

Le jardin des plaisirs (pour l'interne)

© 12/10/2026



Phil Caldero

17,5 k abonnés 755 vidéos

- [Tuto 2024 du catalogue des vidéos de la chaîne \(le jardin des plaisirs\) \(42'12''\)](#)

Mathématiques, agrégation, master et, surtout, du plaisir, du plaisir et du plaisir...

- [à voir la première année \(256\)](#)
- [à voir la seconde année \(339\)](#)

Les cours sont incontournables ; les exercices, les développements et les thèmes se prennent à l'envi.

Les écrits (504).....	3
1 - Propédeutique (45).....	3
Kits de survie et tutos (8).....	4
2 - Cours (59).....	5
3 - Algèbre linéaire (121).....	15
Les délices de matrices (98).....	15
Déterminant droit devant (19).....	22
Corps finis à l'envi (4).....	23
4 - Les groupes sous tous les angles (50).....	24
5- Arithmétique, anneaux, corps et polynômes (55).....	27
Arithmétique (28).....	27
Anneaux (5).....	29
Corps (2).....	29
Polynômes (20).....	29
6 - Les formes quadratiques en éveil (14).....	32
7- Bouquet de géométries (31).....	33
8 - Un epsilon d'analyse... (28).....	35
9 - Probabilité et combinatoire (14).....	37
10 - Les mathinales du mercredi (18).....	38
11 - Annales (69).....	40
12- Les oraux (144).....	42
Leçons (20).....	43
Développements (86).....	44
Questions d'oral (12).....	50
13 - Divertissements (106).....	52

Les écrits (504)

1 - Propédeutique (45)

- [Carnet de Voyage en Algérie : la présentation \(24'27''\)](#)

La **seconde édition de Carnet de voyage en Algérie** vient d'arriver chez Calvage & Mounet avec son lot de nouveautés que l'on présente ici

- [Carnet de Voyage en Analystan : la présentation \(13'51''\)](#)

La **dernière version de Carnet de voyage en Analystan** vient d'arriver avec son lot de nouveautés que l'on présente ici.

- [Les écrits de l'externe pour l'agrégatif interne ! \(30'13''\)](#)

Une mise au point pour ceux qui veulent **passer les écrits de l'externe avec le bagage de l'interne**.

- [Un livre pour les écrits des agrégations-Le Rouyer-Massicot \(40'42''\)](#)

Je présente un livre co-écrit par Valentin Massicot (avec son professeur à l'université de Reims Julien Rouyer), Valentin que l'on a eu récemment l'occasion d'apprécier sur cette chaîne. Il s'agit pour ma part d'un **livre utile aux candidats qui répond à la question pas si évidente "comment progresser aux écrits ?"**. On détaillera donc le livre pour voir que ce dernier coche un bon nombre de cases ! Ce qui ne nous empêchera pas de faire de la pub pour les éditions Calvage & Mounet en citant au passage quelques fleurons...

Révisions

- [Cahier de vacances-Théorie des ensembles \(25'10''\)](#)

- [Cahier de vacances-Complexes \(23'48''\)](#)

- [Cahier de vacances-Suites \(18'01''\)](#)

- [Cahier de vacances-Fonctions continues \(20'45''\)](#)

- [Cahier de vacances-Polynômes \(38'30''\)](#)

- [Cahier de vacances-Espaces vectoriels \(20'57''\)](#)

- [Cahier de vacances-Applications linéaires \(35'19''\)](#)

- [Cahier de vacances-Dimension \(44'03''\)](#)

- [Cahier de vacances-Matrices \(28'54''\)](#)

- [Cahier de vacances-Matrices-2 \(18'41''\)](#)

- [Questionnaire sur les ensembles et applications \(31'29''\)](#)

- [Questionnaire sur les structures algébriques \(22'50''\)](#)

- [Questionnaire sur l'arithmétique-1 \(30'37''\)](#)

- [Questionnaire sur l'arithmétique-2 \(32'54''\)](#)

- [Questionnaire sur le groupe de permutations \(22'55''\)](#)

- [Questionnaire sur les polynômes \(31'19''\)](#)

- [Questionnaire sur les espaces vectoriels \(26'00''\)](#)

- [Questionnaire sur les espaces euclidiens-1 \(45'40''\)](#)

- [Questionnaire sur les espaces euclidiens-2 \(21'38''\)](#)

- [Questionnaire sur les matrices \(25'43''\)](#)

- [Questionnaire sur les déterminants \(21'57''\)](#)

- [Questionnaire sur la réduction-1 \(30'04''\)](#)

- [Questionnaire sur la réduction 2 \(15'47''\)](#)

- [Questionnaire sur la réduction-3 \(18'44''\)](#)

- [Questionnaire sur les séries entières \(18'21''\)](#)

- [Questionnaire sur les séries \(23'20''\)](#)

- [Questionnaire sur les suites \(25'09''\)](#)

- [Questionnaire sur la topologie \(23'41''\)](#)

- [Propédeutique. Les nombres complexes \(décomplexés\) pour l'AI \(37'45''\)](#)

Histoire de partir d'un bon pied, on passe en revue tout ce qui est utile de savoir sur les nombres complexes (constructions du corps des complexes, calcul complexe, équations en complexe et géométrie des complexes).

- [Petit recueil d'idées reçues-1 - Espaces-vectoriels \(11'33''\)](#)

- [Petit recueil d'idées reçues-2 - Réduction \(14'32''\)](#)

- [Petit recueil d'idées reçues-3 - Polynômes-Groupes-Anneaux \(16'41''\)](#)

- [Petit recueil d'idées reçues-4 - Formes-quadratiques \(10'55''\)](#)

Kits de survie et tutos (8)

- **Kit de survie en Algèbre linéaire par Nina (20'50'')**

Nina fait le point sur l'algèbre linéaire de base qu'il faut savoir dominer l'année de préparation du concours.

- **Kit de survie en Algèbre linéaire par Nina-Dualité et matrices- Kit 2 et 3 (32'14'')**

Nina fait le point sur l'algèbre linéaire de base qu'il faut savoir dominer l'année de préparation du concours. On fait avec elle les premiers pas vers la dualité. Puis elle nous amènera vers le monde des matrices.

- **Kit de survie en Algèbre linéaire par Nina-Déterminant(s)- Kit 4 (19'20'')**

Nina fait le point sur l'algèbre linéaire de base qu'il faut savoir dominer l'année de préparation du concours. On fait avec elle les premiers pas vers le déterminant.

- **Kit de survie en analyse (à l'agrégation interne) par Nina (21'28'')**

Avant de nous parler du principe de la corde universelle, Nina fait le point sur l'analyse de base qu'il faut savoir dominer l'année de préparation du concours.

- **Extraits choisis d'écrits pour l'agrégation interne par Alex (12'53'')**

Rien de tel que les commentaires d'Alex pour nous prévenir des dangers face aux sujets de l'agrégation interne.

- **10 façons de rater l'agrégation par Alex- Partie I: comment rater l'écrit (12'06'')**

Alex a passé plusieurs fois l'agrégation de mathématiques et a fini par l'avoir avec brio! Mais finalement, ses échecs ne sont ils pas plus instructifs que sa victoire?

- **10 (nouvelles) façons de rater l'agrégation par Alex- Partie II: comment rater l'oral (14'36'')**

Alex revient! Il a passé plusieurs fois l'agrégation de mathématiques et a fini par l'avoir avec brio! Mais finalement, ses échecs ne sont ils pas plus instructifs que sa victoire?

- **Les tutos d'Alex: Timeline d'une année de préparation à l'agrégation interne (31'14'')**

Parti de loin, Alex vient d'être reçu à l'agrégation interne de mathématiques avec un rang très honorable! Il nous présente dans cette vidéo sa trajectoire idéale pour une année à succès à l'agrégation interne de mathématiques

2 - Cours (59)

Cours d'algèbre linéaire

• Espaces vectoriels (2h03'50")

On commence un cycle d'algèbre linéaire qui figure au cœur du programme d'algèbre de l'agrégation interne. Ici, il sera question de la définition des espaces vectoriels.

On attaque les premières définitions dans les espaces vectoriels : parties libres, parties génératrices.

On découvre le lemme d'échange qui permet de prouver que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

On montre enfin l'existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie à l'aide du théorème de la base incomplète. On commence à traiter les problèmes sur corps finis.

On a vu que toute partie libre peut être complétée en une base. Ce résultat a son équivalent pour les parties génératrices : on peut en extraire une base. C'est le théorème de la base extraite dont on va tirer une conséquence classique : une partie génératrice est une base si et seulement si elle a le bon nombre d'éléments : la dimension (finie).

En fait, la plupart des espaces vectoriels, que l'on considère, sont des sous-espaces vectoriels d'espaces de référence. On traite donc le cas des sous-espaces vectoriels, leur définition, leur caractérisation. On termine sur le fait qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie.

On change d'envergure avec l'application emblématique de la dimension : elle permet une inclusion réciproque. Il s'agit d'un théorème (en fait, dans le cours, d'un corollaire) qu'il faudra, tout le temps, avoir à l'esprit lorsque l'on traite d'une égalité de sous-espaces vectoriels. On calcule ensuite un problème de dénombrement sur corps fini.

On définit les deux opérations (addition et intersection) sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie (ou pas) E . On donne une caractérisation intrinsèque de ces opérations, puis, on prouve la formule de Grassmann qui met en relation les dimensions des sous-espaces vectoriels considérés.

On commence avec des applications de la formule de Grassmann. On continue avec la définition de la somme directe de deux ou plusieurs sous-espaces et quelques critères de sommes directes.

On généralise le critère sur les sommes directes de deux sous-espaces à plusieurs sous-espaces. Il faut, particulièrement, se méfier ici d'une généralisation hasardeuse. Pour finir, on calcule le nombre de sous-espaces supplémentaires à un sous-espace fixé (sur un corps fini).

• Théorème de la base incomplète en version continue? (19'13")

Le théorème de la base incomplète est probablement le premier pas en algèbre linéaire. Sur un espace réel, il est naturel de se poser la question s'il possède une version continue, c'est-à-dire s'il existe par exemple une application continue qui envoie un vecteur non nul (ie libre) en une base qui le contient. Le résultat pourra en surprendre plus d'un.

• Applications linéaires (1h18'05")

On définit les objets fondamentaux autour des applications linéaires (opérations sur les applications linéaires, noyau et image, théorème fondamental de l'algèbre linéaire, formule du rang). On en déduit ensuite en exercice quelques résultats de dénombrement.

Premières définitions autour des applications linéaires : on définit les applications linéaires entre deux espaces vectoriels. Après quelques motivations, on en donne une forme générale lorsque les deux espaces sont les K -espaces K^n . On donne un exemple fondamental d'isomorphisme avec l'application qui, à un vecteur, associe son n -uplet de coordonnées dans une base fixée.

Opérations sur les applications linéaires : ce volet parle des objets et théorème fondamentaux autour des applications linéaires : l'addition, la multiplication par un scalaire, la composition et, enfin, le théorème fondamental qui assure l'existence et l'unicité d'une application à partir de l'image de l'espace de départ.

Théorème fondamental de l'algèbre linéaire : dans cette vidéo, on traite de l'injectivité et de la surjectivité, qui sont les deux ingrédients de la bijectivité. On commence par faire quelques petits rappels de ces notions dans le cadre de la théorie des ensembles, puis, on regarde comment détecter l'injectivité et la surjectivité dans le cadre de l'algèbre linéaire (en dimension finie). On commence par des objets géométriques (noyau et image), puis des entiers (dimensions des noyaux et images) et, enfin, on finit par des critères par l'image d'une base.

Applications injectives et surjectives : it's play time! On va maintenant tester nos connaissances en matière d'applications linéaires en comptant sur un corps fini tout ce que l'on a défini et étudié.

Dénombrement sur corps fini : on attaque le théorème central du cours sur les applications linéaires (qui aura un avatar encore plus puissant avec les matrices !), la formule du rang qui met en relation la dimension du noyau d'une application linéaire f de E dans F , le rang de f (la dimension de l'image) et la dimension de l'espace de DEPART. Comme corollaire, on en déduit une caractérisation de la surjectivité par la dimension du noyau et dans le cas particulier où $\dim(E)=\dim(F)$ (par exemple pour les endomorphismes), qu'injectif est équivalent à surjectif. On donne deux contre-exemples en dimension finie.

La formule du rang et ses corollaires : une vidéo de synthèse pour tester notre compréhension du cours et de toutes ces petites choses qui se cachent derrière. On calcule le nombre d'applications linéaires surjectives d'un espace vectoriel vers un autre (sur un corps fini). L'idée est de basculer, à l'aide de la formule du rang, de la surjectivité, à l'injectivité, que l'on sait faire, puisque l'on sait compter les parties libres.

• Dualité (2h29'07")

Le dual est à la dualité ce que le conjoint est au couple. C'est dire si l'affaire est sérieuse ! On commence par parler de ce que l'on appelle le dual mais, surtout, la dualité (en dimension finie). On exhibe, tout d'abord, un tableau qui transforme un objet de l'algèbre linéaire en un objet "dual". Ensuite, on définit la "base duale" en dimension finie, on écrit deux formules qui se révéleront très pratiques, dans la suite, et on fournit un contre-exemple, en dimension infinie, où la "famille duale" d'une base n'est pas une base (elle est en fait uniquement libre mais non génératrice).

On vient de voir les bases duales. Comment le changement de base duale dans E^* s'opère-t-il en fonction d'un changement de base fixé dans E ? On se rend compte que si l'on part d'une matrice de passage P dans l'espace alors on obtient une matrice de passage Q dans l'espace dual qui se trouve être, en générale, différente de P (Q est l'inverse de la transposée de P). Mais si l'on dualise une fois de plus la base duale, on obtient une matrice de passage à nouveau égale à P . Ceci permet de voir qu'il y a un isomorphisme indépendant d'une base choisie entre un espace E et son bi-dual.

On donne deux applications de la dualité, une à la formule d'interpolation de Lagrange, et une autre à la formule de Taylor polynomiale. On montre que ces deux formules découlent d'une démarche standard impliquant la recherche de bases duales l'une de l'autre.

On discrétise la formule de Taylor pour obtenir une formule générale qui calcule la somme $P(0) + P(1) + \dots + P(m)$ pour tout polynôme P . On ne se prive pas d'utiliser la dualité.

On étudie maintenant la dualité des sous-espaces vectoriels pour aboutir à la notion d'orthogonal d'un sous-espace (attention, cet orthogonal doit être vu dans le dual !). On donne la dimension de cet orthogonal, puis, on étudie la dualité des opérations sur les sous-espaces vectoriels.

On introduit les hyperplans comme l'orthogonal d'une droite. Si une droite est un sous-espace non nul ayant un minimum de degrés de liberté, un hyperplan peut être vu comme un sous-espace ayant un minimum de contraintes. On discute les sous-espaces comme intersections d'hyperplans, ce qui revient à obtenir un sous-espace par son équation cartésienne.

Dans cette vidéo, on présente la transposée d'une application linéaire. Même si, au final, elle correspond à la banale transposée d'une matrice, cette notion abstraite de transposée d'application linéaire demande une certaine habileté dans le maniement. On prouve que la transposée fournit une bijection linéaire entre les espaces $L(E, F)$ et $L(F^*, E^*)$.

On montre ici que la transposée, qui envoie bijectivement l'espace $L(E, F)$ sur $L(F^*, E^*)$, envoie les injectifs sur les surjectifs et, inversement, les noyaux sur les images. Ce qui nous permet d'achever le dictionnaire de la dualité que nous avons mis en introduction du cours 5.

On jongle ici avec le bi-dual pour montrer que la transposée est involutive. Mais si f est dans l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires, la transposée de sa transposée est dans $L(E'', F'')$. Que signifie donc l'égalité entre deux éléments qui n'appartiennent pas au même ensemble ? On va essayer d'expliquer cette subtilité. Ceux qui ne sont pas sensibles au concept alambiqué de bi-dual pourront se contenter de constater que la transposée possède une version matricielle beaucoup plus pratique.

On fait le point sur des applications de la dualité dans le programme et les développements de de l'agreg (interne ou externe). On trouvera des applications aux polynômes, aux matrices, en analyse, topologie et, bien sûr, dans le cadre des formes quadratiques.

• Formes linéaires, dual en dimension infinie - Des contre-exemples à connaître (19'20'')

Nos étudiants apprennent d'une part, l'algèbre, sa dimension (presque toujours) finie et sa dualité, et d'autre part l'analyse où les espaces sont munis d'un dual topologique (les formes linéaires continues). Dans un angle mort de l'enseignement se trouve le (vrai) dual en dimension infinie. Il est bon de connaître quelques idées directrices intuitives ainsi que contre-exemples qui montrent que certains résultats classiques en dimension finie ne se généralisent pas quand la dimension devient, ne serait-ce que dénombrable.

• Matrices (1h26'34'')

On introduit enfin les matrices comme objet de calcul au service des applications linéaires. Pour l'instant, on observe les liens entre matrices et applications linéaires en mettant l'accent sur le fait que ces liens dépendent de choix de bases. En même temps, on définit les coordonnées (en colonne) des vecteurs dans une base et en ligne des formes linéaires dans la base duale.

On discute des opérations sur les matrices : l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication de deux matrices (multipliables), le tout, en lien avec ce que ces opérations informent sur des opérations dans le monde des applications linéaires.

On définit deux involutions sur les matrices, la transposée et l'inversion des matrices (carrées inversibles !). On regarde à quoi correspond ces deux inversions dans le monde des applications linéaires (ou des endomorphismes).

On présente les matrices de passage comme des matrices de l'application linéaire (en fait, l'endomorphisme) identité avec pour base de départ la nouvelle base et pour base d'arrivée l'ancienne base puis on montre que cette définition permet de retrouver très facilement toutes les formules sur les matrices de passage.

On discute et on prouve enfin l'incontournable théorème du rang qui dit que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

On finit en beauté en calculant le nombre de matrices de taille (m, n) de rang r sur un corps fini de cardinal q . On le fait par application systématique du lemme de Berger et en suivant la preuve du théorème du rang.

• Déterminant (1h52'17'')

A travers les résultats successifs, on voit comment le déterminant, qui démarre comme un calcul un peu pataud sur une matrice carrée, acquiert ses titres de noblesses. Le but de cette playlist est de fournir les clefs d'une leçon sur le déterminant, tout en préparant le prochain cours sur la réduction. Ici, on montre le théorème principal du déterminant en insistant sur l'unicité d'une fonction vérifiant des propriétés simples, plutôt que sur sa formule explicite.

On prouve et on illustre le théorème principal d'existence et d'unicité du déterminant.

On a montré que l'ensemble des applications de $M_n(K)$ dans K qui sont, à la fois, n -linéaires et alternées sont toutes proportionnelles au déterminant (et réciproquement). On montre plusieurs conséquences pratiques et théoriques de ce résultat : déterminant des matrices triangulaires, triangulaires par blocs, invariance par transposition du déterminant. Mais c'est, surtout, la multiplicativité du déterminant qui aura des conséquences profondes sur la suite du cours d'algèbre linéaire.

On observe les conséquences de la multiplicativité du déterminant : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ceci implique la stabilité par conjugaison du déterminant mais aussi le fait que le déterminant est capable de déceler si un système forme ou non une base d'où son nom amplement mérité. Mieux, l'invariance par conjugaison permet d'élever le rôle du déterminant : on peut définir le déterminant d'un endomorphisme indépendamment d'un choix de base. Enfin, on définit la notion de mineur et on énonce la formule qui donne explicitement l'inverse d'une matrice inversible en fonction de la transposée de la comatrice. Elle sera prouvée dans la prochaine partie.

On attaque la preuve de la formule explicite de l'inverse d'une matrice (inversible). On étudie ensuite les systèmes de Cramer.

Voici une preuve d'un résultat sur le déterminant qui aura de multiples (mais bénéfiques) conséquences. Le rang d'une matrice (rectangulaire, soyons fous) est égal à la taille maximale d'un mineur non nul. On illustre le déterminant dans sa maîtrise des contraintes : il peut donner l'équation d'une droite, vectorielle, affine et même l'équation d'un cercle. On pourrait continuer avec les coniques mais on s'arrêtera là.

Une petite partie presque simpliste sur le déterminant comme forme volume.

On va parler sans preuves de généralisations des résultats classiques sur le déterminant. Tout d'abord, le développement par rapport à une colonne (ou une ligne) se généralise en développement de Laplace ou développement par rapport à une famille de colonnes (je me souviens qu'en math sup, j'avais intuité ce résultat mais n'ayant pas le sens de l'effort à l'époque, la rencontre avec la preuve ne s'était pas faite). Mais le résultat le plus important est la formule de Binet (qui généralise la multiplicativité du déterminant lorsque l'on fait le

produit de deux matrices rectangulaires). On parle ensuite (un peu trop pour certains et pas assez pour d'autres) de **l'importance de cette formule en théorie des représentations et en géométrie algébrique**.

● Polynômes d'endomorphismes - Partie I (55'19")

On commence un nouveau cours d'agrégation interne sur la réduction. Tout d'abord, avec une partie motivation, l'histoire de **comprendre où l'on va à partir de ce que l'on sait déjà**. On rappelle donc brièvement ce que l'on a fait avec les applications linéaires et leurs matrices, l'histoire de lancer le programme.

