vidéo 1 : Voici un point de vue fécond sur la géométrie affine. On définit la notion de barycentre d'une famille finie de points, et les propriétés d'usage (homogénéïté, associativité). On travaille sur le corps des réels et on définit un ensemble convexe comme un ensemble stable par barycentres positifs, ce qui revient à dire, stable par segments. On montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même est une application affine si et seulement si elle respecte la notion de barycentre. Ce théorème prouve que la convexité est bien au coeur de la notion d'espace affine (réel).

Vidéo 2 : On définit les points extrémaux E_X d'une partie convexe X de l'espace affine (réel). On montre que si g est un élément du groupe affine tel que $g(X) = X$, alors $g(E_X) = E_X$. Ceci va nous aider à comprendre les groupes d'isométries.

Composée d'isométries planes

Vidéo 1 : Un petit compte-rendu (debriefing, ça parle plus peut-être ?) sur la composée d'isométries planes.

Vidéo 2 : Quelques petits exercices de construction d'éléments caractéristiques d'isométries obtenues par composée de deux isométries. L'histoire de vérifier que la vidéo 1 a été bien digérée.

Ellipse de Steiner (6 vidéos) *(Existence, unicité, foyers de l'ellipse)*

On s'intéresse en 6 vidéos à l'ellipse de Steiner associée à un triangle. Plusieurs aspects seront étudiés autour de cette ellipse : géométrie, calcul complexe, groupes de transformations, relations coefficients/racines, équations de coniques ... et le chat Gaston.

Bref, plein de choses qui en effraient plus d'un, mais qui ronronnent tranquille quand on les a adoptées.

Vidéo 2 : Après avoir montré l'existence de l'ellipse de Steiner d'un triangle, on en montre l'unicité. Encore une fois, les groupes de transformations nous permettent de nous ramener à une forme plus sympathique.

Vidéo 3 : On aborde le problème des foyers de l'ellipse de Steiner. Pour l'instant, on ne fait qu'évoquer Gauss-Lucas et montrer que seul le groupe des isométries peut nous apporter quelque chose. Peu, mais ce sera suffisant pour démarrer. Maintenant que l'ellipse de Steiner a été placée dans le plan complexe, axée sur la droite réelle et centrée en 0, on attaque la stratégie de calcul, basée sur la recherche de l'équation de l'ellipse à partir d'une équation de "cercle de Steiner" pour le triangle des racines cubiques de l'unité.

Vidéo 4 : On introduit sous forme complexe une transformation affine.

Vidéo 5 : On est en mesure de calculer l'équation de l'ellipse sous une forme dont on sait déduire les foyers.

Vidéo 6 : A l'aide l'équation de l'ellipse de Steiner, on en calcule les foyers et on vérifie à l'aide de relations coefficients/racines qu'ils coïncident avec les racines du polynôme dérivé du triangle de départ.

Droites, cercles et homographies (5 vidéos) *(cocyclicité, birapport, homographies, préserver le birapport, les droites ou cercles, transitivité de l'action, inégalité de Ptolémée)*

Les droites et cercles du plan sont étudiées à l'aide du calcul complexe, du groupe des homographies... et du birapport.

Vidéo 1 : On introduit, à l'aide des complexes, deux caractérisations de la cocyclicité (ou alignement) de quatre points. Une en termes d'arguments et l'autre de modules.

Vidéo 2 : On présente maintenant le groupe des homographies. Il s'agit d'un groupe de transformations qui contient les translations, les similitudes directes et qui va préserver les cercles et droites. "Oui, mais quand ?" comme dit mon collègue préféré. Et bien quand vous serez prêts à le regarder en face !

Vidéo 3 : On étudie une chaîne d'actions de groupes emboîtés sur le plan complexe (prolongé par l'infini). Les translations amènent à la notion de bipoints équipollents, les similitudes directes à celle de triangles semblables et enfin les homographies à celle de quadruplets de points ayant même birapport. Lorsque ce dernier est réel, les quatre points sont cocycliques ou alignés.