On commence par **définir les polynômes d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E** . Ceci est défini comme **un morphisme d'algèbre allant de l'algèbre de polynômes $K[X]$ vers l'algèbre des endomorphismes de E** . Ce morphisme définit, d'une part, l'algèbre des polynômes de l'endomorphisme u et, d'autre part, le polynôme minimal de u , vu comme générateur de l'idéal noyau.

On attaque la preuve du lemme des noyaux, qui peut être vu comme un avatar de l'identité de Bezout (et finalement l'arithmétique des polynômes) dans la géométrie de l'espace E "muni de l'endomorphisme u ".

En mathématiques, on est toujours confronté au choix de la théorie et de la pratique. Le polynôme minimal est un polynôme annulateur (d'un endomorphisme u), plutôt du côté de la théorie. En revanche, le polynôme caractéristique est un polynôme plus facilement calculable par sa définition et également annulateur par Cayley-Hamilton. Ses racines sont les valeurs propres de l'endomorphisme u .

● Polynômes d'endomorphismes - Partie II (43'57")

On prouve ici le théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnon. Les propriétés du polynôme caractéristique : degré, indépendance du corps, divisibilité par le polynôme minimal μ et divise μ^n . On a montré que le polynôme caractéristique était "coïncé" entre le polynôme minimal et une puissance (égale à la dimension de l'espace) du polynôme minimal. On en donne une preuve alternative instructive lorsque le corps est le corps des complexes (ou un corps algébriquement clos). On en déduit ensuite le polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme restreint aux sous-espaces caractéristiques.

● Les polynômes (1h33'52")

La théorie des polynômes est intéressante en soi, mais avant tout, elle **constitue un outil incontournable en algèbre linéaire** ainsi qu'en analyse. Voici un mini-cours où nous allons visiter les divers aspects de la théorie. Dans un premier temps, il s'agit de **premières définitions et d'arithmétique des polynômes à travers l'évaluation et la division euclidienne** : on définit ici l'anneau des polynômes $A[X]$ (ou $K[X]$) sur un anneau intègre unitaire A (ou sur un corps K) et on en donne une "base", on étudie la notion de degré et ses propriétés qui permettent de définir une division euclidienne. On traite de l'injection naturelle de A dans $A[X]$ et, enfin, cette spécificité de l'anneau de polynôme : le morphisme d'évaluation. A partir de là tout s'enchaîne : l'anneau $K[X]$ est principal donc factoriel. On étudie, ensuite, les anneaux quotient de $K[X]$ par un idéal (forcément principal) et on montre que si P est non nul $K[X]/(P)$ est un K -espace de dimension $\deg(P)$.

On en vient à des aspects plus éloignés de l'arithmétique comme les racines d'un polynôme, les polynômes versus les fonctions polynômes. On fera également un détour du côté du résultant et on finira par les relations coefficients/racines...

On introduit le problème : comment trouver des racines d'un polynôme de $A[X]$. Cette vidéo est juste un balbutiement sur la nature arithmétique de la recherche de racine : un polynôme qui possède une racine fixée a est forcément multiple de $(X-a)$. Lorsque P annule plusieurs racines distincts a_i , alors P est multiple du produit des $(X-a_i)$. On étudie la **K -algèbre des fonctions polynômes en prenant soin de la distinguer de la K -algèbre des polynômes**. Cette distinction se fait à l'aide d'un morphisme d'algèbres entre les deux (de la seconde vers la première). Si le corps K est infini alors le morphisme est un isomorphisme et on peut confondre les deux algèbres. On fait l'étude lorsque le corps K est fini où l'on exhibe le noyau du morphisme.

On introduit un outil majeur pour comprendre le PGCD de deux polynômes P et Q : le résultant. Pour cela, on introduit le résultant comme le déterminant de la matrice d'une application linéaire qui est isomorphe si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. L'avantage d'avoir un tel critère de primalité entre P et Q par un déterminant est de pouvoir décliner le résultat dans des extensions mais, surtout, dans des quotients si P et Q sont à coefficient dans un anneau. On fait également des petits calculs de discriminants en degré 2 et 3.

On commence ici à s'intéresser aux relations coefficients/racines en introduisant de façon naturelle la notion de polynôme symétrique élémentaire et on énonce, sans le prouver, pour de sombres raisons d'hygiène corporelle, le **théorème fondamental de polynômes symétriques** qui annonce que tout polynôme symétrique de $Z[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit de façon unique comme polynôme à coefficient entier des polynômes symétriques élémentaires. On illustre ce théorème sur un exemple avec la somme s_2 de Newton avant d'attaquer les identités de Newton qui fournissent la somme de Newton s_k par récurrence en fonction des polynômes symétriques élémentaires à n variables. Tout d'abord pour $k=n$ à l'aide de la matrice compagnon, puis pour k plus petit que n et k plus grand que n à l'aide de deux astuces classiques. Pour finir, on résout un "système symétrique" à trois variables.

● Réduction diagonalisation (43'50")

Voici la suite du cours sur la réduction. On étudie les matrices dites diagonalisables et on donne tous les critères classiques de diagonalisabilité, allant des critères géométriques aux critères, plus efficaces, qui impliquent les polynômes.

On présente les grands classiques des applications des critères polynomiaux de la diagonalisabilité. 1) l'induit d'un diagonalisable à un sous espace stable est encore diagonalisable, 2) la diagonalisation simultanée et 3) diagonalisabilité des endomorphismes de multiplication par une matrice.

On tente ici de définir des fonctions "inverses" sur les matrices, comme la racine k ième, le logarithme... On se rend compte que même si ces fonctions existent bien sur C , elles ne sont pas forcément définissables sur $M_n(C)$. La diagonalisabilité nous permet de le faire à l'aide de polynômes interpolateurs de Lagrange. Dans le cas non diagonalisable, on s'en sort sur un ouvert, en utilisant la décomposition de Dunford et en remplaçant astucieusement les séries de Taylor par des polynômes en une matrice nilpotente.

● Réduction trigonalisation (47'55")

On donne l'analogue des critères de diagonalisation dans le cadre de la trigonalisation sur un corps K . On a bien entendu le critère par le polynôme caractéristique scindé sur K mais aussi un critère plus fort par l'existence d'un polynôme annulateur scindé. Enfin, un critère géométrique est le bienvenu. Il se fera par l'existence d'un drapeau complet stable.

On donne des raffinements et des applications à la trigonalisation. Tout d'abord, le critère du polynôme annulateur scindé et comme application la trigonalisation simultanée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent. Nous passons ensuite à une jolie application qui peut être vue comme un "Cayley-Hamilton à plusieurs variables".

On ouvre un volet sur les applications de la trigonalisation et de la trigonalisation simultanée (pour deux matrices trigonalisables qui commutent). On montre que le spectre de la puissance est la puissance du spectre et que l'on a les mêmes commutations du langage avec l'exponentielle... On montre ensuite une version plus fine de la trigonalisation : si A est une matrice trigonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaire à spectre singleton. La taille d'un bloc associé à une valeur propre est la multiplicité algébrique de la valeur propre. C'est la porte ouverte sur la décomposition de Dunford.

● Réduction et formes normales (16'05'')

On présente **différentes formes normales pour les classes de similitudes**. Formes diagonales, formes diagonales par blocs de Jordan, formes par matrices de compagnon. **Ce qui caractérise une "forme normale" est sa simplicité et, surtout, l'unicité d'un élément de cette forme dans une classe.** On résout ensuite un exercice de dénombrement des classes de similitude sur corps fini qui illustre notre propos.

● Réduction et invariants de similitude (35'17'')

On a collecté suffisamment de résultats généraux pour commencer une série d'exercices à thème. On commence ici avec le thème des matrices semblables. On va donc passer par ce que l'on appelle **les invariants de similitudes**. Mais, **contrairement au cas des matrices équivalentes où tout était résolu avec le rang, les choses ne sont pas simples...** On peut tout de même voir dans certains cas que deux matrices ne sont pas semblables mais on mesure en même temps la faiblesse de nos critères. Patience...

On commence avec un exercice qui permet de **faire un petit tour du domaine en matière d'invariants de similitude pour déterminer si deux matrices sont semblables ou non**. On fait ensuite le point sur **les invariants partiels (polynôme caractéristique, minimaux et autres) et les invariants totaux (dimension des noyaux emboîtés)** qui permettent d'analyser la situation.

● Equations matricielles à l'agrégation (1h06'12'')

On va commencer une petite série sur les équations matricielles vues comme une application classique de la réduction. On veut résoudre sur un exemple (qui se généralise facilement) d'équation de type $Q(X)=0$, où Q est un polynôme scindé simple sur un corps K et X une matrice de $M_n(K)$. On voit que **l'ensemble des solutions est une réunion de classes de similitude, que l'on cherche à caractériser par leurs formes normales**. On pose ensuite le même problème dans le cas Q scindé, amis non simples, ce qui nous oblige à **faire appel aux réduites de Jordan**. En appendice, on montre comment calculer le nombre de classes de similitude de l'ensemble solution **en faisant appel aux séries génératrices**.

Après avoir résolu une équation matricielle basée sur un polynôme annulateur scindé, on attaque le plus délicat problème d'un polynôme non scindé. Pour simplifier, nous travaillons dans $\mathbb{R}$. Les méthodes précédentes nous ont permis de résoudre le problème dans $\mathbb{C}$ mais comment obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$? Le résultat repose sur **une propriété essentielle de la réduction : deux matrices réelles $\mathbb{C}$ -semblables sont $\mathbb{R}$ -semblables. On a le même résultat en remplaçant $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par (K, L) où L est une extension de K .**

On montre ici quelques techniques (non exhaustives) pour trouver les racines k èmes d'une matrice B , lorsque cela est possible. On se ramène grâce au lemme des noyaux au cas où le spectre de B est singleton. Si B est nilpotente, il n'y a pas toujours de solution, mais si B est inversible, on trouve toujours une solution à l'aide d'un lemme qui permet de relever le développement de Taylor de $(1+x)^{1/k}$ en 0 en une expression polynomiale. On finit ce volet en indiquant à qui veut bien l'entendre, **le bon cadre pour le problème : la théorie des représentations de carquois**. Errata : lire $(1+x)^{1/k}$ au lieu de $(1+x)^{1/n}$ dans la vidéo puis mettre l'égalité à la puissance k .

Enfin, on revient sur ce petit lemme qui permet de passer d'un développement de Taylor, sur $\mathbb{R}$, à une formule analogue au niveau matriciel. On va même un peu plus loin, si on sait que l'exponentielle fournit une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur les matrices unipotentes, on obtient que des jolies formules d'inversion sur les matrices (racines k èmes, logarithmes).

● Topologie en algèbre linéaire (1h33'29'')

On commence un nouveau volet sur la topologie des espaces vectoriels réels et complexes, en dimension finie, et liée à la réduction. Pour débiter d'un bon pied, on parle du **théorème d'équivalence des normes : deux normes définissent la même topologie**. Ou, dit autrement, toute boule ouverte pour une norme contient une boule ouverte pour l'autre norme (et inversement). Donc, en théorie, on pourra parler de topologie normique sans préciser le choix de la norme. Et en pratique, selon le type de problème posé, on pourra choisir la norme qui nous convient le mieux.

On essaie de motiver les troupes autour de l'utilisation de la topologie en algèbre linéaire et plus particulièrement dans le cadre de la réduction. Au menu : critères de convergence de suites géométriques de matrices, méthodes de Newton pour la résolution d'équations, définition de fonctions analytiques, preuves de propriétés de type algébrique par restriction à une partie dense, caractérisation topologique de propriétés liées à la réduction. On donne aussi des contre-exemples au théorème d'équivalence des normes (corps non complet, dimension infinie).

Après avoir défini la topologie ambiante, on commence les premières avancées dans l'outil topologique pour la réduction. On commence tout d'abord avec **le théorème fondamental qui dit qu'en dimension finie toute forme linéaire est continue** et ses conséquences. Ce théorème va nous permettre d'étudier un par un **les invariants utilisés dans la réduction sous l'angle aigu de la continuité. Le déterminant, la trace, le polynôme caractéristique, fournissent des fonctions continues**. En revanche, le rang est semi-continu, inférieurement, ainsi que le polynôme minimal (pour la relation divisée).

On attaque l'étude générale de la suite géométrique (A^n) où A est une matrice carrée complexe. On tombe comme on pouvait s'y attendre à une condition sur le spectre, avec une condition particulière pour la valeur propre 1. On finit par un florilège d'applications, d'exemples d'utilisation sur l'association topologie et réduction (on renvoie l'internaute aux livres **Carnet de Voyage en Analyste** et **Carnet de Voyage en Algèbre** pour des énoncés et des preuves précises) allant des suites géométriques de matrices, suites linéaires récurrentes d'ordre k , suites homographiques, théorème de Perron-Frobenius, application de la densité de GL_n , des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$.

● Formes quadratiques-1 (1h22'02'')

Les formes quadratiques exposées pour un cours d'agrégation interne (et externe si on généralise à un corps de caractéristique différente de 2). On trouve dans ce premier cours **toutes les premières définitions et toutes les connexions entre formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques, matrices symétriques et changement de base**.

Dans cette deuxième partie, on attaque (enfin !) **des exemples classiques : formes quadratiques sur les espaces $\mathbb{R}^n$, sur les espaces de polynômes et enfin sur les espaces de matrices**.

On étudie l'orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique (dans le cas où celle-ci est non dégénérée, ce qui demande une petite définition préalable). On se rend compte que les choses ne cadrent pas tout à fait avec l'intuition que l'on se fait de l'orthogonalité : certains sous-espaces ne sont pas en somme directe avec leur orthogonaux. On a alors besoin d'un critère pour assurer que tout se passe bien.

● Formes quadratiques-2 (1h37'57")

Nous cherchons, maintenant, les formes quadratiques telles que tout sous-espace possède un orthogonal en somme directe. Sur $\mathbb{R}$, on tombe naturellement sur la notion de forme quadratique définie. On fournit plusieurs critères, de natures différentes, pour qu'une forme quadratique soit définie positive.

On introduit, avec les motivations qui s'imposent, la notion d'adjoint d'un endomorphisme.

On attaque ici le gros morceau du cours (et ce ne sera pas le seul !) : le théorème de Sylvester. On va insister lourdement sur le fait qu'il se décompose en deux parties : existence et unicité de la signature ! La preuve, utilisée pour l'existence, se fait sur le critère d'orthogonal en somme directe que nous avons rencontré précédemment et, pour l'unicité, on utilisera la dimension maximale d'un sous-espace défini positif.

On présente, enfin, le théorème spectral comme conséquence directe du théorème d'orthogonalisation simultanée. Cela fournit un développement agréable que l'on peut trouver dans *Carnet de Voyage en Algèbre*.

● Le principe du min-max (44'51")

Comment les formes quadratiques voient les valeurs propres de leur matrice symétrique associée (dans une BON) ?

Partie I. Le théorème spectral assure qu'une matrice symétrique réelle S est diagonalisable en base orthonormée (BON). On va donner une caractérisation de ses valeurs propres à l'aide de la forme quadratique que S définit naturellement sur $\mathbb{R}^n$ par $q(x) = \langle x, Sx \rangle$. C'est le principe du min-max appelé, également, théorème de Rayleigh.

Partie II. On vient de voir une version préliminaire du principe du minimax. Après deux petits exercices sur le sujet, afin de se mettre en jambes, on attaque la preuve du théorème complet appelé aussi théorème de Rayleigh. On trouve la preuve dans *Nouvelles Histoires hédonistes de Groupes et de Géométries Chapitre V-D.27*.

Partie III. (Plus pour l'agreg externe que l'interne) On termine en prouvant les inégalités de Weyl et le théorème d'entrelacement de Cauchy.

● Prépa à l'écrit - Formes quadratiques 1/8 (15'55")

Une série d'exercices sur les formes quadratiques pour préparer les écrits de l'agrégation. Le théorème d'Apollonius est un théorème classique sur des propriétés métriques du triangle. Ce premier exercice en donne une formulation moderne. Attention, à la fin, il y a une erreur de calcul, il faut lire $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OI^2 + 2/3 AJ^2 + 1/2 BC^2$ (au lieu de $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 4/3OI^2 + 2/3 AJ^2 + 1/2 BC^2$)

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 2/8 (17'22")

Un autre exercice sur les formes quadratiques réelles (ou pas). Il permet de montrer comment déjouer le piège fréquent des formes non "définies positives" de la restriction dégénérée. On n'a plus des orthogonaux en somme directe. On sort alors le remède miracle du "gonflement hyperbolique".

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 3/8 (16'18")

On va se servir du gonflement hyperbolique dans un cas simple : Soit E un espace réel muni d'une forme quadratique non dégénérée q , on veut montrer que le groupe des isométries de q agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs isotropes non nuls de E . Comment faisait-on pour montrer que O_n agit transitivement sur la sphère, on prenait un élément de norme 1 et on le complétait en une base orthonormée. Là, c'est pareil, sauf qu'il n'y a pas de base orthonormée.

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 4/8 (14'01")

On présente progressivement le principe de Rayleigh ou principe du mini-max en petite dimension. Il s'agit d'une caractérisation géométrique des valeurs propres. On en donne une application amusante sur une fonction trigonométrique.

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 5/8 (16'40")

On veut montrer qu'en "écrasant" une sphère de façon linéaire sur un plan, on tombe sur l'intérieur d'une ellipse et l'on voudrait aussi relier les éléments caractéristiques de l'ellipse avec la transformation linéaire. Encore une fois, le théorème spectral agit de façon magistrale sur les éléments.

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 6/8 (15'18")

On attaque en deux vidéos la reconnaissance d'une conique à partir de son équation. On peut juger des coniques non dégénérées à partir de la donnée de deux données : une signature en dimension 2 et un déterminant de taille 3. Cette première vidéo permet d'éliminer les cas dégénérés.

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 7/8 (15'33")

On donne un tableau qui permet une classification affine des coniques à partir de leur équation algébrique. Cette classification se fait grâce au théorème de Sylvester et à partir des trois mineurs principaux associés à la forme quadratique homogénéisée provenant de l'équation de départ.

● Prépa à l'écrit Formes quadratiques 8/8 (16'34")

On connaissait un lien fort entre formes quadratiques et réduction avec le théorème spectral. En voici un autre en arithmétique qui permet de voir si deux matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ sont $\mathbb{Z}$ -semblables en leur associant des formes quadratiques. La $\mathbb{Z}$ -similitude s'interprète alors sous forme de congruence des formes quadratiques.

● Questionnaire sur les formes quadratiques (1h 08'14")

Cours de géométrie et compléments

● Matrices hermitiennes (57'18")

Voici un premier volet sur les formes hermitiennes. On suppose connus les résultats analogues sur les formes bilinéaires symétriques (congruence, Sylvester et théorème spectral) et on donne le résultat équivalent dans le cas hermitien.

On introduit, dans le cadre d'un espace hermitien, la notion d'adjoint d'un endomorphisme. On montre, en préambule, l'existence et l'unicité d'un tel adjoint, puis, le fait que, dans une base orthonormée (ou unitaire), la matrice de l'adjoint est la trans-conjuguée de la matrice de l'endomorphisme de départ. On prouve, ensuite, le théorème des endomorphismes normaux qui stipule qu'un endomorphisme est diagonalisable en base orthonormée (BON) si et seulement s'il commute avec son adjoint.

On donne des exemples célèbres de matrices normales : matrices hermitiennes, anti-hermitiennes, unitaires et leurs équivalents réels. On fait ensuite le point sur la façon dont les matrices hermitiennes et anti-hermitiennes généralisent la partie réelle et imaginaire...

● Géométrie affine - le minimum vital à l'interne (43'08")

Un beamer pour présenter le minimum à savoir sur la géométrie affine aux écrits de l'agrégation. Au menu : structure affine (version 1 et 2), sous-espaces affines, applications affines, repères affines et représentations matricielles, recherche de point fixe et un petit formulaire de survie.

● Géométrie affine - I (43'52")

Voici une introduction à la géométrie affine dans le cadre de l'agrégation. On commence par s'acclimater, voire se rassurer, avec une mise en relation entre les objets de la géométrie affine et leurs homologues en géométrie vectorielle.

L'axiomatisation de la géométrie affine est plutôt simple mais on peut l'aborder de deux manières. Une première axiomatisation "d'autorité" consiste à définir une application qui, à un bipoint, associe un vecteur puis une définition des transformations affines. Mais, on lui préférera la définition par les actions simplement transitives d'un espace vectoriel. Dans ce cadre, les notations et, surtout, la définition des transformations affines, sont plus naturelles.

Pour comprendre l'anneau, on fait référence à nos connaissances du vectoriel et, ce, via la bijection (qui, à v , associe $A+v$) que l'on obtient entre un espace vectoriel et un espace affine associé. Maintenant, pour comprendre une application affine f , il est pratique d'avoir un point A invariant, c'est-à-dire tel que $f(A)=A$, car on pourra identifier ainsi f à un endomorphisme φ de l'espace. Or, l'existence d'un point invariant est liée à la réduction (1 est-il dans le spectre de φ ?). Nous voilà revenu dans notre domaine de connaissance !

● Géométrie affine - II (37'29")

On vient de voir que si l'endomorphisme associé φ à une application affine f ne voit pas 1 parmi son spectre alors f possède un unique point invariant. Si on note A ce point invariant, la bijection b entre l'espace vectoriel E et l'espace affine muni du point A vérifie $f=b \circ \varphi \circ b^{-1}$, et donc, finalement, on peut assimiler f et φ , ce qui est bien agréable. Malheureusement, on va devoir étudier les isométries qui ont souvent 1 parmi leur spectre. Il va donc falloir composer des applications affines avec invariant avec des translations. On commence donc par une digression sur la loi $\circ$ et sa représentation matricielle en affine.

On prouve le théorème principal de ce cours : le théorème de décomposition réduite qui donne une condition générale pour qu'une application affine se décompose de façon unique en une translation (vérifiant certaines hypothèses) et une application affine à point fixe. Ce théorème est la clef pour passer de problèmes affines au monde plus domestiqué de la réduction des endomorphismes.

● Géométrie euclidienne (33'14")

On attaque la géométrie affine euclidienne. Après les petites définitions d'usage, on montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même qui laisse invariante la distance euclidienne est nécessairement une application affine. Afin d'étudier ces applications, dites isométries affines, nous allons commencer par montrer que leurs endomorphismes associés, c'est-à-dire les isométries vectorielles, vérifient la propriété demandée pour obtenir la décomposition réduite.

On va classer les isométries affines du plan euclidien. On commence bien entendu par les isométries vectorielles, en mettant l'accent sur l'étude de la valeur propre 1.

On attaque la classification en dimension 3. Au programme, symétries glissées et vissages qu'il est bon de connaître. Un rapide coup d'œil à la dimension n nous convaincra que la classification n'est pas beaucoup plus difficile !

● Géométrie affine, barycentres et convexité (22'42")

Voici un point de vue fécond sur la géométrie affine. On définit la notion de barycentre d'une famille finie de points et les propriétés d'usage (homogénéité, associativité). On travaille sur le corps des réels et on définit un ensemble convexe comme un ensemble stable par barycentres positifs, ce qui revient à dire, stable par segments. On montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même est une application affine si et seulement si elle respecte la notion de barycentre. Ce théorème prouve que la convexité est bien au cœur de la notion d'espace affine (réel).

On définit les points extrémaux E_X d'une partie convexe X de l'espace affine (réel). On montre que si g est un élément du groupe affine tel que $g(X)=X$ alors $g(E_X)=E_X$. Ceci va nous aider à comprendre les groupes d'isométries.

● Comment j'ai aimé la convexité... (un mini-cours) (36'13")

On propose ici un cours à minima sur la convexité. Il s'agit là d'une théorie plutôt mal digérée par les étudiants (et j'en ai été le premier à en souffrir) dont on va essayer d'extraire tous les arcanes. Pour aller au plus pressé, nous introduisons la notion de projection sur un compact convexe (que l'on retrouve dans pas mal d'épreuves de concours, dont le fameux EP2-2025 de l'agrégation interne) puis la notion d'hyperplan séparateur. Ce dernier est un sésame à pas mal de problèmes sur les convexes. Mais, le plus merveilleux arrive au moment de l'étude des convexes compacts avec 0 dans leurs intérieurs qui jouissent d'une belle (et rare !) dualité que l'on ne se lassera pas de regarder sous des formes diverses !

● Les sous-espaces stables - Partie I (51'04")

On propose de travailler sur les sous-espaces stables par un endomorphisme. Il s'agit d'un problème où l'on perd pied rapidement. Mais on va commencer en douceur avec quelques petites définitions, deux questions fondamentales qui vont le fil rouge de la playlist et quelques exemples à bien avoir en tête.

On attaque les problèmes de sous-espaces stables en lien avec le polynôme caractéristique. Celui-ci est irréductible sur K si et seulement les seuls sous-espaces stables sont triviaux. On montre ensuite que ceci est un cas particulier du cas de l'endomorphisme cyclique. Dans ce cas, les sous-espaces stables sont en bijection avec les diviseurs unitaires du polynôme caractéristique. Cela provient d'une jolie propriété de correspondance biunivoque entre sous-espaces stables pour la matrice compagnon C_p et idéaux de $K[X]/(P)$. On étudie ensuite des exemples où il y a un maximum ou un minimum de sous-espaces stables.

Après une vidéo 2 contenant des résultats un peu tumultueux, on retrouve des eaux plus calmes avec des petits exemples classiques à bien connaître de sous-espaces stables possédant un sous-espace supplémentaire stable. Endomorphismes autoadjoints, normaux, diagonalisables et, pour finir, lemme de Fitting et sous-espaces caractéristiques.

● Les sous-espaces stables - Partie II (41'04")

On a donné sous-espace u -stable facile à construire : le sous-espace stable par u , engendré par un élément x . On donne une condition simple sur x pour que ce sous-espace stable admette un supplémentaire u -stable : que son polynôme minimal local soit égal au polynôme minimal de u . On montre ensuite comment construire de tels éléments. On obtient alors un boulevard vers le théorème de décomposition de Frobenius.

On fait le point sur le théorème de décomposition de Frobenius sur quelques exemples, puis, on présente le théorème de semi-simplicité, c'est-à-dire que l'on trouve un critère polynomial pour qu'un endomorphisme vérifie que tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable. Ce critère porte sur le polynôme minimal de u .

On finit en donnant quelques indications sur la façon de décrire tous les sous-espaces stables d'un endomorphisme.

● Le résultant (46'01")

On introduit, définit et obtient une expression du résultant, en insistant sur l'application linéaire dont il est issu plutôt que sur l'expression du déterminant qui le définit habituellement. On se propose de donner rapidement un panel d'exemples de calculs du résultant et applications. Pour commencer, on calcule le discriminant du polynôme $X^2 + pX + q$. On donne une propriété générale du résultant qui sera la clef des suivantes : le résultant se décline sur les anneaux et est compatible avec les morphismes d'anneaux (dans un sens à préciser). On en déduit deux conséquences importantes. La première dit que si deux polynômes unitaires sur Z sont premiers entre eux, ils restent premiers entre eux modulo p premier sauf pour un nombre fini de p . La seconde dit que l'ensemble des entiers algébriques est un anneau (c'est-à-dire stable par l'addition et la multiplication). On attaque les applications du résultant en géométrie algébrique : intersections de courbes algébriques et résultant (cas des coniques), de courbes algébriques (cas plus général), équations cartésiennes d'une courbe rationnelle... et on finit avec une surprise : Résultant et Jacobien

Cours arithmétique

● Premier cours d'arithmétique (2h02'50")

On fait ici le point sur les équations sur l'anneau Z des entiers : linéaires, affines, à plusieurs inconnues, quadratiques et, enfin, polynomiales sur le corps Q .

On introduit l'arithmétique. Vu l'abstraction de ce qui viendra par la suite, il est important de faire un préambule qui permettra de se fixer les idées et d'avoir à sa disposition un vivier d'exemples. On commence donc un premier volet introductif, où on montre des techniques de résolution d'équations diophantiennes (i.e. dans l'anneau des entiers). Ici, il sera question d'équations linéaires sur Z , où le lemme de Gauss joue un rôle décisif.

On résout ici des équations diophantiennes affines (degré 1). On se sert de la réduction modulo n , de l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver des solutions particulières et enfin du lemme de Gauss pour la solution générale sans second membre. On finit avec une équation linéaire à trois variables car il m'a semblé que deux variables ne donnaient pas un aperçu suffisamment général de la situation.

On traite d'équations de degré 2 sur les entiers. Encore une fois, on constate l'importance du calcul modulaire, du lemme d'Euclide, lemme de Gauss, décomposition en irréductibles et théorèmes d'unicité dans les méthodes.

On attaque le cours d'arithmétique avec l'étude de l'anneau Z . On suit une procédure que l'on retrouvera avec d'autres anneaux, comme par exemple l'anneau des polynômes $K[X]$. On attaque les inversibles, puis la division euclidienne, et, en fin, la classification des idéaux. C'est un idéal principal et on en verra plus tard les implications.

On décrit l'ensemble des idéaux de Z comme un ensemble ordonné (par l'inclusion) et muni de deux opérations : l'addition et l'intersection. On montre que l'on a une bijection entre les idéaux de Z et les entiers naturels (car Z est principal). L'ordre "contient" des idéaux instaure alors un ordre sur les entiers naturels qui n'est autre que l'ordre "divise". De plus, addition et intersection des idéaux fournit deux opérations sur les entiers naturels : respectivement le PGCD et le PPCM.

On présente un déroulement ordonné à bien connaître en arithmétique. On montre le passage important qui va de la construction d'un PGCD dans un anneau principal (ici, l'anneau est celui des entiers mais cela pourrait être n'importe quel anneau principal) jusqu'au théorème fondamental qui stipule que tout nombre peut être décomposé, de façon unique, en un produit de nombres premiers. Au passage, on glanera, çà et là, le lemme de Gauss et, son avatar, le lemme d'Euclide.

On commence avec les premières conséquences du théorème fondamental de l'arithmétique, en particulier, l'existence des p -valuations. On montre comment ces p -valuations permettent de donner un critère de divisibilité puis des formules pour le PGCD et les PPCM. On finit sur un synopsis qui fait le point sur tous les volets théoriques de ce premier cours (copieux) en arithmétique.

On a commencé avec des équations diophantiennes, on finit avec d'autres équations qui utilisent le lemme de Gauss, l'identité de Bezout, les propriétés caractéristiques du PGCD et du PPCM. On cherche des solutions rationnelles à une équation polynomiale et on parle de systèmes de congruence.

● Fonctions arithmétiques à l'agrégation (43'00")

On est partis pour un tour d'horizon sur les fonctions arithmétiques que l'on rencontre à l'agrégation. On commence ici par la fonction indicatrice φ d'Euler et la fonction μ de Moebius. On continue avec l'ubiquité de la fonction μ de Moebius dans différentes composantes des mathématiques, où elle joue un rôle d'inversion pour la convolution, théorie des corps, arithmétique, réduction et, enfin, en analyse avec les séries où l'on rencontrera l'inévitable fonction ζ .

● Prépa à l'écrit Arithmétique 1 (17'32'')

On résout ici l'équation diophantienne $x^2 + y^2 - 29z^2 = 0$ en mettant l'accent sur la **factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss**.

● Prépa Ecrit Arithmétique 2 (9'39'')

On avait déjà vu dans une vidéo sur les "Structures quotient" que $x^2 + y^2 - 31z^2 = 0$ avait pour seule solution (0,0,0). Ici, on le montre à la suite de la vidéo "Arithmétique 1" comme **application immédiate de la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss**.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 3 (17'59'')

On étudie la **divisibilité de la suite des nombres de Fibonacci F_n par un nombre premier fixé p** . On montre qu'il existe une fonction α telle que p divise F_n si et seulement si $\alpha(p)$ divise n . Et nous voici embarqués dans de curieuses considérations, à savoir si 5 est un carré modulo p . Pas si curieuses, au final, si on sait que **l'équation caractéristique de la suite récurrente qui définit les nombres de Fibonacci est $X^2 - X - 1$, de discriminant 5**. Errata, à un moment je dis que $b^2 + ab - a^2 = (b + a/2)^2 - 5a^2$ alors que c'est $b^2 + ab - a^2 = (b + a/2)^2 - 5(a/2)^2$.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 4 (11'58'')

On présente, dans Arithmétique 4 et 5, deux exercices qui ont pour but de **présenter l'utilisation classique du lemme chinois**. Le premier exercice consiste à calculer le nombre d'endomorphismes polynomiaux inversibles en un endomorphisme fixé, sur un corps fini. **Le lemme chinois est ici dans sa version polynomiale**. La notion d'anneau local est sous-jacente.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 5 (11'12'')

Voici un autre exercice sur **le lemme chinois**. Cette fois-ci, on le retrouve **dans une version matricielle**. Ceci permet de calculer le nombre de matrices inversibles de taille d sur l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 6 (16'56'')

Dans la vidéo Arithmétique 3, on regardait **le problème de connaître l'ensemble des entiers n tels que le nombre de Fibonacci F_n soit divisible par un entier premier p** . On passe maintenant du nombre premier p à un nombre entier quelconque m . On tombe sur une fonction arithmétique α telle que m divise F_n si et seulement si $\alpha(m)$ divise n .

● Prépa à l'écrit Arithmétique 7 (4'44'')

Toute petite vidéo que je n'ai pas pu intégrer dans la précédente... On récolte ce que l'on a semé dans la vidéo Arithmétique 6 : **on donne tous les nombres n tels que F_n se termine par exactement k zéros dans son écriture décimale**. On rappelle que l'on a construit une fonction α telle que m divise F_n si et seulement si $\alpha(m)$ divise n . Pour connaître $\alpha(m)$, il suffit donc de connaître $\alpha(p^k)$ pour tout p^k de la décomposition en facteurs premiers de m . Et ceci est donné par une récurrence qui différencie les pas $p \geq 3$ et $p = 2$.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 8-teaser (4'09'')

Une petite légende sur la bataille d'Hastings nous servira de point de départ de **l'équation de Pell-Fermat. Il s'agit d'une équation de type hyperbolique** et il va falloir se rappeler cette vidéo "structure de groupe sur une conique 2/9" pour générer toute une famille de solutions à partir d'une seule.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 8 (17'25'')

On présente ici **l'équation de Pell-Fermat**. Un résultat dit que, si d est un entier positif non carré, alors l'ensemble des solutions positives de l'équation diophantienne $x^2 - dy^2 = 1$ a une structure de groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$. On montre que cet ensemble est soit trivial, soit isomorphe à $\mathbb{Z}$.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 9 (16'45'')

Un peu parce que l'on veut avoir le dernier mot avec l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$, un peu pour la culture générale mais, aussi, pour la beauté de la chose, on va donner un mini-cours (en deux vidéos) sur les fractions continues. Ici, on montre que **si x est un irrationnel, il possède une écriture sous forme de fraction continue et que celle-ci fournit une suite de rationnels qui tend vers x et, même, approxime x de façon remarquable (on parle d'approximation quadratique)**.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 10 (18'20'')

Certaines équations diophantiennes comme l'équation de Pell-Fermat posent des problèmes d'approximation d'un réel par un rationnel. Plus particulièrement, l'équation de Pell-Fermat pose le problème d'approche d'un nombre quadratique par un rationnel. Il est alors temps de montrer ce joli théorème de Lagrange qui dit qu'un réel est quadratique si et seulement si sa décomposition en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

● Prépa à l'écrit Arithmétique 11 (16'38'')

On finit par montrer, à l'aide des fractions continues, que l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ possède des solutions non triviales ! Attention à la fin, "faute de frappe" $324 + 325 = 649$ au lieu de 349 !

● Prépa à l'écrit Arithmétique 12 (16'26'')

Comme prétexte à présenter **le petit lemme de Hensel**, qui vient souvent épauler le lemme chinois, on se donne comme objectif de trouver un majorant pour le nombre de matrices M vérifiant $M^m = C$ sur un corps quelconque, où **C est la matrice compagnon** d'un polynôme P tel que $P(0) \neq 0$. Errata : la borne du nombre de racines est m^s et non pas ms comme annoncé !

● Structures quotients (1h25'58'')

Les structures quotient constituent une difficulté majeure à l'agrégation interne. On essaie d'introduire ici la nécessité de ces structures en l'argumentant sur des exemples dans divers domaines (ensembles, groupes, espaces vectoriels, réduction, anneaux, équations diophantiennes). Le quotient d'un ensemble par une relation : on montre qu'une **application est une bijection qui s'ignore, on présente le quotient d'un groupe par un sous-groupe non nécessairement distingué puis on montre comment obtenir des structures de groupes quotient à l'aide d'un sous-groupe distingué**. Dans un deuxième temps, on s'attaque maintenant aux structures d'espace vectoriels quotient. On en trouve des bases, on déduit la dimension de l'espace quotient et on remarque que **la formule du rang est totalement naturelle dans ce contexte**. Ensuite, une preuve élégante (mais classique !) de l'essoufflement de la suite des noyaux emboîtés est présentée. Elle utilise le passage au quotient. Enfin, on se dirige maintenant vers l'arithmétique en introduisant **les idéaux qui permettent de construire des structures d'anneaux quotient, tout en généralisant la relation "divise" des entiers**. On en profite pour montrer comment les structures quotient peuvent amener à résoudre des équations diophantiennes.

● La gymnastique des corps (1h44'20'')

Dans la série de vidéos qui suit, il ne s'agira pas de théorie des corps, juste d'un exposé de survol des différents types de corps sur lesquels on travaille dans le contexte de l'écrit et pour chacun de ces types (caractéristique, finitude, ordre, algébriquement clos, les spécificités du corps des réels...) quels sont ouvertures que nous offre ce type et quel sont les pièges. J'en parlerai dans le contexte 1) des algèbres de polynômes, 2) de la réduction 3) des formes quadratiques. Dans cette première vidéo, on regarde attentivement les conséquences et les pièges qui se présentent selon si le corps sur lequel on travaille est fini ou non.

Après avoir étudié les spécificités des corps infinis ou finis, on s'attaque au cas des corps de caractéristique zéro ou p.

Ici, on regarde ce qui est possible ou pas, selon si l'on travaille (sur des polynômes, en réduction ou formes quadratiques) sur un corps algébriquement clos ou non. On regarde ensuite les problèmes de caractéristiques 2 (ou pas).

On continue sur ce volet de la pratique des corps à l'écrit de l'agrégation. On attaque ici une série de quatre vidéos sur les changements de corps. Sur cette vidéo un peu bavarde, il sera question de voir que chez les corps, les problèmes se font dans deux directions : la montée (on va chercher dans un corps plus grand des racines, des valeurs propres, des décompositions de polynômes...), et la descente (on a obtenu des informations sur le corps du dessus et on veut en déduire des informations sur le corps du dessous). Pour la montée, il sera question de théorème de Steinitz, de corps de décomposition et de rupture. Pour la descente, on donnera quelques aperçus pratiques de la théorie de Galois forcément sous-jacente mais sans pour autant faire de la théorie de Galois.

On attaque ici les problèmes de descente dans des cas pratiques. Tout d'abord, le PGCD de polynômes est invariant par changement de corps puis, on voit que le rang d'une matrice possède également cette propriété d'invariance. C'est la porte ouverte à une première approche, sous forme d'exercices, de problème d'invariance par extension de corps invariants de classes de similitudes. On étudie le cas diagonalisable, nilpotent et enfin la décomposition de Dunford.

On pénètre ici le cœur du problème : montrer que deux matrices carrées sur un corps K sont semblables si et seulement si elles sont semblables sur une extension L . Cette preuve se fait en deux temps : un premier temps où K contient toutes les valeurs propres et un second où il ne les contient pas. Dans ce dernier cas, on fait intervenir le corps de décomposition du polynôme caractéristique.

On finit pour l'instant ce volet sur les extensions de corps et les théorèmes de descente. Autant ceux-ci fonctionnent trivialement pour la réduction, autant pour les formes quadratiques, on tombe sur des problèmes plus délicats, comme le prouve le théorème de Sylvester, qui est typiquement réel. On pourrait continuer longtemps sur ce sujet et peut-être le ferons-nous ultérieurement, par exemple, en parlant de semi-simplicité des endomorphismes, de la séparabilité, de théorèmes de descente en théorie des représentations... mais ces choses (passionnantes) sont un peu moins urgentes.

● Les réseaux aux écrits de l'agrégation (1h04'52'')

On aborde ici une étude de réseaux dans $\mathbb{Z}^n$. Ce n'est pas une théorie mais plutôt une approche pragmatique pour comprendre comment ceux-ci interviennent dans les problèmes d'agrégation. Avant de résoudre quelques questions clefs du problème d'agrégation interne 2012 (EP1), nous commençons par énoncer quelques résultats qui seront prouvés par la suite. Ces résultats sont exposés dans un tableau permettant de comparer le résultat sur $\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$) avec son analogue sur un corps (sous-espaces vectoriels de K^n). On explique ensuite le pourquoi et le comment des réseaux.

On continue l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$, en suivant en filigrane l'épreuve EP1 de l'agrégation interne 2012. On prouve l'existence de $\mathbb{Z}$ -bases, après avoir prouvé l'unicité du cardinal de telles bases. On prouve ensuite que ces bases sont en bijection avec le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$.

On montre alors notre maîtrise parfaite de la situation dans le cas $n=2$, où l'on s'aide de l'identité de Bezout. Nous prenons ensuite un bon départ dans l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ en prouvant l'existence d'un $\mathbb{Z}$ -base pour tout sous-groupe G de $\mathbb{Z}^n$ et même une condition pour qu'un élément du sous-groupe G se complète en une $\mathbb{Z}$ -base de G . On va faire quelques prolongations avec une adaptation sur $\mathbb{Z}$ du théorème de la base incomplète. Pour cela, on en arrive à la notion de groupe "sans torsion". On finit (sans preuve et sans les mains) avec le théorème de la base adaptée.

Cours groupes

● Les groupes cycliques (1h08'03'')

On introduit les groupes cycliques, d'une manière un peu grossière (comme groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) puis, de manière plus abstraite (groupe fini monogène). On donne ensuite quelques exemples (et contre-exemples) de groupes cycliques dans la nature.