Vidéo 4 : Dans cette vidéo, on montre que le groupe des homographies agit de façon transitive sur l'ensemble des "cercles et droites".

Vidéo 5 : On montre ici l'inégalité de Ptolémée et son cas d'égalité, qui caractérise les quadruplets de points inscriptibles sur un cercle à l'aide des distances entre ces points. Encore une fois, le birapport est en première ligne.

Arithmétique

Exercices de confinement Arithmétique

Vidéo 1 : Voici quelques petits exercices corrigés en arithmétique. Des exercices que l'on peut poser à l'oral, donc généralement plus facile que des exercices d'écrit. Au programme, le théorème fondamental de l'arithmétique, le lemme de Gauss, la fonction d'Euler, le théorème de Lagrange... On ne donne pas d'équations diophantiennes (celles-ci sont déjà dans la playlist "exercices d'arithmétiques").

Vidéo 2 : On résout des petits équations de congruence autour du lemme chinois, puis, lorsque le lemme chinois ne peut pas nous venir en aide (on travaille modulo 17^2), on a une variante avec une méthode de Newton p-adique. Enfin, deux exercices supplémentaires autour de la fonction indicatrice d'Euler.

Vidéo 4 : On revient sur les systèmes (affines) de congruences. On attaque les systèmes à trois équations et le cas où l'on sort du cadre classique du lemme chinois, c'est-à-dire, où les nombres ne sont pas premiers entre eux.

Vidéo 5 : On résout un petit système de congruence dans un cadre "hors lemme chinois" avant de modéliser ce type de système sous forme de suite exacte de groupes.

Vidéo 6 : Voici quelques petits exercices de réduction autour des propriétés arithmétiques du polynôme minimal. On cherche ici le polynôme minimal d'une matrice diagonale, puis, triangulaire, par blocs.

Exercices en Arithmétique (12 vidéos) *(Equations diophantiennes $x^2 + y^2 - 29z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 31z^2$ =0, divisibilité d'un nombre de Fibonacci par un nombre premier, nombre d'automorphismes polynomiaux en une matrice fixée sur un corps fini, cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, divisibilité d'un nombre de Fibonacci par un nombre m, en particulier, n tel que F_n se termine par k zéros en décimal, équation de Pell-Fermat et structure de groupe monogène, puis équation de Pell-Fermat et fractions continues, puis la bataille de hastings : $x^2 - 13y^2 = 1$, le problème du nombre* *de racines m-ièmes d'une matrice compagnon avec le lemme de Hensel)*

Vidéo 1 : On résout ici l'équation diophantienne $x^2 + y^2 - 29z^2 = 0$ en mettant l'accent sur la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Vidéo 2 : On avait déjà vu dans une vidéo sur les "Structures quotient" que $x^2+y^2-31z^2 = 0$ avait pour seule solution $(0, 0, 0)$. Ici, on le montre à la suite de la vidéo "Arithmétique 1" comme application immédiate de la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Vidéo 3 : On avait déjà vu dans une vidéo sur les "Structures quotient" que $x^2+y^2-31z^2 = 0$ avait pour seule solution $(0, 0, 0)$. Ici, on le montre à la suite de la vidéo "Arithmétique 1" comme application immédiate de la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Géométrie différentielle

Courbes solutions de $X' = AX$ (2 vidéos) *(généralités, petits outils préliminaires en dimension n, changement de variable, dérivation sous le signe somme, classification des matrices modulo conjugaison et multiplication par un réel non nul, puis équations des courbes solution en dimension 2)*

Vidéo 1 : Avant d'attaquer le problème de l'allure et la stabilité des solutions des équations différentielles de type $X' = AX$, il est bon de faire quelques préliminaires et de passer à la loupe les outils usuels qu'exige la situation.

Vidéo 2 : On donne une autre approche pour l'allure des courbes dans $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation différentielle $X' = AX$. Cette approche passe par une classification plus grossière que celle des classes de similitude (on s'autorise à multiplier par un scalaire non nul).