Nous allons montrer une propriété d'hérédité des groupes cycliques : tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique. Mieux, pour tout diviseur de n , il existe un unique sous-groupe (cyclique) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d . On exploite ensuite cette propriété pour établir une formule sur la fonction d'Euler puis pour donner une caractérisation des groupes cycliques par le nombre de ses éléments d'ordre fixé.

On déduit ainsi de la caractérisation des groupes cycliques par leur nombre d'éléments d'ordre fixé, que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique. On illustre ceci avec la conjecture d'Artin sur les générateurs de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, x)$. On montre ensuite le rapport avec les nombres premiers dits "longs", c'est à dire les nombres premiers p tels que l'écriture décimale de $1/p$ est de période $p-1$.

On attaque enfin le problème des actions de groupes cycliques. Dans un premier temps, on se donne toutes les actions d'un groupe cyclique sur un ensemble fini n puis des exemples d'actions impliquées dans des théorèmes célèbres (lemme de Cauchy, loi de réciprocité quadratique, collier de perle). Ces actions sont juste évoquées et non détaillées.

● Introduction aux actions de groupes par le dénombrement (1h30'05'')

Une petite introduction qui j'espère, vous convaincra de l'utilité très concrète des actions de groupes. Au programme : lemme du berger et formule des classes. Mais surtout, beaucoup d'exemples concrets d'utilisation, dans le cadre de la combinatoire ainsi que la combinatoire algébrique.

Lemme du berger et axiomatisation : on va montrer dans cette vidéo comment les groupes permettent de compter. Ici, on dévoile la stratégie des groupes : une machine de guerre pour créer des situations où le lemme du berger peut s'appliquer.

Groupe symétrique et action naturelle : on attaque, tout de suite, avec l'exemple du groupe symétrique. On voit comment les nombres multinomiaux découlent de la formule des classes (sauf qu'il n'y a qu'une seule classe).

Groupe linéaire et action naturelle : on passe facilement du groupe symétrique au groupe linéaire en remplaçant sous-ensemble par sous-espace et partitions par sous-espaces en somme directe. On obtient des dénombrements où les factoriels sont remplacés par des cardinaux de groupes linéaires sur un corps fini.

Dénombrer les matrices diagonalisables : on s'attaque au nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini en obtenant une jolie formule.

Les séries génératrices dans le dénombrement : la jolie formule obtenue pour dénombrer les matrices diagonalisables est peu utile en l'état. Elle comporte trop de termes quand le corps devient grand. Toutefois, on peut la réarranger car **plusieurs termes sont regroupables**. On peut alors donner une estimation de la probabilité de choisir une matrice diagonalisable au hasard sur un corps fini. On finit sur ce résultat épatant.

On dénombre les matrices de rang r : on souhaite compter le nombre de matrices de taille (m, n) de rang r sur un corps fini de cardinal q . On utilise ici **les actions de groupes**. Pour l'instant, on se contente d'un calcul préliminaire : celui du calcul du nombre de sous-espaces de dimension k fixée puis on s'attaque au nombre de matrices de taille (m, n) et de rang r sur un corps fini. On en profite pour **présenter l'action de Steinitz qui partitionne l'espace des matrices selon leur rang**. Une fois le nombre de matrices de rang r obtenu, on lui donne une forme plus parlante, pour y découvrir des phénomènes naturels comme **l'isomorphisme canonique et la dualité**. On peut retrouver cet exercice dans **Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries I-3.6**.

- **Questionnaire Groupes : Action (ou vérité) (58'19)**

L'avantage d'une série de questions sur les actions de groupes, c'est qu'en même temps qu'on s'entraîne groupes, on révise tout le **programme d'algèbre** ! Avec les groupes, jouez à plusieurs ! It's more fun to compete. Nous allons parler d'actions du groupe symétrique, du groupe cyclique, de GL_n sur K^n , de Steinitz, de GL_n sur des espaces de matrices et enfin diverses actions (O_n , espaces affines...).

3 – Algèbre linéaire (121)

Les délices de matrices (98)

1 - Matrices d'applications linéaires

● Un petit exercice sur trace et rang! (17'36")

Voici un petit exercice tout chaud pondu du jour sur **la trace et le rang...** et un petit quelque chose de plus mais faut pas spoiler, c'est à **vous de trouver**. Dans un deuxième temps, il est naturel de poser la question fatale du cas d'égalité. Merci à Acturus Acturus pour le partage !

● Cas d'égalité entre trace et rang... (7'35")

Une petite à la suite de l'exercice sur l'inégalité, bel exercice d'ailleurs avec **rang, similitude, trace, formes quadratiques réelles...** Il est naturel de poser la question fatale du cas d'égalité.

● Un théorème bien frais sur le rang et la réduction (16'47")

Plein d'astuce, plein de ressources dans sa preuve, **un théorème qui relie la stabilité de GL_n et celle du rang pour un endomorphisme de $M_n(C)$.**

● Exercice utilisant la notion de rang (8'26")

Il peut sembler **étonnant** que la notion de rang soit utile dans le cadre d'un exercice sur l'irréductibilité d'un polynôme. Et pourtant...

Un exercice sur le rang de la somme de deux morphismes (17'19")

Un exercice classique de maths se consiste à **donner une condition nécessaire et suffisante pour que le rang de la somme de deux applications linéaires soit égal à la somme des rangs**. On corrige cet exercice instructif et on lui donnera un peu de recul en termes de dualité mais pas que...

Isomorphismes qui conservent les matrices de rang 1 (30'46")

La **preuve instructive** à plus d'un titre d'un **petit théorème sur les morphismes de l'espace des matrices qui conservent l'ensemble des matrices de rang 1**. Tout d'abord une **stratégie générale sur les endomorphismes qui conservent une partie non linéaire**, en cherchant les **sous-espaces maximaux inclus dans cette partie**. Ensuite, l'exercice fait visiter tout ce que l'on a à bien connaître sur les matrices de rang 1. On termine sur un petit épilogue sur les SETIM.

● Critère par les mineurs pour le rang d'une matrice (20'46")

On montre ce résultat souvent utilisé : **le rang d'une matrice rectangulaire est la taille maximale d'un mineur non nul**. On en donne ensuite une application sur les corps, R ou C , à la topologie du rang (Nouvelles histoires hédonistes chapitre I).

● Sous-espaces de matrices avec des conditions de rang-1 (8'26")

Une petite histoire soufflée par Rached Mneimné. On sait qu'un **hyperplan de matrices carrées contient une matrice inversible**. Et cela constitue un **développement** souvent présenté aux agrégations internes et externes. Mais a-t-on vraiment besoin d'un hyperplan ? Peut-on prendre une dimension plus petite ? On trouve ici une borne telle que si la dimension d'un sous-espace matriciel se trouve au-dessus de cette borne alors il contient forcément une matrice inversible.

Sous-espaces de matrices avec des conditions de rang-2 (20'39")

On montre les résultats annoncés dans la vidéo 1. Finalement, un joli **développement équilibré entre polynômes, propriétés du rang, déterminant et on finit en beauté avec les corps finis (ou pas)**.

● Des moutons qui rentrent dans le rang (Exercice niveau Licence) (11'06")

Le problème de Panurge, proposé par mon étudiant Alex, qui parle de moutons, de rang avec un soupçon de calcul binaire! Un mélange détonnant! Suivez le mérinos!

● Produits de matrices symétriques réelles (10'37")

Le produit de deux matrices symétriques est, en général, non symétrique. Mais, sur R , si une des deux matrices est définie positive alors la matrice produit est diagonalisable sur R et l'on peut même statuer sur le signe de ses valeurs propres. On en déduit une **preuve alternative de l'unicité de la décomposition polaire**.

4 matrices symétriques non diagonalisables ! (19'01")

On me rapporte une question de jury : « citez-moi une matrice symétrique non diagonalisable ». Voici 4 réponses possibles, dans 4 corps différents.

● Produit d'une matrice antisymétrique par une matrice symétrique définie positive (7'24")

Un petit exercice pour vérifier sa boîte à outils avant les écrits !

● Caractérisation du rang d'une matrice symétrique - mineurs diagonaux et congruence (23'40")

Voici un exercice instructif sur le thème rang, déterminants et formes quadratiques. On donne une version "symétrique" de l'adage qui assure que le rang d'une matrice est la taille maximale d'un mineur non nul. Mais cette fois-ci, la matrice est symétrique. On doit montrer que le mineur en question peut être choisi diagonal... et que les sous-matrices diagonales correspondantes sont dans la même classe de congruence !

Exercice (niveau prépa) sur les matrices symétriques semi-définies positives (20'25")

A partir d'une remarque de Toto en commentaire sur cette chaîne je propose un exercice instructif autour des matrices symétriques et de la positivité.

● Le théorème de Courant-Fischer (principe du minmax) (27'23")

Le théorème de Courant-Fischer est omniprésent dans les sciences. On propose d'en donner un énoncé et quelques une de ses applications. Les preuves de certains résultats énoncés lâchement sur un divan pourront être retrouvée au tableau (en mode man at work!) sur ce lien ● Le principe du minmax

2 – Matrices et réduction

● Existence d'un supplémentaire stable: une preuve de Patrice Tauvel! (10'24")

C'est avec plaisir que je partage cette preuve de Patrice Tauvel, communiquée par Paul Broussous. Une preuve extrêmement limpide pour montrer que, si u est un endomorphisme diagonalisable, alors tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable...

● Suites récurrentes linéaires (par la réduction) (17'53")

Inspirés par l'épreuve 1 de l'agrégation interne 2010, on propose **une présentation des suites récurrentes linéaires à valeurs dans $\mathbb{C}$, via la réduction de l'endomorphisme de décalage** (le shift S qui envoie u_n sur u_{n+1}). On y apprendra (peut-être) que **l'ensemble des suites récurrentes linéaires est une $\mathbb{C}$ -algèbre sur laquelle S agit de façon compatible avec les opérations**. On s'amusera à réduire S et retrouver avec bonheur ses sous-espaces propres et sous-espaces spectraux.

● Critère de diagonalisabilité de matrices réelles (10'55")

Un petit exercice proposé par JBHU (Jean-Baptiste Hiriart-Urruty) qui rentre **parfaitement dans le cadre d'une question de jury d'agrégation autour des thèmes diagonalisabilité ou produits scalaires-formes quadratiques réelles**.

● Le théorème des matrices normales (une preuve matricielle) (10'49")

On a vu par **une preuve, disons, géométrique**, que si une matrice complexe M commute avec sa transconjugée M^* alors M est diagonalisable en base orthonormée. Voici **une preuve qui ne manque pas d'intérêt**, proposée par François, qui, après réduction, permet de se ramener à un problème que le calcul matriciel peut résoudre.

● Contre-exemples en réduction (9'41")

On propose ici **une série de contre-exemples en réduction à savoir dégainer au bon moment !** Elles sont basées sur la notion de matrice **compagnon** dont nous expliquons rapidement quelques règles.

● 10 critères de diagonalisabilité! (et leurs contre-exemples) (26'44")

Voici de quoi briller en société avec pas moins de dix critères qui vous donneront l'occasion de décider si une matrice est diagonalisable.... ou pas ! On passe de critères géométriques, ou des critères polynomiaux bien connus, pour passer à des critères structurels, topologiques, métriques... et des tellement hors-sol que l'on ne saurait les nommer :-). Olivier Begassat me signale que j'ai oublié de préciser par moments que le **polynôme caractéristique devait être scindé**, en particulier au critère 4.

● Réduction par bloc avec une célèbre matrice (31'46")

On part d'une matrice A de taille n pour construire une matrice B de type anti-diagonale de taille $2n$ et dont les blocs diagonaux sont I_n et A . On donne dans cette vidéo tous les éléments de réduction de B en fonction de ceux de A

● Résoudre l'équation matricielle $P(M)=0$ avec P irréductible (30'40")

On part de la recherche de l'ensemble des solutions d'une équation matricielle, sous la forme $P(M)=0$, avec M une matrice carrée à coefficient dans un corps K et P un polynôme irréductible sur K . C'est le point de départ d'un joli voyage en Algèbre avec **de la réduction**, des extensions de corps, de la base télescopique, des obstructions de divisibilité... et l'incontournable matrice **compagnon** !

● Comment trouver une racine q -ième d'une matrice ? (24'53")

On fait le point sur cette question. Les cas faciles, les cas impossibles (du coup facile !) et les cas plus difficiles. **C'est un problème suffisamment important et récurrent à l'agrégation pour s'y intéresser.**

● Réduction des matrices de rang 2 (13'35")

On part d'un exercice classique où l'on prouve qu'une matrice carrée de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle. On donne ensuite **des conditions de diagonalisabilité d'une matrice de rang 2 en fonction de sa trace et de la trace de son carré**. Ceci ne sera pas sans rappeler le joli résultat de réduction (par congruence) de la forme quadratique qui, à une matrice M , de taille n , associe le coefficient en X^{n-2} de son polynôme caractéristique.

● Matrices compagnon, preuves et applications (16'39")

On introduit et on donne un aperçu (avec preuves) de la **propriété fondamentale des matrices compagnon d'un polynôme unitaire P : son polynôme minimal et son polynôme caractéristique sont égaux à P** . On fournit ensuite pêle-mêle (sans preuves mais avec références) bon nombre d'applications. On finit enfin avec un petit exercice (corrigé) qui pourrait en étonner plus d'un.

● Exercices Réduction (15'42")

Voici quelques petits exercices de réduction autour des **propriétés arithmétiques du polynôme minimal**. On cherche ici le polynôme minimal d'une matrice diagonale puis, triangulaire, par blocs.

● Critère de nilpotence par la trace et application (13'21'')

Voici une preuve express du **critère de nilpotence par la trace** que l'on peut trouver dans **Carnet de Voyage en Algèbre**. Tellement express qu'on peut se permettre d'y ajouter une application, courte, mais élégante.

● Un exercice instructif sur les matrices nilpotentes (avec un regard neuf sur la dérivation!) (20'53'')

On propose un exercice qui trouvera sa place à un oral d'agrégation interne. On part d'une équation matricielle pour arriver à montrer qu'une des matrices en présence se doit d'être nilpotente. Mais cet exercice possède un intérêt en soi : il nous donne l'occasion d'aborder un peu la théorie de Lie... Référence : Exercice 33 Pulkowski (merci à Nico pour la ref)

● Petit exercice ludique sur les matrices entières inversibles (4'33'')

Cinq minutes sur un petit exercice étonnant de Patrice Lassère, qui fait intervenir des matrices à coefficients entiers.

● Cayley + Hamilton = Lagrange! (20'19'')

Derrière cette égalité, à peine exagérée, se cache une connexion, pas toujours connue des étudiants, entre la théorie des groupes finis abéliens (et même parfois par extension des groupes finis tout court) et la théorie de la réduction d'un endomorphisme sur un corps. C'était une réponse à une question naturelle de Titouan Martin ! (Non Riri, ce n'est pas un poisson d'avril ! :-)))

Cayley-Hamilton, la preuve 100% bio ! (25'38'')

Voici résolument (!) ma preuve préférée du théorème de Cayley-Hamilton ! Avec que des bons produits ! Elle se dit **uniquement en termes de structures et de morphismes**, dans ce que l'algèbre moderne fait de plus élégant ! D'ailleurs, on va rapidement se rendre compte que l'on est sur une preuve bien plus forte que son propos de départ et qui va nous propulser directement vers les fameux invariants de similitude (le Graal de la réduction).

● Un scoop sur Cayley-Hamilton ? (17'50'')

Tout étudiant ayant en main sa licence de mathématiques a forcément rencontré le théorème de Cayley-Hamilton et son corollaire immédiat qui dit que le polynôme minimal d'une matrice divise son polynôme caractéristique. Mais qui sait ce que représente, en termes de matrices, le quotient du polynôme caractéristique par le polynôme minimal ? Et comment peut-on vivre dignement sans le savoir ?

● Une preuve express de Cayley-Hamilton (sur tout corps et sans topologie) (14'20'')

On présente une preuve très rapide de Cayley-Hamilton qui ne nécessite pas de topologie et ne demande pas d'hypothèse sur le corps. Elle demande en revanche la connaissance du discriminant d'un polynôme.

Exercices sur le thème "arithmétique au secours de la réduction" (15'11'')

Deux exercices (plus une variante) où l'arithmétique des polynômes vient délivrer la réduction de ses problèmes de diagonalisabilité !

● Décomposition de Dunford pour de "petits" polynômes minimaux (27'11'')

Un exercice instructif sur la décomposition de Dunford qui utilise Bezout, la formule de Taylor polynomiale, Cayley-Hamilton et un certain monsieur Newton (mais ça c'est un peu spoiler). Le but du jeu est ici de calculer explicitement la décomposition de Dunford d'une matrice à "petit" polynôme minimal. Petit... au sens de la divisibilité.

● Disques de Gershgorin... et raffinements (21'23'')

On présente ici une façon rapide de localiser les valeurs propres d'une matrice avec les disques de Gershgorin. On en donne une preuve élémentaire et on continue avec deux raffinements possibles : un par dualité et, un autre, plus impliqué, qui utilise la topologie des valeurs propres (voir vidéo précédente sur la continuité du spectre).

● Disques de Gershgorin, optimisation et inégalités (19'52'')

On repasse rapidement en revue les disques de Gershgorin. On montre ensuite que ces disques sont optimaux pour localiser les valeurs propres (pour les amateurs de leçon 149 par exemple). On prouve ensuite deux inégalités déterminantales, une sur $\mathbb{C}$ et une autre, plus précise, sur $\mathbb{R}$.

● Diagonalisation et trigonalisation simultanées (26'51'')

On présente les grands classiques des applications des critères polynomiaux de la diagonalisabilité. 1) l'induit d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, 2) la diagonalisation simultanée et 3) diagonalisabilité des endomorphismes de multiplication par une matrice. On présente ensuite des raffinements et des applications à la trigonalisation. Tout d'abord, le critère du polynôme annulateur scindé et, comme application, la trigonalisation simultanée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent. Nous passons ensuite à une jolie application qui peut être vue comme un "Cayley-Hamilton multivariable".

● Endomorphismes de l'espace des matrices qui commutent à la transposée (21'15'')

Un petit exercice qui se décline bien selon si on se retrouve dans le contexte d'une leçon sur la dualité, de la diagonalisabilité ou de la trigonalisabilité. Bref, un exercice à 3 méthodes : résolution par la dualité, les matrices diagonalisables ou les matrices trigonalisables

Oraux X-ENS. Dimension du commutant d'un endomorphisme. (27'14")

L'ensemble des endomorphismes d'un endomorphisme (disons sur C) est un sous-espace vectoriel de l'espace des endomorphismes de dimension la somme des carrés des différences des dimensions des noyaux emboîtés. La preuve repose essentiellement sur le cas nilpotent. Pour la preuve, je me suis inspiré d'une preuve d'un résultat un peu plus impliqué (dont on parlera par la suite) de Fabian Gundlach et Béranger Seguin, fort joli d'ailleurs, que vous pouvez trouver sur <https://arxiv.org/abs/2506.08695>

● Un exercice classique sur le commutant (20'25")

On résout l'exercice classique que le commutant d'un endomorphisme est de dimension supérieure ou égale à celle de l'espace. On donne plusieurs preuves selon le niveau ou les affinités : une preuve algébrique (cas algébriquement clos puis cas quelconque), une preuve topologique et une qui provient de la combinatoire algébrique (tableaux de Young).

● Tout sur le commutant (1ère partie) (11'56")

On propose de faire le point de tous les résultats classiques à l'agrégation sur le commutant. Dans une première partie, on étudie deux cas "complémentaires" que l'on retrouve souvent dans les écrits : le cas diagonalisable et le cas cyclique ou, si l'on préfère, la matrice diagonale ou la matrice compagnon.

Tout sur le commutant (suite et fin) (21'28")

Cette fois-ci, on s'attaque au cas général, en nous basant sur le théorème de décomposition de Frobenius, plus particulièrement, les degrés des polynômes invariants de similitude.

● Multiplication à gauche par une matrice- analyse spectrale (22'57")

Si A est une matrice carrée, la multiplication à gauche par A fournit un endomorphisme L_A de l'espace des matrices carrées (de même taille que A). On propose une analyse spectrale (spectre et vecteurs propres) lorsque A est diagonalisable. Bref, l'ambiance à son comble au Fab-Lab.

Matrices qui commutent "à scalaire près" avec toute matrices (niveau licence /niveau master) (26'07")

On présente de deux manières différentes, une, au niveau licence, l'autre, au niveau master, la preuve que si une matrice A de $GL_n(K)$ commute, à scalaire près, à toute matrice de $GL_n(K)$ alors A est une matrice scalaire.

● Une famille libre sur $\mathbb{Q}$ par la trace ! (15'45")

Un exercice qui peut parfaitement faire office de développement (corps, polynômes, dimension, déterminant...) propose de montrer qu'une certaine famille finie de réels quadratiques sur $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$ -libre. Ceux qui n'en sont pas encore convaincus verront que la trace a de l'audace, la trace a du génie !

● Qui sont les coefficients du polynôme caractéristique ? (10'10")

On prouve une formule générale pour les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice carrée A .

Les coefficients du polynôme caractéristique par l'algorithme de Faddeev (12'23")

Voici une façon très simple de récupérer, à partir d'une matrice A , les coefficients de son polynôme caractéristique. Une belle histoire entre le théorème de Cayley-Hamilton et les identités de Newton !

Sous-espaces de matrices stables par conjugaison (18'41")

On va trouver tous les sous-espaces de $M_n(K)$ stables par conjugaison de $GL_n(K)$. Evidemment, il sera question ici de réduction mais aussi, curieusement, de décomposition en base 2 et on rencontrera également la jolie forme bilinéaire trace. On trouvera cet exercice dans le chapitre III de Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.

Sous-espaces de matrices diagonalisables (18'15")

On discute ici de résultats sur les sous-espaces de $M_n(K)$ constitués de matrices toutes diagonalisables.

● Un exercice sur les suites récurrentes linéaires et barycentres (18'17")

Voici un petit exercice proposé par Denis Roussillat sur le thème des suites récurrentes linéaires où l'on construit la suite à l'aide de barycentres. On donne ici deux versions de l'exercice et deux solutions, une élémentaire et l'autre niveau M1.

● Comatrice, qui es-tu ? (6'14")

On cherche une définition intrinsèque (sans calcul et liée à l'algèbre linéaire plutôt qu'au calcul matriciel) de la comatrice. Il y a une définition savante qui utilise les algèbres extérieures mais celles-ci sont hors programme agrég-master. On en propose une "intermédiaire" assez amusante.

Endomorphismes nilpotents à l'écrit de l'agreg (2017) (11'48")

On s'intéresse à la question I 6) de l'écrit MG-2017 de l'agrégation externe. Il s'agit de classer les classes de similitudes de certains endomorphismes nilpotents. Cela nous donne l'occasion de faire le point sur les techniques de réduction dans le cadre nilpotent. Deux mots d'ordre : suite des noyaux itérés et scindage de ces noyaux, voir **Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, chap. III.**

Endomorphismes nilpotents à l'écrit de l'agreg-2 (variantes) (13'39")

Après avoir résolu cette question sur la classification des classes de matrices nilpotentes d'indice 2 en dimension 4, on tente quelques variantes (pour le plaisir). Quelles sont les classes de similitudes de matrices nilpotentes a) d'indice 2 en dimension n b) dont le noyau est de dimension 1 c) d'indice 3 en dimension 6.

● La suite des noyaux emboîtés (13'22'')

On explique, dans un premier temps, l'importance de la suite des noyaux emboîtés pour la classification des endomorphismes, en se ramenant aux nilpotents. Dans le cadre de l'étude des classes de similitude, la dimension des noyaux emboîtés est un invariant. On montre ici que cette suite est croissante et s'essouffle ! Pour finir, on indique, sans preuve, pourquoi cette suite permet de déterminer exactement la classe de similitude de l'endomorphisme.

La preuve la plus courte pour C algébriquement clos? (11'07'')

François, qui n'est plus à présenter sur cette chaîne, nous propose le "d'Alembert-Gauss-Express", peut-être une des preuves les plus courtes compte-tenu du seul outil qu'elle utilise : une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{C}$ est bornée et atteint ses bornes. Une preuve élémentaire en 9 minutes chrono, de ce théorème bien connu que j'aurais tendance à appeler le théorème légendaire de l'analyse plutôt que le théorème fondamental de l'algèbre... Mais une dernière question, au final, y a-t-il plus court que cette preuve sachant que ça ne compte pas si on écrit tout petit !

Le corps C est algébriquement clos (preuve par la réduction) (16'17'')

On propose cette preuve du théorème de d'Alembert-Gauss (C est algébriquement clos), adapté d'une preuve de Pierre Samuel dans le cadre de la réduction des endomorphismes. On peut trouver cette preuve dans Carnet de Voyage en Algèbre I-3.37.

Un exercice sur autour du théorème spectral (formule d'Apollonius) (15'46'')

La formule d'Apollonius relie les distances entre les sommets d'un triangle et le milieu d'un côté. Le théorème spectral permet d'en voir une généralisation tous azimuts en dimension n .

● Semblables sur C vs semblables sur R (13'32'')

Deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbb{R}$. On montre ce classique de la réduction. Mais on va un peu plus loin avec l'équivalence U_n semblable / O_n semblables. Encore une application de la décomposition polaire.

Exercice Centrale-Mines: Entrelacement de racines et Fractions rationnelles (16'42'')

Un exercice à effet Waouh sur les fractions rationnelles et leurs applications, vous avouerez que c'est tout de même assez rare!

● Caractérisation des endomorphismes normaux par la norme (Niveau L2) (5'31'')

Un petit exercice mignon comme tout sur les endomorphismes normaux.

● Un classique de Kholle: Montrer que le produit de deux projecteurs orthogonaux est diagonalisable (16'11'')

Il semblerait après discussion que ce soit un classique, mais je ne le connaissais pas quand mon étudiant Basile me l'a posé. Comment aborder ce problème de diagonalisabilité quand manifestement, il n'y a pas de codiagonalisation, pas de polynôme annulateur en vue... Il reste à trouver une forme assez sympathique "simultanée" pour les deux projecteurs et comparer multiplicité algébrique et géométrique...

Pour aller plus loin :

● Contre-exemples: matrices non semblables alors que... (21'25'')

Donner des exemples de matrices ayant même rang, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal... alors qu'elles ne sont pas semblables. Voici le moment parfait pour réviser nos invariants de similitude !

● Toute matrice (complexe) est semblable à une matrice symétrique (31'05'')

Dans un style très "Oraux-X-ENS" ! Une solution très astucieuse de mon camarade François pour montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique. Après avoir présenté cette solution, nous donnons une généralisation de ce théorème : ce résultat reste valable sur un corps K sur lequel -1 est un carré.

3 – Systèmes linéaires

● Pseudo-inverse d'une matrice réelle (27'06'')

On donne ici l'expression de la pseudo-inverse d'une matrice. Si $Ax=b$ est un système linéaire et si B est la pseudo inverse de A , alors $x=Bb$ est l'élément de norme minimale tel que $(Ax - b)$ est de norme minimale.

● Conditionnement d'une matrice (23'15'')

Parmi les applications des valeurs propres attendues dans la leçon 149 (selon le rapport du jury de l'externe), on va trouver le conditionnement d'une matrice. Le conditionnement permet de comprendre la sensibilité des solutions trouvées à un système de Cramer $Ax=b$, en fonction des erreurs commises sur le calcul de la matrice A et du vecteur colonne b . Pour la norme subordonnée à la norme quadratique, on trouve que le conditionnement est fortement lié à l'étendue du spectre de la matrice A^*A .

● Calcul d'une série exponentielle (15'38'')

On cherche à calculer explicitement la série génératrice exponentielle d'un polynôme réel. Un exercice qui demande un peu de calcul et également un peu de savoir-faire. En particulier, le choix d'une base adaptée de l'espace des polynômes et la résolution d'un système linéaire.

● Solution optimale d'un système linéaire (20'37'')

Voici (sous forme d'exercice) une façon élégante proposée par Moore et Penrose de formuler une solution optimale à un système linéaire quelconque sur $\mathbb{R}$. On aboutit à la notion de pseudo-inverse d'une matrice rectangulaire.

4 – Matrices et norme euclidienne

● Le théorème spectral (et ses avatars) (31'08'')

On présente ici le **théorème spectral** comme conséquence directe du **théorème d'orthogonalisation simultanée**. Cela fournit un **développement agréable** que l'on peut trouver dans *Carnet de Voyage en Algèbre*.

● Introduction aux matrices de Gram (16'50'')

Une toute **petite** introduction aux matrices de Gram. Une définition dans le cas euclidien, quelques propriétés et surtout l'application classique au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace. Pour finir, une résurgence de la matrice de Gram à un endroit où l'on ne s'y attend pas...

● Le rang d'une matrice de Gram (10'12'')

On montre ici que le rang de la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est égal au rang de la famille. Ce sera l'occasion pour nous de parler de critère de rang par les mineurs et (accessoirement) de la dégénérescence d'une forme bilinéaire symétrique par restriction.

● Gram-Schmidt et la décomposition QR (25'22'')

On introduit ici la **méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** ainsi que son avatar matriciel : la **décomposition QR**. On présente ensuite l'avantage de cette décomposition (unicité, inégalité d'Hadamard...)

● La matrice orthogonale la plus proche de chez vous, (les tutos d'Alex) (32'48'')

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, quelle est la matrice orthogonale la plus proche pour la norme quadratique de l'espace des matrices. Alex prends le temps de nous expliquer tous les arcanes de ce beau développement (que l'on trouvera avec bonheur dans *Carnet de Voyage en Analyse* chez Calvage & Mounet)

● Automorphismes orthogonaux: Propriétés, caractérisations, exercices. (44'00'')

On fait le point sur les nombreuses propriétés et caractérisations des matrices orthogonales qui leur permettent d'intervenir en algèbre linéaire (normes euclidiennes, normes subordonnées, décomposition polaire, décomposition QR, systèmes linéaires, topologie, actions de groupes, aires et volumes...). Après avoir vu les propriétés des matrices orthogonales, on présente deux exercices qui mettent, à eux deux, en avant les propriétés annoncées.

● Normes duales et distances à un hyperplan (21'49'')

Un commentaire de Toto sur cette chaîne m'amène à parler de norme duale. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut être amené à chercher la distance minimale d'un point à un hyperplan affine défini par une forme linéaire f . Pour la norme euclidienne, tout est faisable à l'aide de Pythagore, mais pour les normes quelconques, on est conduits à définir la norme dual de f afin de comprendre cette distance. On donne alors les normes duales des normes classiques, puis, on s'intéresse à l'espace des matrices carrées où on hérite de normes subordonnées. On montre la dualité entre norme spectre et norme nucléaire.

La décomposition polaire tous azimuts

● MG-2023 - O_n -semblable vs GL_n -semblable - 1 (16'17'')

Dans la série "anatomie d'une épreuve d'agrégation", on va disséquer la partie IV du problème MG-2023 (ou peu s'en faut). On montre ici le **résultat suivant** : deux matrices symétriques sur C sont $GL_n(C)$ -semblables si et seulement si elles sont $O_n(C)$ -semblables. On utilisera une "pseudo-décomposition polaire" sur C , que nous démontrerons dans une prochaine vidéo.

● MG-2023 - Partie IV - pseudo décomposition polaire sur un corps (28'37'')

On présente ici ce qui semble une mine de petites techniques pour un candidat qui voudrait bien se préparer aux épreuves de l'écrit de l'agrégation. Il s'agit de montrer que sur le corps des complexes (puis sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2), toute matrice inversible se décompose en le produit d'une matrice.

● Décomposition polaire - Appellation contrôlée - 1 (31'15'')

Voici le premier volet d'une série consacrée à la décomposition polaire. Dans cette première partie, nous allons présenter la décomposition polaire, ses déclinaisons et autres avatars sur des groupes variés et ses cas dégénérés. On finit avec la décomposition polaire du groupe $O_n(C)$. Attention, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il ne s'agit pas d'un nième développement sur la décomposition polaire mais, plutôt, ce que l'agrégatif doit connaître lorsqu'il aborde le sujet.

● Décomposition polaire - Dans tous ses états - 2 (24'48'')

Après avoir vu la décomposition polaire de divers sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(C)$, nous voici partis sur diverses interprétations de la décomposition polaire. Une interprétation géométrique pour commencer, puis une interprétation sur le thème optimisation des distances dans un espace normé et, pour finir en beauté, avec une interprétation topologique de l'homéomorphisme de décomposition polaire.

● Décomposition polaire - Applications - 3 (50'22'')

De la même manière qu'un théorème n'est rien sans ses corollaires, une décomposition de matrices n'est rien sans ses applications. La première des applications de la décomposition polaire est l'incontournable lien entre norme subordonnée à la norme quadratique et rayon spectral. Après avoir prouvé ce point on s'attaque à la maximalité du groupe orthogonal comme sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On continue avec des problèmes de connexité et de composantes connexes. On finit en beauté avec une application de la décomposition polaire à la forme volume.

● La décomposition polaire vue par une ellipse (12'02'')

On propose ici de regarder la décomposition polaire sous un angle géométrique. On donne une preuve géométrique de l'existence et une interprétation géométrique de l'unicité de la décomposition orthogonale et d'une matrice symétrique.

Le théorème spectral

● Une nouvelle preuve du théorème spectral ? (15'05'')

Une preuve nouvelle, due à **Clément de Seguins Pazzis**, du théorème spectral, est tombée récemment sur les réseaux sociaux. C'est peut-être le moment de faire le point sur ce théorème et sur ses preuves.

● Une nouvelle preuve du théorème spectral ? 2 (11'07'')

Une jolie proposition de **Hugues Contini** pour une preuve du théorème spectral : **une propriété bien connue des polynômes irréductibles réels font que la seule obstruction au théorème spectral se situe en dimension 2**. Le reste est une vérification de routine.

● Théorème spectral (dernière preuve avant la rentrée) (8'09'')

Voici une preuve très stylée du théorème spectral, proposée par Toto-toto. Il s'agit d'**une preuve totalement algébrique** (modulo $\mathbb{C}$ est algébriquement clos qui finalement n'est pas tant algébrique que ça malgré son pseudo "théorème fondamental de l'algèbre") et **qui n'utilise aucune récurrence** (ça c'est juste pour l'exercice de style, on ne fait pas d'induction-bashing sur la chaîne !). **Une preuve qui peut parfaitement figurer dans un cours d'agrégation interne.**

● Théorème spectral-- une preuve totalement analytique ! (18'54'')

Une preuve originale du théorème spectral due à **Yan Doumerc** qui, dans un pur exercice de style, ne s'est autorisé **que des ingrédients analytiques**.

● Rayon spectral vs norme subordonnée (34'34'')

On présente ici les relations à connaître (autant à l'agrégation interne qu'externe) entre le rayon spectral et la norme subordonnée. On va voir que ces relations peuvent être proches et même très proches...

5 – Matrices et topologie

● Critère topologique de diagonalisabilité (21'58'')

Sur $\mathbb{C}$, une matrice est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée pour la topologie d'espace normé de $M_n(\mathbb{C})$. On montre ce résultat ainsi que son analogue sur $\mathbb{R}$.

L'intérieur des matrices diagonalisables complexes (14'20'')

On montre ici que l'intérieur des matrices diagonalisables complexes est constitué des matrices à valeurs propres simples. Il serait utile de réviser un peu le résultat sur <https://studio.youtube.com/video/dQs-...>

● Pourquoi l'ensemble des matrices trigonalisables réelles est fermé. (20'55'')

On a donné récemment une preuve comme quoi l'adhérence des matrices diagonalisables réelles est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables. Toto a proposé en commentaires une alternative à la partie de la preuve qui assure que l'ensemble des matrices trigonalisables est fermé. Plutôt que de partir d'un critère polynomial de trigonalisabilité, il part du fait qu'une matrice trigonalisable réelle est O_n semblable à une matrice triangulaire.

Continuité du spectre d'une matrice (22'59'')

On propose de montrer que les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de celle-ci. Le tout est de donner une bonne formulation (on en donnera deux) de ce résultat.

Chemins continus de projecteurs (27'13'')

Un exercice proposé par un étudiant (bien avancé) de L3. Soit $p(t)$, t de 0 à 1, un chemin continu de projecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut trouver une "base continue" pour les images $\text{Im}(p(t))$. Dans un premier temps on résout cet exercice, puis on propose un second dans le cas $\mathbb{C}^1$. On finit par montrer que ce chemin continu nous amène avec douceur vers de belles propriétés (plus avancées) de topologie algébrique: la notion de fibré vectoriel.

6- Exponentielles de matrices

● Un exercice sur l'exponentielle de matrices (16'56'')

Un exercice mais deux preuves pour cet exercice qui consiste à prouver que $(I+A/n)^n$ tend vers $\exp(A)$ pour toute matrice carrée complexe. Le problème c'est qu'il nous faut ici, comme en complexe, une méthode qui n'utilise pas le logarithme ! l'm a Poor logarithmless cowboy !

● Un exercice (et plus!) sur les exponentielles de matrices par Nina (24'42'')

Nina propose l'exercice suivant : trouver les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A)=I_n$. On discute ensuite sur cette base autour des problèmes du type $\exp(A)=B$ avec diverses contraintes.

● Un exercice de jury autour de l'exponentielle des matrices complexes (18'12'')

On connaît tous à l'agrégation (externe) le développement de l'exponentielle complexe qui se trouve être surjective de $M_n(\mathbb{C})$ vers $GL_n(\mathbb{C})$ (mais c'est faux sur $\mathbb{R}$). Une question de jury est la suivante : on sait que le sous-espace des traces nulles s'envoie sur $SL_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle. Est-ce que l'application ainsi définie reste surjective ?

● $\exp(AB)$ vs $\exp(BA)$ (9'50'')

Un petit exercice de jury autour de l'exponentielle de matrices ?

● Diagonalisable vs exp-diagonalisable (13'15'')

On montre qu'une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son exponentielle est diagonalisable. On en donne ensuite quelques applications dans des équations matricielles.

Déterminant droit devant (19)

● Caractérisation de la trace et du déterminant sur l'algèbre des matrices (Niveau Licence et plus) (25'06'')

A la demande de Kamal, je propose de montrer que la seule forme linéaire f sur l'algèbre des matrices telle que $f(AB)=f(BA)$ et $f(E_{nn})=1$ est la forme trace. On donne une caractérisation analogue pour le déterminant à partir de $f(AB)=f(A)f(B)$ et $f(I_n+(d-1)E_{nn})=d$. Référence : Carnet de Voyage en Algèbre

● Inégalité de Cauchy-Schwarz par le déterminant (pour changer un peu!) (7'22'')

On propose ici une preuve alternative, plus tendance (!), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a, bien sûr, la preuve élémentaire avec le trinôme que l'on rappellera, la preuve par les formes quadratiques définies positives dont le déterminant est toujours strictement positif mais celle-ci est d'un niveau peut-être plus mature. Ici, on se contente juste du déterminant d'un endomorphisme et du TVI.

● Log-concavité du déterminant (10'01'')

La log-concavité du déterminant est au cœur d'une belle histoire qui se prolonge jusqu'à la mesure de Haar sur un groupe de Lie compact mais nous n'irons pas plus loin dans cet effet d'annonce. Nous nous contentons de prouver cette propriété dans le cadre de l'agrégation interne et externe de mathématiques... Attention à la confusion : les λ_i ne sont pas les valeurs propres de B car P n'est pas censé être une matrice orthogonale. En revanche, comme B est une matrice symétrique définie positive, les λ_i sont bien positifs.

● Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (en trois méthodes instructives!) (15'45'')

On prouve par trois méthodes différentes (et même complètement différentes !) la formule du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. L'intérêt de la vidéo est justement que chaque méthode développe une technique instructive !

● Deux déterminants (et l'astuce redoutable d'Adolf Hurwitz!) (16'57'')

Inspiré par l'article de Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Patrice Lassère "Une curieuse mais épatante matrice nilpotente", on présente ici deux exercices de calculs de déterminants où l'astuce est de rigueur ! Errata : On me fait remarquer que "Pintxos" est basque et non pas catalan ! Fatal error !

● La formule de Héron en dimension n (par le déterminant de Cayley-Menger) (23'39'')

On donne une version déterminante de la formule de Héron qui fournit l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de ses arêtes. L'énorme avantage de cette nouvelle version et d'être généralisable à n'importe quel simplexe en toute dimension. Cela permettra un rappel non inutile des vertus du déterminant pour calculer des volumes 😊

Moore, un nouveau Vandermonde ? (18'38'')

Le déterminant de Moore est non seulement un exercice ludique et passionnant qui demande juste un minimum de connaissance sur les corps finis mais c'est surtout un résultat qui en a sous le capot puisque qu'il se situe à l'orée de la profonde théorie de Dickson sur les invariants modulaires. On donnera un aperçu de cette théorie sur laquelle on reviendra dans une autre vidéo.

● Un calcul de déterminant (sans les mains) (13'41'')

On se propose de calculer le déterminant de la représentation réelle d'une matrice complexe. Selon comment on attaque ce déterminant, le calcul peut devenir inextricable... ou simple comme bonjour.

● Exercice sur la leçon "déterminant" (12'39'')

Sur la leçon « déterminant », un type d'exercice dans la discussion avec le jury consiste à vérifier si le candidat a bien compris l'importance et l'utilisation de l'unicité, à scalaire près, d'une n -forme linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n . L'exercice que l'on présente ici fait est emblématique de ce type de question.

● Volume de la n -boule et intégrale de Wallis (18'31'')

Comment évolue le volume de la boule de rayon 1 en dimension n ? Pour $n=1$, on a $V=2$, pour $n=2$, le merveilleux nombre π et, pour $n=3$, le célèbre $4/3 \pi$. Et quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?

● Irréductibilité du déterminant (good proof/bad proof) (19'36'')

On va montrer de deux manières que le déterminant, vu comme polynôme à n^2 indéterminées, est irréductible. Une première preuve, élémentaire, trop simple pour être honnête. Puis, une seconde preuve qui nous amènera sur les sentiers arpentés de la géométrie algébrique et le théorème des zéros de Hilbert.

Déterminants dans le triangle de Pascal (et lemme de Gessel-Viennot) (19'48'')

On va calculer à l'aide de la combinatoire des chemins, le déterminant d'une matrice inscrite dans le triangle de Pascal ! On va prouver pour cela le petit lemme (de grande destinée) de Gessel-Viennot.