Leçons et développements

Racines d'un polynôme fonctions symétriques élémentaires (leçon 144)

Vidéo 1 : Voici une petite présentation des éléments à mettre (selon affinités) dans une leçon sur les racines d'un polynôme.

Vidéo 2 : On continue sur la leçon 144 : racines d'un polynômes. On y propose les fondamentaux de la leçon, quelques petits exercices, et certains développements.

Actions de groupes sur les espaces de matrices (leçon 150)

Une quinzaine de minutes sur la présentation de la leçon 150 : Actions de groupes sur les espaces de matrices à l'oral d'agrégation externe.

Leçon 191-Agrégation externe-Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

Vidéo 1 : On présente ici quelques pistes pour cette nouvelle leçon qui peut en déstabiliser plus d'un mais qui ne manque pas d'intérêt lorsque l'on veut faire le point sur les applications de l'algèbre à la géométrie. Au programme : réduction, déterminant, formes quadratiques, groupes de transformation et leurs invariants, solides platoniciens, corps des complexes, des quaternions, homographies et cercles, théorie des représentations, théorie des corps et constructions à la règle et au compas, géométrie finie, etcetera jusqu'à plus soif !

Vidéo 2 : On va parler plus précisément de cette leçon 191, et le bon ménage que constituent algèbre et géométrie. Dans un premier temps, on parle de l'algèbre linéaire : équations de variétés, utilisation du déterminant, réduction, application à la décomposition canonique en affine.

Vidéo 3 : Toujours dans le cadre de la leçon 191. Voici que débarquent les formes quadratiques avec leur lot de coniques, quadriques, cônes d'Apollonius, et j'en passe.

Vidéo 4 : On s'intéresse ici aux nombreuses applications des groupes à la géométrie. On attaque d'abord l'utilisation de sous-groupes particuliers du groupe affine, avec le problème inverse des milieux. Ensuite, on parle de groupes d'isométries de solides platoniciens, et enfin de la recherche de sous-groupes finis de SO_3.

Vidéo 5 : On insiste ici sur les groupes de transformation. On en donne rapidement le principe : se ramener par action de groupe, et à l'aide d'un invariant de préférence, à une situation plus simple d'un problème de géométrie, tout en préservant les invariants du problème. On en donne trois exemple avec comme invariants l'alignement/barycentre, la métrique, et enfin, la cocyclicité.

Vidéo 6 : Voici le dernier volet de cette longue histoire. Il n'y aura ensuite plus qu'à faire son marché... On termine donc sur les complexes qui rendent plus digestes les similitudes du plan. Il y a des exemples à foison : théorème de Thébault, théorème de Napoléon, cocyclicité, foyers de l'ellipse de Steiner... Si à la place du plan, on veut travailler dans l'espace réel de dimension 3 ou 4, on se sert du corps de quaternions... Ensuite, on parle pêle-mêle de théorie des représentations, de théorie des corps et de la construction à la règle et au compas, de géométrie finie et de géométrie discrète...

Les tutos de la prépa : le théorème de Bohr-Mollerup par Audrey 1 et 2

Les tutos de la prépa : méthode de Newton pour la décomposition polaire par Antoine 1 et 2

leçon 158 Opération d'un groupe sur un ensemble, par Magali

https://www.youtube.com/playlist?list=PLI-uIUgbJUl5EYg-PM7cItnjMkKoteOTf

SO_3 **est simple par Benjamin**

https://www.youtube.com/playlist?list=PLI-uIUgbJUl5y43gcpbr8u0g8

Les tutos de la prépa : le théorème de Riesz par Raphaël

Vidéo 1 : Le théorème de Riesz dit que si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors la boule unité de E n'est pas compacte. Voici la preuve de Raphaël dans le plus pur exercice de style du développement à l'oral de l'agrégation.

Vidéo 2 : Après le développement de Raphaël sur le théorème de Riesz, voici le moment des questions du jury. Cela donne une bonne idée de comment les choses se passent le jour J.