Gessel-Viennot, l'approche alternative du déterminant (16'47'')

On a montré dans une vidéo précédente que l'on pouvait présenter de façon combinatoire le déterminant d'une matrice extraite du triangle de Pascal. 📺 ● Déterminants dans le triangle de Pascal (e... On a utilisé pour cela l'étonnant lemme de Gessel-Viennot qui est rentré dans les lemmes de légende avec le lemme de Gauss, de Fatou, de Burnside... On montre comment ce petit lemme permet de comprendre en profondeur les aspects combinatoires du déterminant.

● Déterminant et polynômes de Lagrange (15'11'')

On construit une matrice carrée à partir de polynômes de Lagrange (non normalisés) et on voudrait en calculer le déterminant. On va voir trois méthodes élégantes se décliner autour de cette taupinade.

Formule de Binet-Cauchy (par la face sud) (20'27")

La formule de Binet-Cauchy (que l'on peut trouver dans Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, tome 2, Chap. II) peut être placée avec brio dans une leçon sur le déterminant. On propose une méthode douce pour cette formule dont nous verrons plus tard des applications.

● Le théorème du confinement (29'22")

On prouve qu'il n'y a rien de mieux que le n-gone régulier pour nous protéger de la contagion. Au programme, **inégalité d'Hadamard pour les déterminants et identités de Newton**.

● Calcul complexe et déterminant (Maths en Hamac) (11'19")

On présente le déterminant à travers le prisme du calcul complexe.

● Inverse de A et comatrice- Une preuve inattendue (11'55")

Voici une preuve, enseignée par Pierre-Yves Le Gall à la préparation à l'agrégation interne de mathématiques (Paris-Saclay), et probablement concoctée par ses soins, de la célèbre formule qui relie l'inverse d'une matrice inversible A et la transposée de la comatrice. C'est quand même incroyable de découvrir un nouveau chemin dans un endroit que l'on fréquente quotidiennement! Bref, un truc utile pour la vie de tous les jours!

● Vandermonde sans les mains (21'41")

Le déterminant de Vandermonde est omniprésent en algèbre linéaire pour bien des raisons. C'est justement en explorant ces raisons que l'on va pouvoir le comprendre sans le calculer (mais à la fin on le calcule quand même, pour la gloire de l'esprit humain :-))

Corps finis à l'envi (4)

● Les classes de similitude en dimension 2 (sur corps fini) (23'52")

Rien de mieux pour comprendre les classes de similitude que de les décrire en totalité dans l'espace des matrices $M_2(K)$ et de les dénombrer dans le cas où le corps est fini. Une vidéo qui se vit comme un beau voyage (sans trop d'émission de CO_2) et dont on se sort grandi.

Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini et comportement asymptotique (18'26")

Un petit développement pour l'externe. En suivant **Carnet de Voyage en Algèbre**, on calcule le nombre de matrices diagonalisables sur un corps à q éléments. On en déduit que la probabilité de piocher une matrice diagonalisable dans $M_n(K)$ tend vers $1/n!$ dans K est grand.

● Sous-espace de matrice diagonalisables sur F_p (8'48")

On cherche un contre-exemple de sous-espace de matrices toutes diagonalisables sur un corps fini, sans la condition de diagonalisabilité.

Nombre de matrices nilpotentes sur un corps fini (22'53")

Le cardinal du cône nilpotent sur un corps fini fournit une formule bien intrigante (c'est le cardinal d'un espace vectoriel du corps fini alors que tout le monde sait que ce cône n'est pas un sous-espace vectoriel !). On tente une méthode sous forme "développement 15 minutes" que l'on peut trouver dans H2G2 tome 2 (2015) Chapitre IV-Théorème 4.1. Une autre méthode est disponible dans **Carnet de Voyage en Algèbre**, en utilisant le lemme de Fitting.

4 - Les groupes sous tous les angles (50)

1 – Groupes finis

● **Espérance du nombre de cycles (une méthode alternative) (15'42")**

Quoi de mieux pour finir l'année que de parler d'espérance ? Et, ici, nous allons **revenir sur l'espérance du nombre de cycle**, qui a déjà fait l'objet d'une vidéo, mais nous revenons dessus de façon totalement indépendante puisque mon camarade de promo François a proposé une méthode qui ne manque pas de panache. Et, bien sûr, **derrière cette élégance se cache un grand nom de la théorie des groupes** que je préfère ne pas dévoiler ici...

● **Critère de cyclicité pour les groupes finis (16'13)**

Les groupes cycliques sont les "sous-groupes élémentaires" d'un groupe fini. Il est donc important de bien les connaître et savoir les reconnaître. On donne ici un critère pour montrer qu'un groupe est cyclique et qu'il a des applications intéressantes, en particulier, dans l'étude du groupe multiplicatif d'un corps ou des inversibles d'un anneau intègre. La preuve utilise une formule sur **la fonction indicatrice d'Euler**, qui elle-même utilise l'étude des groupes cycliques. On tourne en boucle !

● **Les classes de conjugaison du groupe S_n (10'53")**

Voici une preuve à bien connaître dans la leçon sur les groupes de permutation : celle du théorème qui stipule que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même partition associée. On va partir de la formule de conjugaison des permutations pour définir cette partition associée et montrer qu'il s'agit bien de ce que l'on appelle un "invariant total de conjugaison". Invariant total, vous ne viendrez plus chez nous par hasard !

● **Les classes de conjugaison du groupe S_{n-2} (15'45")**

Nous venons de voir dans une vidéo précédente que les classes de conjugaison de S_n sont paramétrées par les partitions de n . Voici maintenant une preuve pour la formule du cardinal de la classe de conjugaison associée à une partition.

● **Groupes de permutations: la surjection de S_n sur S_{n-1} (21'07")**

Le thème des morphismes surjectifs de groupes entre le groupe de permutation S_n et le groupe S_{n-1} permet de visiter tout un pan de la théorie des groupes. A ce titre, il tient une place de choix dans les questions de jury et autres divertissements :-)

● **Sous-groupe d'indice premier minimal (10'05")**

On montre ici que, si p est le nombre premier minimal divisant l'ordre d'un groupe G et si H est un sous-groupe d'indice p de G , alors H est distingué dans G . Ce sera l'occasion de montrer l'utilité de l'action de G sur l'espace, dit homogène, G/H .

● **Moyenne et variance du nombre d'invariants par la formule de Burnside (15'30")**

On sait que le groupe de permutation S_n agit sur l'ensemble des entiers de 1 à n . Combien une permutation a-t-elle, en moyenne, d'éléments fixés ? Et quelle en est la variance ? Nous allons voir que toutes les réponses à ces questions proviennent de la formule de Burnside... Vous pouvez trouver une belle application avec un jeu de cartes sur [Des cartes bien à...](#)

● **Les Tutos d'Alex: la formule de Burnside (19'27")**

Alex vient d'être reçu à l'agrégation interne de mathématiques avec un rang très honorable! Il nous présente ici avec force détails la formule de Burnside..

● **Le collier de perles ou le coloriage du n -gone (59'42")**

Voici une présentation (un peu improvisée) du collier de perles en trois parties plus un épilogue. Il s'agit de problèmes de dénombrement par action d'un groupe cyclique. On répond à une question très naturelle des coloriages du n -gone modulo isométrie et non plus modulo rotation. Ceci nous mène à observer le groupe diédral, on finit sur une formule générale du nombre de coloriages qui distingue le cas pair et le cas impair.

● **Sous-groupes d'indice 2 d'un groupe fini (15'13")**

Voici un petit exercice sur l'existence d'un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe fini d'ordre $2n$, n impair. Une application remarquable du théorème de Cayley. Remarque pertinente de Rached Mneimné : parmi les groupes finis d'ordre pair qui ne possèdent pas de sous-groupes d'indice 2, j'ai parlé de groupes simples non abéliens mais j'ai omis de mentionner le groupe A_4 , d'ordre 12 qui ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6. On peut s'en convaincre en disant qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué, donc union de classes de conjugaison, ce qui est impossible pour A_4 au vu du cardinal (1,3,8) de ses classes de conjugaison.

● **La formule de Dobinski (finie) (21'39")**

Une formule qui illustre parfaitement la puissance des actions de groupes. On part de la question suivante : on sait que le groupe de permutation S_n agit transitivement sur $X = [1, n]$. Combien y a-t-il d'orbites quand il agit naturellement sur X^n ?

● **Oral-ENS sur les permutations (9'55")**

Une petite formule sur les permutations proposée aux oraux l'Ulm. Et une résolution particulièrement sympathique qui passe par toutes les validations d'un programme d'algèbre linéaire de licence :-). Errata : il faut changer le $-3/4$ en $3/4$ et le $(-1)^n$ en $(-1)^{n+1}$. Merci à Pascal Mathieu de l'avoir signalé.

● **Oraux-X ENS sur les groupes par Luca (27'09")**

Luca revient nous voir sur la chaîne avec un exercice inédit sur les groupes qu'il a concocté à partir d'un souvenir de L3. Les automorphismes de groupes agissent, bien sûr naturellement, sur le groupe mais que peut-on espérer de la transitivité de cette action (quand on enlève l'élément neutre) ?

Log discret et protocole El Gamal (19'11'')

On présente le protocole El Gamal et l'intérêt de calculer le logarithme discret afin de décrypter les messages. Cela nous donnera l'occasion de voir ou de revoir les techniques de base dans un groupe cyclique...

Un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués (11'57'')

On sait que les groupes abéliens partagent cette propriété que tous leurs sous-groupes sont distingués. Mais sont-ils les seuls ? Nous proposons ici un modèle de groupes non abéliens finis qui vérifient également cette propriété. Un théorème de Dedekind nous affirme que ce sont les seuls. Mais, en attendant le théorème d'unicité, il s'agit d'un exercice bien agréable qui nous fait visiter les propriétés si particulières du groupe des quaternions.

● Nombres cycliques de la forme pq (22'05'')

Un nombre n est dit cyclique si tous les groupes d'ordre n sont cycliques. Par exemple, tout nombre premier est cyclique, 15 et 33 sont cycliques. Le but de cette vidéo est de donner une condition simple pour qu'un nombre de la forme pq (avec p et q premiers distincts) soit cyclique. On donnera ensuite sans preuve un résultat plus général.

● Groupes finis et nombres cycliques (31'06'')

Un nombre n est dit cyclique si tout groupe d'ordre n est automatiquement cyclique. Dans cette vidéo, on caractérise les nombres cycliques. On commence doucement avec les cas $n=p$ et $n=pq$ pour finir en beauté avec un théorème complet de caractérisation.

● Les groupes d'ordre 8 par Luca (32'11'')

Luca nous propose une preuve de la classification des groupes d'ordre 8 au niveau licence.

2- Le Lucalendrier de l'avent 2025 – Un petit vrai-faux sur les groupes pendant les fêtes !

Luca nous propose un calendrier de l'Avent plein de pépites au quotidien pendant cette période festive. Un petit Vrai-Faux par jour sur les groupes, à difficulté variable, mais à pédagogie constante, car on sait que Luca est maître en la matière !

● Le Lucalendrier de l'Avent - 01/12 (4'39'')

Si G est le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$, G est-il cyclique ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 02/12 (3'40'')

Soit G un groupe de cardinal 36, est-il abélien ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 03/12 (3'35'')

Si tout élément d'un groupe G est d'ordre fini, G est-il nécessairement fini ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 04/12 (3'28'')

Un produit direct de deux groupes finis est-il cyclique ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 05/12 (5'17'')

Un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est-il nécessairement abélien ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 06/12 (3'54'')

Si G est un groupe cyclique, est-il vrai que $\text{Aut}(G)$ est abélien ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 07/12 (6'09'')

Si pour tout diviseur d strict de l'ordre d'un groupe fini, il existe un élément d'ordre d , G est-il nécessairement cyclique ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 08/12 (5'21'')

Si le groupe G possède un sous-groupe distingué cyclique avec un quotient cyclique, est-il vrai que G est nécessairement cyclique ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 09/12 (3'37'')

Dans un groupe fini, dont a et b sont deux éléments, est-il vrai que l'ordre de ab est égal à celui de ba ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 10/12 (6'14'')

Si G est abélien, est-il vrai que le groupe d'automorphismes de G est aussi abélien ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 11/12 (4'20'')

Si H est un sous-groupe distingué d'indice n dans G , est-il vrai que x^n est dans H pour tout x dans G ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 12/12 (3'30'')

Si H est un sous-groupe distingué de G , est-il vrai qu'il existe un morphisme de G dans un groupe G' de noyau H ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 13/12 (3'27'')

Si H est un sous-groupe distingué, d'un groupe G , d'indice n , est-il vrai qu'il est alors le seul sous-groupe distingué d'indice n ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 14/12 (7'07'')

Est-il vrai qu'un morphisme entre deux groupes d'ordres premiers entre eux est nécessairement trivial ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 15/12 (12'08'')

Est-il vrai que le cardinal du centre d'un groupe, d'ordre 27, est soit 3, soit 27 ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 16/12 (4'22'')

Est-il vrai que si H est un sous-groupe de G tel que x^2 est dans H pour tout x de G alors H est distingué dans G ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 17/12 (8'16'')

Est-il vrai que si un groupe G admet un élément d'ordre 2 et un d'ordre 3 alors G admet un élément d'ordre 6 ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 18/12 (6'15'')

Est-il vrai que si sous-groupe G d'ordre $2n$ possède deux sous-groupes d'ordre n d'intersection triviale alors $n=2$?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 19/12 (3'38'')

Est-il vrai que si un groupe G d'ordre impair possède un sous-groupe d'indice 3 alors ce dernier est distingué dans G ?

● Le Lucalendrier de l'Avent - 20/12 (6'07'')

Est-il vrai que si H , sous-groupe distingué d'un groupe G , est cyclique alors tout sous-groupe de H est distingué dans G ?

- **Le Lucalendrier de l'Avent - 21/12 (9'57")**

Est-il vrai que si $\text{Aut}(G)$ est cyclique avec G fini alors G est abélien ?

- **Le Lucalendrier de l'Avent - 22/12 (7'08")**

Est-il vrai que si A et B sont deux parties d'un groupe G dont la somme des cardinaux dépasse strictement le cardinal de G alors tout élément de G peut se décomposer sous la forme ab avec a élément de A et b élément de B ?

- **Le Lucalendrier de l'Avent - 23/12 (12'13")**

Est-il vrai que si G est un groupe simple non abélien alors le centre de son groupe d'automorphismes est trivial ?

- **Le Lucalendrier de l'Avent - 24/12 (10'47")**

Est-il vrai que si on retire les éléments d'ordre 2 d'un groupe G d'ordre $2n$ alors on obtient un sous-groupe H de G d'ordre n avec n impair et H abélien ?

- **Groupes finis possédant 3 classes de conjugaison (13'36")**

Un bel exercice pioché sur le site Maths Woods (bientôt présenté plus en détails sur cette chaîne par ses créateurs): trouve (à isomorphisme près) tous les groupes finis possédant 3 classes de conjugaison.

- **Un scoop sur la caractérisation des sous-groupes distingués (par Paul Broussous) (3'58")**

Un scoop de Paul Broussous qui nous apporte une nouvelle (?) caractérisation des sous-groupes distingués. Je précise que Paul a partagé le scoop mais n'est pas à l'origine de ce résultat qui devait être bien connu! C'était simple mais il fallait y penser! En plus on retrouvera avec plaisir que tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué 😊 Matthieu (de Math Woods) me fait remarquer que l'on peut remplacer dans l'énoncé "sous-groupe" par "partie" et "distingué" par "union de classe de conjugaison".

3 – Sous-groupes de GL_n - groupe orthogonal

- **$GL_n(\mathbb{C})$ est engendré par tout voisinage de l'identité (Niveau licence) (16'41")**

Une jolie preuve "constructive" que je dois à Fabrice Castel où l'on montre que **le groupe linéaire complexe est engendré par son intersection avec toute boule ouverte contenant l'identité**. Du coup, **cela prouve que tout sous-groupe ouvert de $GL_n(\mathbb{C})$ est... $GL_n(\mathbb{C})$ lui-même**.

- **Le groupe orthogonal (engendrement en toute simplicité) (1h09'08")**

Un grand classique ! On étudie le groupe orthogonal d'un espace euclidien. On s'intéresse, dans un premier temps, à l'engendrement du **groupe orthogonal par des réflexions orthogonales** puis, on montre le résultat classique de **l'engendrement du groupe spécial orthogonal par des retournements orthogonaux**. Puis, on attaque ici **la simplicité de SO_3** . Il ne faudra pas moins de deux vidéos pour en venir à bout.

- **Tout (ou presque) sur le groupe orthogonal ! (31'16")**

On va faire **le point sur le groupe orthogonal** : définitions, premières propriétés, centre, sous-groupes distingués, réduction, topologie, actions... Et le groupe orthogonal, c'est aussi un groupe qui participe à des décompositions (polaires, QR) essentielles en mathématiques !

- **Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (21'42")**

On va montrer, dans un premier temps, que **le groupe orthogonal est compact** et, même, qu'il s'agit d'un **sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$** . Dans un deuxième temps, on passe à un théorème plus difficile mais fondamental : **tout sous-groupe compact est conjugué à un sous-groupe de O_n** . Ce morceau de bravoure nous demandera d'utiliser **le théorème de l'ellipsoïde de John-Loewner**. Voir le chapitre des développements.

- **Sous-groupes à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$ (22'25")**

On présente **un développement qui peut être utile** également aux épreuves écrites (voir Agreg interne EP1-2014) sur **les morphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$ vers $GL_n(\mathbb{C})$** . On suit l'exercice III-F-17 de Nouvelles Histoires Hédonistes de Géométries.

4 – Groupes en analyse

- **Sur le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ (22'52")**

Quelques aspects "groupistes" de l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbb{R}$, muni de la loi $\circ$. **On s'intéresse ici à un objet essentiellement analytique avec un regard d'algébriste**.

5- Arithmétique, anneaux, corps et polynômes (55)

Arithmétique (28)

● Le produit des diviseurs d'un entier (8'13")

Voici un petit exercice classique d'arithmétique qui permet de mieux comprendre et utiliser la structure "symétrique" de l'ensemble des diviseurs d'un entier.

● Fermat, Lagrange et Gauss en moins de 10 minutes? (Les trois théorèmes de décomposition en carrés) (9'44")

On a proposé récemment à travers l'épreuve MG-89 tous les théorèmes de décomposition en carrés. Nous en donnons un exposé succinct qui permet de prendre du recul sur une méthode complètement unifiée que nous proposait cette épreuve.

Deux équations diophantiennes quadratiques (17'34")

On propose deux équations diophantiennes de type $x^2 + y^2 - pz^2 = 0$, où p est un nombre premier. Dans un premier temps, $p \equiv 3 \pmod{4}$ et l'équation est vite résolue. Dans un deuxième temps, $p \equiv 1 \pmod{4}$ et, après avoir fait des rappels sur la factorialité de $\mathbb{Z}[i]$, on en trouve toutes les solutions.

Le problème des diviseurs de Dirichlet (11'27") et Le problème des diviseurs de Dirichlet - 2 (13'37")

Trouver quel est le nombre de diviseurs (positifs) d'un entier donné est chose facile mais quelle est la moyenne du nombre de diviseurs sur les n premiers entiers consécutifs est chose plus ardue et pourrait même nous emmener vers des fonds abyssaux. Voici un petit exposé du problème qui peut constituer un développement raisonnable à l'agrégation interne (ou externe), vu ses liens avec l'analyse et l'arithmétique.

Une formule polynomiale pour l'identité de Bezout (31'53")

Algorithme d'Euclide et polynômes continuants. Nous allons voir ici des formules polynomiales qui permettent, entre autres, de calculer une identité de Bezout entre deux nombres a et b à partir de l'algorithme d'Euclide. On introduit des polynômes classiques, que l'on peut voir comme des analogues polynomiaux des nombres de Fibonacci. Dans un deuxième temps, nous allons utiliser ces polynômes continuants définis pour donner une borne au nombre d'opérations à effectuer à partir de deux nombres a et b dont on veut trouver le PGCD. Une recherche qui nous fera découvrir la base d'or...

● Divisibilité dans les nombres de Fibonacci et de Lucas-1 (20'11")

Un petit exposé de Denis Roussillat. Pour un nombre premier p fixé, Denis étudie la condition " p divise F_n " et " p divise L_n " où (F_n) et (L_n) désignent respectivement la suite de Fibonacci et la suite de Lucas, cette dernière étant à la première ce que le sinus est au cosinus. Dans un premier temps, après avoir fait quelques remarques d'ordre empirique, on explique une jolie propriété de périodicité pour la première condition.

Divisibilité dans les nombres de Fibonacci et de Lucas-2 (13'14")

Et voici un critère portant sur le rang pour qu'un nombre premier divise un nombre de Lucas.

Divisibilité dans les nombres de Fibonacci et de Lucas-3 (29'04")

On veut montrer que l'ordre $b(p)$ d'apparition d'un nombre premier p dans la suite de Fibonacci divise $p-1$ ou $p+1$ selon les congruences de $p \pmod{5}$. Même si on pourra trouver des méthodes plus directes, celle-ci fait visiter un bon nombre de parties du programme de l'agrégation et peut devenir un joli développement. Au programme : nombre premiers, corps finis et formes quadratiques.

● Lemme chinois- le best off (37'38")

Un recueil d'exercices autour du lemme chinois en arithmétique (et autres mandarinades)

● Un exercice qui utilise le lemme chinois (23'56")

Un petit exercice qui a l'avantage de faire le point sur toutes les techniques autour du lemme chinois. Combien y a-t-il d'entiers p premiers à 120 et $p \equiv 3 \pmod{4}$?

● Exercices Arithmétique 1 (10'09")

Voici quelques petits exercices corrigés en arithmétique. Des exercices que l'on peut poser à l'oral donc, généralement, plus facile que des exercices d'écrit. Au programme, le théorème fondamental de l'arithmétique, le lemme de Gauss, la fonction d'Euler, le théorème de Lagrange...

● Exercices Arithmétique 2 (15'46")

On résout des petites équations de congruence autour du lemme chinois puis, lorsque le lemme chinois ne peut pas nous venir en aide (on travaille modulo 17^2), on a une variante avec une méthode de Newton p -adique. Enfin, deux exercices supplémentaires autour de la fonction indicatrice d'Euler.

● Exercices Arithmétique 3 (12'37")

On revient sur les systèmes (affines) de congruences. On attaque les systèmes à trois équations et le cas où l'on sort du cadre classique du lemme chinois, c'est-à-dire, où les nombres ne sont pas premiers entre eux.

● Exercices Arithmétique 4 (9'54")

On résout un petit système de congruence dans un cadre "hors lemme chinois" avant de le modéliser sous forme de suite exacte de groupes.

● Loi complémentaire de réciprocité quadratique au bac ! (7'35")

La loi complémentaire de réciprocité quadratique a été donnée au bac marocain 2023 sous forme d'exercice. Voici donc ce qui est probablement la preuve la plus élémentaire du fait que le résidu quadratique de 2 modulo p premier impair est égal à $(-1)^{(p^2-1)/8}$.

● Codage RSA, décodage et cryptanalyse (29'00")

Comme **application classique du lemme chinois**, on présente ici le **codage RSA**, son décodage, avec un exemple. Moins classique, nous allons présenter **des tentatives de craquage du code**. Tout d'abord, ce que l'on appelle **l'attaque de Fermat**. Puis, on étudie l'efficacité d'une attaque probabiliste du système RSA. Au programme : **le lemme chinois qui nous permet de résoudre une équation algébrique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** .

● Système RSA- Codage et décodage-Attaques et contre-attaques! (48'20")

On présente le **système RSA-codage, décodage et cryptanalyse (comment casser le code) en trois vidéos, le tout dans le cadre d'un oral à l'agrégation**. Cette première vidéo traite du codage et du décodage. Errata : J'ai écrit par mégarde une coquille : $\phi(n)=(p-1)(q-1) = n-p-q-1$ au lieu de $n-p-q+1$. Je dois un coup à boire à Sébastien Sanchez qui me l'a signalée.

Cette seconde vidéo traite de **l'attaque dite, de Fermat, et d'une autre forme d'attaque, plus empirique**.

Cette troisième vidéo traite de **l'attaque de Wiener, basée sur le théorème de meilleure approximation**, que nous nous contenterons d'énoncer ici mais que nous démontrerons dans une prochaine vidéo. Errata : en fait, tout à la fin je dis que l'on doit vérifier que $x^d \equiv x^n [n]$ mais c'est $(x^e)^d \equiv x [n]$.

● Exercices sur le thème "arithmétique au secours de la réduction" (15'12")

Deux exercices (plus une variante) où **l'arithmétique des polynômes vient délivrer la réduction de ses problèmes de diagonalisabilité !**

● Le théorème de Wilson en 4 preuves et une application ! (17'12")

On propose ici **pour le théorème de Wilson, 4 preuves assez différentes pour pouvoir nous donner un aperçu des méthodes en arithmétique allant de la terminale (option math) jusqu'à l'agrégation ! On finit avec une petite application classique**. NB : Lionel Ducos propose une **bien meilleure preuve pour la réciproque de Wilson** (la mienne était un peu fait-main) : **on suppose $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$** . Ensuite, il suffit de considérer un diviseur de p , noté d de $1 < d < p-1$ alors d divise $(p-1)!$ et comme d divise p , on conclut que d divise -1 , $d = 1$ et donc p est premier !

● De l'arithmétique simple... aux pépites inattendues! (Un exercice estival d'Eric Tréfeu) (22'34")

Partez d'un exercice d'arithmétique, même modeste, comme celui que nous propose aujourd'hui Eric Tréfeu, et creusez, creusez... Vous pouvez y passer tout d'été à découvrir des choses étonnantes!

L'aire d'un triangle pythagoricien est-elle un carré? (11'39")

A partir d'un article de W.S. Anglin, je montre ce joli résultat, qui sent bon les équations de Fermat et ses méthodes de descente, que l'aire d'un triangle pythagoricien (exemple = triangle rectangle de côtés (3,4,5), d'aire 6) n'est jamais un carré, sauf cas trivial (aire nulle).

● Les suites de Farey (37'29")

Mathématiques récréatives aujourd'hui! Avec les suites de Farey. Des suites si simples à définir, mais si profondes en conjectures. Mais quel lien avec l'hypothèse de Riemann? :-)

● Montrer que n divise $\sum_{i=1}^n k^{\text{PGCD}(i,n)}$ (23'05")

Voici l'énoncé d'un exercice d'arithmétique qui pourrait faire l'objet d'un joli développement (voir Francinou-Gianella, Algèbre 1), où l'on doit montrer que n divise une somme exponentielle. Mais la chose devient passionnante quand elle prend un sens combinatoire... Au programme, petit théorème de Fermat, d'Euler, groupes cycliques, actions de groupes, et quelques surprises que je ne voudrais pas spoiler.

● Quels nombres se réalisent comme sommes d'entiers consécutifs? (Et un tour de magie!) (19'25")

Un petit exercice pioché dans Math Woods consiste à décrire simplement tous les nombres s'écrivant comme somme d'entiers positifs consécutifs (bien entendu avec au moins deux termes). On en donne une solution augmentée où l'on calcule le nombre de façon de le faire! Le lien sur le site Math Woods

● Résoudre $x^5 - 6x + 5 = p^k$, x entier, k positif, p premier (10'10")

Une petite équation diophantienne astucieuse qui demande juste un niveau "terminale option maths" mais surtout beaucoup d'amour et de passion...

● Système de congruence: la formule qui met tout le monde d'accord! (10'21")

Un exercice proposé par Eric Trefeu qui donne une formule miracle pour la solution d'un système de congruence dans un cadre général. On donne une solution qui englobe tous les niveaux de math expert au niveau agrégation.

● La suite des nombres premiers est-elle une suite récurrente linéaire? (15'09")

Un exercice proposé par Thomas (alias Séquoia) sur Math Woods! Je vous laisse en imaginer un point de vue analytique, mais je propose ici une preuve purement algébrique (valable sur tout corps!)

Anneaux (5)

● Montrez que tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal! (6'24")

On résout cet exercice classique de montrer que **tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal**.

● Entiers de Gauss, factorialité, et cercle rationnel-1 (18'35")

On introduit, tout d'abord, la paramétrisation rationnelle du cercle, qui possède l'avantage de pouvoir se définir sur tout corps, contrairement à la paramétrisation trigonométrique, spécifiquement réelle. En comparant les deux paramétrisations, sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, on arrive à se demander quels sont les points rationnels du cercle, dont l'angle associé est commensurable avec π . On montre que ce sont juste les 4 points cardinaux du cercle. Il se trouve que la factorialité de l'anneau des entiers de Gauss (et ses inversibles) se cache derrière ce phénomène.

● Entiers de Gauss, factorialité, et cercle rationnel-2 (7'24")

A l'aide d'une jolie preuve qui utilise l'anneau des entiers de Gauss et sa factorialité, on a montré récemment que les points rationnels du cercle dont l'angle associé est commensurable avec π sont les quatre points cardinaux. On montre ce même résultat par une autre méthode, proposée par Jérôme Germoni, qui utilise les polynômes cyclotomiques et l'indicatrice d'Euler.

● Entiers de Gauss (petits calculs entre amis) (31'12")

Quelques petits calculs à la bonne franquette dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss. Un apéro convivial avec au menu division euclidienne, algorithme d'Euclide, identité de Bezout et décomposition en facteurs premiers. On verra de nos propres yeux des idéaux de $\mathbb{Z}[i]$, de nouveaux corps quotients exotiques qui vont nous changer de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On y va sans complexe et on se laisse guider par le plaisir !

● X^{p-a} et l'alternative irréductible/existence de racine (9'31")

Voici la preuve classique du fait que, si p est premier, $P=X^{p-a}$ est irréductible sur un corps K si et seulement si P n'a pas de racine dans K .

Corps (2)

● Introduction au corps gauche des quaternions- (X-ENS-2023) -1 (20'23")

Dans cette vidéo, nous allons introduire le corps des quaternions selon le principe que si vous avez compris le corps des complexes, alors, vous avez compris les quaternions... à condition que vous puissiez changer les "o" en "u".

● Introduction au corps gauche des quaternions- (X-ENS-2023) -2 (22'33")

On continue cette présentation du corps des quaternions en suivant la trame de l'épreuve ENS-2023 (mais en proposant parfois les raccourcis de Nouvelles Histoires Hédonistes-Chap. VII). On y découvre que toute rotation de l'espace de dimension 3 peut être réalisée comme une conjugaison sur l'espace des imaginaires quaternioniques !

Polynômes (20)

● Un exercice sur le thème "polynôme, racines et multiplicités" (10'13")

Un exercice, d'apparence anodine, sur une racine d'un polynôme P dans $\mathbb{Q}[X]$ et une condition nécessaire sur sa multiplicité pour que cette racine soit dans le corps de base ($\mathbb{Q}$). Cet exercice résiste (car il existe !) aux approches naïves et ce pour une bonne raison : une notion importante se cache derrière le corps de base. Errata (merci à Samir Boufnichel pour son commentaire) il faut dire que le degré de P' est strictement plus petit que le degré de P pour affirmer que le polynôme minimal de α divise strictement P . En effet, il n'est pas clair du tout que P' divise P comme je l'ai affirmé.

● Relations coefficients-racines: les identités de Newton (23'58")

Une petite preuve ou deux des identités de Newton. Tout d'abord, une preuve (dans un cas particulier) provenant du théorème de Cayley-Hamilton. Puis, une preuve générale qui utilise les séries entières et que l'on peut retrouver dans le problème de Centrale 2001, présenté récemment sur cette chaîne.

● Identités de Newton par la trace (22'52")

On présente ici les identités de Newton et l'utilisation magique de la trace des matrices pour les obtenir. Les identités de Newton sont devenues le dernier horizon de la connaissance de nos étudiants de Master concernant les polynômes symétriques. Elles permettent de mettre en relation les sommes de Newton (sommes des puissances k -ièmes des racines) avec les fonctions symétriques élémentaires. Cette vidéo montre comment, en s'inspirant d'un exercice de Bourbaki, retrouver ces identités à l'aide de la réduction. Si la méthode est express et absolument lumineuse, on peut être déçu de constater qu'un bon nombre de cas échappent aux hypothèses (quand k est plus petit que le nombre de variables !). On propose ici une méthode (nouvelle ?) pour y remédier.

● Exercices sur le thème relations coefficients/racines (23'57")

On propose sept petits exercices divers et variés pour combler les lacunes sur cette thématique fondamentale en mathématiques.

● Un petit test sur les racines multiples (18'02")

On propose un petit exercice sur un polynôme à coefficients entiers dont on impose qu'il possède une racine double. La question est "dans quels corps ceci est-il possible ?". Dans un deuxième temps, cette question nous amènera à un critère étonnant de primalité et on conclut avec ce qui pourrait être une amorce de problème d'agrégation.

● Quand P'' divise-t-il P ? (21'15")

Voici un petit exercice qui pourrait sembler anodin s'il n'était pas en triple connexion avec un célèbre mathématicien du nom de Gauss ! On cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P'' divise P . On va proposer deux solutions : une élémentaire par les séries entières et une autre par l'algèbre linéaire par la réduction. Mais, surtout, Totototo a remarqué un lien avec les fonctions hypergéométriques de Gauss et, finalement, cette petite taupinade va se retrouver cernée de près par le théorème de Gauss-Lucas, les fonctions hypergéométriques et, pour finir, les théorèmes de quadrature de Gauss. Bref, le festival de Göttingen !

● Un exercice qui utilise des polynômes (6'02'')

Comment, à l'aide de polynômes, prouver que les fonctions x^{ai} sont indépendantes ? A vous de jouer !

● Exercice sur polynômes et PGCD (AE 2021 Spécial docteur) (9'51'')

Un exercice instructif donné à l'AE spécial docteur 2021. Il s'agit de **montrer que la suite PGCD(P(n), Q(n)) est périodique quand P et Q sont des polynômes à coefficients entiers sans diviseurs communs**. En quelques minutes, on parcourt les principales techniques arithmétiques liées au PGCD et on déjoue quelques gros pièges !

● Polynômes interpolateurs de Lagrange vs lemme chinois ? (17'17'')

On présente ici le théorème des polynômes interpolateurs de Lagrange dans une version "lemme-chinois compatible".

● Décomposition des polynômes cyclotomiques modulo p (26'41'')

On donne ici une description de la décomposition en irréductibles du nième polynôme cyclotomique modulo p, un nombre premier. Dans un premier temps, on étudie le cas où p ne divise pas n, puis on s'intéresse au cas général.

● Irréductibilité des polynômes cyclotomiques (ma preuve coup de cœur) (14'41'')

La preuve de Issai Schur de l'irréductibilité des polynômes cyclotomique est pour moi la preuve la plus élégante et la plus instructive, suivie de près de celle que l'on peut trouver dans le livre de Daniel Perrin qui consiste à réduire modulo p une réduction sur Z. On utilise ici le discriminant du polynôme X^{n-1} ainsi que l'anneau des entiers algébriques.

● Polynômes cyclotomiques (petits calculs entre amis) (57'45'')

On introduit les polynômes cyclotomiques et les deux formules qui permettent de les définir. Une formule qui les définit, pas pratique d'utilisation, et une formule qui permet de les calculer par récurrence. C'est cette seconde formule qui va nous permettre de faire des petits calculs préliminaires. Le but est de calculer (au moins se rassurer qu'on soit capable de le faire facilement) φ_n pour n de 1 à 104. Dans cette première vidéo, on se contentera de les calculer jusqu'à 12.

Les petits calculs sur les polynômes cyclotomiques vont devenir un peu plus sérieux à l'aide de la fonction de Moebius, formule d'inversion très utile pour passer de φ_n à φ_{pn} pour tout p premier.

On termine ce petit exposé sur le calcul des polynômes cyclotomiques avec le calcul des polynômes φ_{pq} , premiers. On va voir une recette simple qui nous permet de trouver tous les monômes de la décomposition, ce qui nous permet de voir, au passage, que si n ne possède que deux facteurs premiers impairs dans sa décomposition (même avec multiplicité) alors, φ_n possède tous ses coefficients dans $\{0, 1, -1\}$. Le premier polynôme cyclotomique qui échappe à nos recettes simples sera donc pour $n=3 \times 5 \times 7=105$. On finit sur un exemple en calculant φ_{60} .

● Irréductibilité sur $\mathbb{Z}[X]$. Un exercice bien pourri (mais instructif!) (10'11'')

Laurent, que je remercie au passage, me fait justement remarquer que l'exercice, lourd d'hypothèses, mis récemment en ligne,  ● **Comment prouver qu'un polynôme est irréductible...** était trivialisable en allégeant complètement les hypothèses. Je fais donc ici un rectificatif mais, en assumant tout de même la méthode, qui contrairement à l'exemple choisi, me semble digne d'être présentée. Elle consiste à utiliser le treillis complet des partitions d'un nombre pour prouver l'irréductibilité d'un polynôme sur un anneau. Le rectificatif nous semble d'autant plus important à faire que cet exercice se retrouve dans deux références importantes de nos agrégatifs.

● Qui es-tu, critère d'Eisenstein? (17'11'')

On décline dans cette petite vidéo les preuves du critère d'irréductibilité d'Eisenstein. Tout d'abord, la preuve classique (finalement assez élémentaire) puis, une preuve par passage au quotient. Mais, la troisième preuve, bien plus subtile qui utilise de l'analyse p-adique nous montre le critère sous un nouveau jour, permettant de nouvelles extensions...

● Le critère d'irréductibilité de Cohn (11'57'')

Voici un critère d'irréductibilité sur $\mathbb{Z}[X]$ qui fera concurrence à celui d'Eisenstein tout en développant un bon nombre de techniques utiles dans le monde de l'arithmétique des polynômes. Un théorème étonnant qui finalement ne demande que très peu de bagage.

● Condition sur P pour que P(A) soit inversible (et une belle application !) (8'55'')

Dans le cadre de l'exercice transverse vu précédemment mon collègue Paul Broussous propose  ● **Un exercice transverse entre réduction et ...** une preuve "trivialisante" qui passe par un détour sympathique de la réduction : l'utilisation du fait que P(A) est inversible si et seulement si P est premier avec le polynôme minimal de A...

Polynômes diagonalisant (et autres polynômes liés à la réduction) (23'53'')

Les polynômes diagonalisant portent bien leur nom : P est dit diagonalisant pour la matrice A si P(A) est diagonalisable. Mais qui sont-ils?

● Un critère oublié? Le critère d'irréductibilité de Perron (12'53'')

Quoi de plus triste qu'un théorème oublié par l'histoire ? Surtout quand il s'agit de magnifiquement bon critère d'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ de Perron... Pourtant, il s'agit d'un critère d'irréductibilité extrêmement simple d'utilisation, sa preuve est limpide (avec un minimum vital d'analyse complexe) et par-dessus le marché, ce théorème nous fournit des nombres de Pisot à profusion ! Il est temps de réhabiliter ce beau critère!

● Une preuve d'irréductibilité par localisation des racines (10'51'')

Voici un exercice intrigant proposé par Thomas Lejeune qui consiste à prouver qu'un polynôme unitaire dont les coefficients (autre que le dominant) sont la suite croissante des nombres premiers (tronquée) est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$. Comme dirait mon collègue Vincent Borrelli, on en apprend des choses en cheminant avec Kakeya...

Pour aller plus loin :

- **Du nouveau sur les morphismes de l'espace des polynômes! (50'01'')**

Béranger Seguin, algébriste, chercheur, et viewer de la chaîne à ses heures perdues, a écrit un petit article où il étudie **les endomorphismes d'une algèbre de polynômes vérifiant des propriétés de conservation liées à la multiplicité des racines**. Un exercice de haut vol dont j'ai extrait un résultat intéressant avec une compilation de belles idées. <https://arxiv.org/abs/2407.09118>

6 - Les formes quadratiques en éveil (14)

● Qui es-tu, forme polaire? (22'35")

Une vidéo où l'on présente la forme polaire, en lui posant les trois questions : qui es-tu ? que fais-tu ? d'où viens-tu ? Une vidéo qui aidera à digérer un cours sur les formes quadratiques.

● Formes de Hankel 1/7 (4'46") et Formes de Hankel 2/7 (6'53")

On propose ici une série de vidéos qui expliquent progressivement les formes de Hankel. L'idée est de partir d'un polynôme réel et, juste à l'aide d'identités de Newton et de méthode de Gauss (sur les formes quadratiques), trouver son nombre de racines distinctes et de racines réelles. Une première vidéo pour l'étude d'un cas élémentaire : les racines sont toutes réelles et distinctes et la forme de Hankel est définie positive.

● Formes de Hankel 3/7 (2'13")

Une troisième vidéo pour trouver la matrice de la forme de Hankel.

● Formes de Hankel 4/7 (7'20")

La vidéo numéro 4 propose un exemple de calcul de forme de Hankel pour un polynôme réel de degré 2. Cette fois-ci, les nombres α_i ne sont plus forcément ni distincts ni réels mais s'ils ne sont pas réels, ils seront conjugués. On voyage des relations coefficients/racines, en passant par le théorème de Sylvester et on parvient au signe du discriminant.

● Formes de Hankel 5/7 (4'30")

On va ici enfin (il était temps !) définir la forme de Hankel associée à un polynôme réel en toute généralité.

● Formes de Hankel 6/7 (7'13")

On veut dans cette vidéo calculer la signature de la forme de Hankel associée à un polynôme réel T .

● Formes de Hankel 7/7 (5'57")

On prouve le théorème de Hankel : la signature de la forme de Hankel d'un polynôme réel T "voit" son nombre de racines réelles et son nombre de racines distinctes.

● Les formes de Hankel (à leur état naturel) (13'42")

Voici une présentation des formes de Hankel (associée à un polynôme P réel) vue dans leur élément naturel, c'est-à-dire, sur un espace de polynôme réel. Dans un premier temps, nous présentons le cas où le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.

● Les formes de Hankel au naturel-2 (11'12")

Nous présentons maintenant le cas général.

● Forme quadratique sur l'espace des matrices carrées (18'24")

Un petit exercice autour d'une forme quadratique intrigante sur l'espace $M_n(\mathbb{K})$. En effet, elle est définie par un coefficient du polynôme caractéristique de la matrice (celui en X^{n-2}). Une fois rapportée à la forme trace, on répond à toutes les questions classiques du genre (non-dégénérescence, signature sur $\mathbb{R}$).

● Tout tétraèdre est régulier (en toute dimension) ! (25'05")

On montre ici que pour tout triangle non plat du plan, il existe un unique (à scalaire positif près) produit scalaire qui le rende équilatéral. On continue ensuite cette histoire en dimension 3 où l'on montre que tout tétraèdre (dont trois arêtes forment une base) est régulier. On finit par une généralisation en toute dimension. Mais, au fait, qu'est-ce qu'un polyèdre régulier en toute dimension ? On fera un détour autour de cette question afin d'en expliquer les subtilités.

● Question de jury sur les formes quadratiques réelles (19'56")

Nous proposons deux exercices qui permettent de faire le point sur les problèmes de signatures sur des espaces de matrices réelles.

● Dimension de l'orthogonal (même si la forme est dégénérée!) (20'11")

On sait (et on va le prouver à nouveau si besoin est) que la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace d'un espace E muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, est égale à la codimension de ce sous-espace. Mais qu'en est-il lorsque la forme est dégénérée. On fait le point (salutaire) sur la question !

7- Bouquet de géométries (31)

● Échanger deux sous-espaces par une isométrie (Niveau L2-L3) (16'48")

Un petit exercice sur l'existence d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ qui échange deux sous-espaces. On verra comment ce problème d'apparence anodine nous mènera à la notion de décomposition en valeurs singulières...

● Pourquoi une isométrie est-elle une application affine? (7'52")

C'est un résultat très connu qui nous dit que si une application d'un espace euclidien vers lui-même respecte la norme alors elle est automatiquement linéaire. Voici une preuve claire de ce résultat.

● Composée d'isométries planes-1 (21'34")

Un petit compte-rendu sur la composée d'isométries planes.

● Composée d'isométries planes-2 (7'46")

Quelques petits exercices de construction d'éléments caractéristiques d'isométries obtenues par composée de deux isométries. L'histoire de vérifier que la vidéo 1 a été bien digérée.

L'ensemble des supplémentaires d'un sous-espace et sa structure affine (23'03")

On propose ici l'étude de l'ensemble des supplémentaires d'un sous-espace fixé F d'un espace vectoriel E . On commence par le cas d'espaces vectoriels sur un corps fini afin de faire un peu de dénombrement. Le dénombrement va nous suggérer un résultat plus général et une certaine structure affine sur tout corps !

● Une bonne tranche de cône (les coniques) (16'28")

On va montrer, grâce au théorème de Sylvester, que toute conique non dégénérée provient d'une "tranche" d'un même cône appelé cône d'Apollonius. On ne va pas s'arrêter là et on va continuer notre investigation à d'autres dimensions.

Le cercle des neuf points par le calcul complexe (et en neuf minutes !) (12'53")

La preuve du cercle des neuf points en neuf minutes ? C'est possible avec le calcul complexe. On commencera tout de même par une présentation des outils du calcul complexe au service de la géométrie euclidienne.

● Utilisation de la réduction en géométrie affine - un exemple (29'07")

La droite de Newton fournit un exercice classique qui peut se résoudre de plusieurs manières. Mais celle que nous proposons utilise les liens indispensables qui autorise la théorie de la réduction à venir nous sauver des problèmes de l'anneau.

● Le théorème de Thébault (quadrilatères et réduction) (23'17")

Plusieurs thèmes en fusion dans ce petit exercice de géométrie faisant référence au théorème de Thébault (Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries Tome 2 XIII-E.49). Calcul complexe, quadrilatères... mais un dictionnaire entre quadrilatères classiques et sous-espaces stables par la matrice compagnon de X^4-1 . On en profite pour faire une petite publicité pour la théorie des représentations.

● Les tutos géométriques du Père Castor : Géométrie affine euclidienne (10'22")

Voici un exercice classique à l'oral durant une leçon sur les isométries du plan et de l'espace : la construction des éléments caractéristiques d'une symétrie glissée composée de trois symétries orthogonales par rapport à trois axes du plan euclidien. Présenté par Antoine.

● Les tutos géométriques du Père Castor : Puissance d'un point, axe radical (14'02")

Notre ami Antoine va nous montrer comment calculer la puissance d'un point par rapport à un cercle, tracer une tangente à un cercle à partir d'un point et trouver, en trois coups de compas, l'axe radical de deux cercles, c'est-à-dire le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles fixés.

● Les tutos géométriques du Père Castor : Droites tangentes à deux cercles donnés (7'52")

Comment placer deux droites tangentes à deux cercles donnés ? On va vous montrer que c'est très simple et, comme on pourrait s'en douter, ce n'est pas sans rapport avec l'axe radical de deux cercles.

● Les coniques. Un exercice képlérien (qui plaira !) (20'26")

Voici un petit exercice de géométrie plane, qui fait d'autant plus planer que l'on peut l'imaginer se réaliser dans le macrocosme du système solaire. A partir d'un énoncé simple, on voit apparaître un conique dans sa description bifocale. On finit sur un petit fichier gif concocté par Jérôme Germoni.

● Un exercice sur les coordonnées barycentriques d'un triangle (15'16")

On présente une fonction du plan affine qui s'exprime en termes de coordonnées barycentriques, à partir de trois points d'un triangle, et on cherche l'image du triangle de points milieux. Je vous donne en mille l'objet image que l'on va rencontrer...

● Groupes et Tétraèdre - le prequel (avec un triangle équilatéral) (16'18")

Pour celles et ceux qui voudraient se tenter au problème (développement) du tétraèdre tel qu'il est présenté dans Carnet de Voyage en Algèbre III-6.3, voici un "marche-pied" avec la présentation du groupe d'isométries du triangle équilatéral, isomorphe au groupe de permutation S_3 .

● Le groupe des isométries du tétraèdre agit sur ses sommets (25'47")

Un des points clef de l'isomorphisme entre le groupe des isométries du tétraèdre régulier et le groupe S_4 réside dans le fait que ce groupe permute les sommets du tétraèdre. Valérie regarde ce point dans tous ses détails.

Exercices Homographies (16'45")

Un petit exercice de transformation homographique dans le style de la partie I de l'épreuve EP1 de l'agrégation interne 2017. On montre que la transformation de Cayley envoie la droite réelle sur le cercle unité. On montre ensuite que cette transformation envoie le demi-plan de Poincaré sur le disque ouvert unité, par deux méthodes, une calculatoire et l'autre topologique.

● Ellipse de Steiner 1/6 (15'53")

On s'intéresse en 6 vidéos à l'ellipse de Steiner associée à un triangle. Plusieurs aspects seront étudiés autour de cette ellipse : géométrie, calcul complexe, groupes de transformations, relations coefficients-racines, équations de coniques ... et le chat Gaston. Bref, plein de choses qui en effraient plus d'un mais qui ronronnent tranquille quand on les a adoptées.

● Ellipse de Steiner 2/6 (11'03")

Après avoir montré l'existence de l'ellipse de Steiner d'un triangle, on en montre l'unicité. Encore une fois, les groupes de transformations nous permettent de nous ramener à une forme plus sympathique.

● Ellipse de Steiner 3/6 (10'39")

On aborde le problème des foyers de l'ellipse de Steiner. Pour l'instant, on ne fait qu'évoquer Gauss-Lucas et montrer que seul le groupe des isométries peut nous apporter quelque chose. Peu mais suffisant pour démarrer.

● Ellipse de Steiner 4/6 (9'25")

Maintenant que l'ellipse de Steiner a été placée dans le plan complexe, axée sur la droite réelle et centrée en 0, on attaque la stratégie de calcul, basée sur la recherche de l'équation de l'ellipse à partir d'une équation de "cercle de Steiner" pour le triangle des racines cubiques de l'unité. On introduit sous forme complexe une transformation affine.

● Ellipse de Steiner 5/6 (10'48")

On est en mesure de calculer l'équation de l'ellipse sous une forme dont on sait déduire les foyers.

● Ellipse de Steiner 6/6 (9'08")

A l'aide l'équation de l'ellipse de Steiner, on en calcule les foyers et on vérifie à l'aide de relations coefficients-racines qu'ils coïncident avec les racines du polynôme dérivé du triangle de départ.

● Une famille d'ellipses de Steiner (Agrégation interne) (22'01")

Un petit exercice proposé par Jérôme Germoni, autour des transformations affines et qui donnera un effet waouh à tous ceux qui ont mis l'ellipse de Steiner (Carnet de Voyage en Algérie) parmi leurs développements. Au menu, des groupes des transformations comme on les aime, des coniques telle qu'on aimerait en voir plus souvent, plein d'animations signées Jérôme et commentées par Phiphi.

● Droites et cercles 1/5 (13'27")

Les droites et cercles du plan sont étudiées à l'aide du calcul complexe, du groupe des homographies... et du birapport. Dans une première vidéo, on introduit, à l'aide des complexes, deux caractérisations de la cocyclicité (ou alignement) de quatre points. Une en termes d'arguments et l'autre de modules.

● Droites et cercles 2/5 (9'20")

On présente le groupe des homographies, groupe de transformations qui contient les translations, les similitudes directes et qui va préserver les cercles et droites. "Oui mais quand ?" comme dit mon collègue préféré. Ben quand vous serez prêts à le regarder en face !

● Droites et cercles 3/5 (21'40")

On étudie une chaîne d'actions de groupes emboîtés sur le plan complexe (prolongé par l'infini). Les translations amènent à la notion de bipoints équipollents, les similitudes directes à celle de triangles semblables et, enfin, les homographies à celle de quadruplets de points ayant même birapport. Lorsque ce dernier est réel, les quatre points sont cocycliques ou alignés.

Droites et cercles 4/5 (13'39")

Dans cette vidéo, on montre que le groupe des homographies agit de façon transitive sur l'ensemble des "cercles et droites".

Droites et cercles 5/5 (5'26")

On montre ici l'inégalité de Ptolémée, et son cas d'égalité, qui caractérise les quadruplets de points inscriptibles sur un cercle à l'aide des distances entre ces points. Encore une fois, le birapport est en première ligne.

● Que nul n'entre ici s'il n'a point d'invariant (34'14")

Une petite vidéo pour illustrer comment les invariants fleurissent en géométrie(s). Une idée fructueuse consiste à faire agir dans le contexte d'une géométrie un groupe G sur un ensemble X et de voir quand le groupe "décroche" en termes de n -transitivité, ie G agit n -transitivement sur X mais pas $n+1$ -transitivement. A ce moment, on est prêt à récupérer le précieux invariant ! On montre cette idée unifiante sur l'exemple, des angles, angles orientés, rapports, birapport, invariant anallagmatique, et même sur la réduite de Jordan !!!

● Le plus bel exercice qu'un hexagone puisse vous faire! (36'59")

Montrer que si un hexagone a ses arêtes opposées parallèles, alors ses trois bimédianes sont concourantes. Une solution zéro calcul. Dans un premier temps, on donne une solution géométrique "dans son jus" puis avec le langage plus moderne des formes quadratiques. On était tenté d'utiliser SAGE mais, voilà, qui vit sans SAGE n'est pas si fou qu'on croit ! Merci à Denis Roussillat pour avoir proposé ce magnifique exercice !

8 - Un epsilon d'analyse... (28)

● Petit exercice sur les équations différentielles linéaires (6'50'')

Un exercice donné à l'agrégation interne sur une leçon qui concernait les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

● Erreur dans l'approximation par la méthode de quadrature (20'30'')

La méthode de quadrature de Gauss est une méthode qui force le respect ainsi que la porte vers la théorie des polynômes orthogonaux.

Après avoir survolé les résultats principaux que l'on peut trouver dans **Carnet de Voyage en Analystan** ainsi que dans la vidéo de Caroline (**Méthode de quadrature de Gauss par Caroline (22'25'')**), on donnera une estimation de l'erreur commise par cette approche. On finira par une application pour une approximation du nombre π .

● Exercices Normes sur $\mathbb{R}[X]$ -1 (10'14'')

On commence une série de petits exercices présentant des contre-exemples sur les normes non équivalentes lorsque les espaces vectoriels sont de dimension infinie.

● Exercices Normes sur $\mathbb{R}[X]$ -2 (9'32'')

On continue avec un exercice qui relie certaines normes sur $\mathbb{R}[X]$ à des "compacts infinis" de $\mathbb{R}$. Notons que "compact infini" est une notion essentielle dans les problèmes de prolongements analytiques en analyse complexe.

● Exercices Normes sur $\mathbb{R}[X]$ -3 (12'14'')

On attaque un petit dernier sur les normes de $\mathbb{R}[X]$. On introduit une norme un peu farfelue sur $\mathbb{R}[X]$ et on montre que l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour cette norme. Au final, on voit que c'est peine perdue puisqu'un espace à base dénombrable sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être complet pour aucune norme.

● Normes vs CCS (Corps convexes symétriques)(21'42'')

On montre que la donnée d'une norme de $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la donnée de sa boule fermée $B(0,1)$. Mais que doit vérifier une partie de $\mathbb{R}^n$ pour être la boule d'une norme ? Tout est dans la notion de corps symétrique convexe qui va venir jouer le pendant géométrique de séparable-homogène-inégalité triangulaire de la norme !

● Comportement asymptotique des suites récurrentes (32'38'')

On cherche à comprendre les équivalents autour d'un point (y compris l'infini) à une suite récurrente de type $u_{n+1}=f(u_n)$. On présente ensuite un classique. La suite $u_{n+1}=\sin u_n$ avec u_0 assez proche de 0 tend vers 0. On voit, comme dans la vidéo précédente (dont celle-ci est une illustration, **Combinatoire et placements de table (12'55'')**), qu' u_n est équivalent à $\sqrt[3]{3/n}$ en l'infini. On cherche ensuite un second terme à son développement asymptotique.

● La suite $u_{n+1}=\sin u_n$ et son comportement asymptotique par Riri (16'04'')

Riri, qui a le sens de la fête, et celui des paillettes, s'est mis sur son 31 (!) pour nous présenter le comportement asymptotique de la suite récurrente associée à la fonction sinus. Un développement issu de **Carnet de Voyage en Analystan** (et non pas Algébrie...) A ce propos, comme le fait remarquer Alexis Roussel, attention à la fin où l'équivalent doit être remplacé par une écriture avec des o de Landau.

Plus précisément, on doit partir de $u_n^2 - u_0^2 - n/3 = \log(n)/5 + o(\log(n))$ Cette vidéo sera donc instructive à plus d'un titre sur les avantages et les dangers de l'utilisation des équivalents. Il faut savoir les utiliser à bon escient et savoir remplacer f équivalent a g par $f=g+o(g)$ quand cela est nécessaire.

● Exercice coup de cœur sur une suite récurrente linéaire (31'50'')

Une suite qui part de 2023 et qui peut nous occuper toute l'année ! si on en croit le résultat final. Un exercice coup de cœur très progressif proposé par Pascal Corm, qui utilise des techniques de collège, dans un premier temps, puis, de licence et, enfin, de master puisqu'il nous emmènera dans le monde merveilleux des corps finis où tout élément non nul est une racine de l'unité. Merci Lagrange !

● Vitesse de convergence d'une suite récurrente (et méthode d'Archimède) (22'17'')

On part d'une situation classique où une suite récurrente (u_n) donnée par une fonction converge vers un point fixe attractif r et on voudrait savoir si la suite $(r-u_n)$ est équivalente à une suite géométrique. Ceci nous amène à un exemple deux fois millénaire, avec la méthode d'Archimède pour approcher le nombre π ... et comme on n'est jamais à court d'histoires, on parlera du jeune Grothendieck.

● Erreurs dans les calculs d'intégrales-1 (16'19'')

Nous allons parler des différentes méthodes pour les calculs d'intégrales (rectangle, trapèze, méthode de Simpson). On commence par une approche algébrique des différentes méthodes connues.

● Erreurs dans les calculs d'intégrales-2 (16'02'')

Nous parlons ici de l'introduction à la méthode de quadrature de Gauss. Voici, cette fois-ci, le pendant analytique de la première vidéo. On calcule, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, un encadrement des erreurs que l'on fait en appliquant ces méthodes à une fonction "suffisamment dérivable" sur un intervalle $[a, b]$.

● Un exercice sur Taylor-Lagrange (13'25'')

Un petit exercice parfait pour une kholle en prépa :-) qui fournit un critère par la positivité pour que la série de Taylor d'une fonction converge en un point. On donnera deux preuves, une, avec la formule de Taylor-Lagrange, et l'autre en utilisant la version avec reste intégral.

● Utilisation des fractions rationnelles (dérivées de l'arc tangente) (15'26'')

Il faut souvent se gratter la tête pour trouver des exercices ou des exemples d'utilisation dans les énoncés d'oraux de l'agrégation interne. En particulier, pour l'utilisation de fractions rationnelles ! Voici un petit exemple d'application...

● Problème de la corde universelle (problème d'Olympiades) (18'39'')

Un petit problème de type "olympiades" que m'a indiqué Roger Mansuy, et qui demande juste **un peu de réflexion et de TVI (théorème des valeurs intermédiaires)**. La partie positive du problème aboutit aux théorèmes de la corde universelle et l'autre partie nous amènera à un contre-exemple, bougrement tordu, mais sacrément intelligent.

● Pourquoi une fonction injective continue sur un intervalle est-elle strictement monotone ? (12'24'')

On donne trois preuves pour cet énoncé. Une fausse (ou disons trop imprécise), une pour le niveau licence et, enfin, une, assez séduisante, demandant quelques bases de topologie de L3.

● Primitivable implique continue (ou bien) ? (18'32'')

On sait depuis longtemps qu'une fonction continue sur un intervalle possède une primitive. Mais est-ce bien nécessaire ? On va commencer par donner un contre-exemple (classique) d'une fonction primitivable non continue. Mais **si admettre une primitive n'implique pas forcément la continuité, le théorème des accroissements finis prouve qu'il s'agit d'une fonction vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'on appelle également fonction de Darboux. Encore une fois, la réciproque est fausse et on va montrer qu'une fonction de Darboux n'est pas nécessairement primitivable.**

● Normes, boules et stricte convexité 1 (19'34'')

On étudie le **problème de stricte convexité des normes sur un espace vectoriel**. On montre que l'axiome de stricte convexité correspond à un problème de stricte convexité des boules. On fournit ensuite un petit outillage pour **montrer qu'une norme est strictement convexe**.

● Normes, boules et stricte convexité 2 (13'43'')

Nous étudions la distance d'un point à un fermé F . On commence dans le cadre où F est un hyperplan affine, une sphère, un fermé quelconque puis un fermé convexe dans le cadre d'une norme strictement convexe.

● Normes, boules et stricte convexité 3 (10'05'')

On peut maintenant prouver un théorème de séparation qui dit que si F est un fermé convexe et M un point hors de F , on peut trouver un hyperplan H qui les sépare, c'est-à-dire, un hyperplan qui définit deux demi-espaces ouverts H^+ et H^- tels que x soit dans H^+ et F inclus dans H^- .

● Le cercle d'incertitude d'une série entière (18'59'')

On donne, à partir d'exemples et de conjectures, **de bonnes raisons d'appeler la frontière du disque de convergence d'une série entière, le "cercle d'incertitude"** (des poètes disparus).

● L'inégalité de Carlson et l'astuce diabolique de Hardy (21'51'')

Proposé par Patrice Lassère et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, l'article "l'inégalité de Fritz David Carlson" (ou "la lutte POUR les inégalités") présente une preuve de l'inégalité faisant intervenir une série (a_n) , la série (a_n^2) et la série $(n^2 a_n^2)$. Et, comme un miracle toujours renouvelé, l'inégalité voit débarquer le nombre π ! Mais, le plus époustouflant, c'est l'astuce de Godfrey Harold Hardy qui permet de trivialisier la preuve.

● Formule d'Euler-MacLaurin- comparaison série intégrale-une version formelle (20'38'')

On présente la formule d'Euler-MacLaurin dans sa version classique avec une idée de preuve : une récurrence et une intégration par partie. Mais, ici, l'idée est de montrer une version abstraite de cette formule qui utilise la définition des nombres de Bernoulli par la fameuse décomposition de Taylor de $x/(e^x-1)$. On discute, par la suite, d'une formule alternative d'Euler-MacLaurin, inspirée (mais différente) de celle proposée par Eric Tréfeu.

● Un contre-exemple pour la convergence dominée et lemme de Fatou (6'42'')

Il est utile d'avoir dans sa musette des contre-exemples pour les théories que l'on utilise régulièrement. En voici un sur le théorème de convergence dominée ! On termine sur de petites considérations sur le lemme de Fatou qui font suite à une conversation avec mon étudiant Loïc. Bonne chance à lui pour les épreuves de l'externe !

● Le théorème des valeurs intermédiaires sans la continuité? (13'01'')

On a tous en tête une fonction non continue en un point mais qui vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires. Et on a tous en tête que cette fonction s'agit en passant une infinité de fois autour de la valeur du point de non continuité. On montre dans cette vidéo que ce phénomène est complètement général.

● L'intégrale de Farey- une preuve astucieuse et instructive entre arithmétique et analyse! (18'49'')

Une superbe preuve due à Eric Trefeu qui mêle avec virtuosité fonctions arithmétique et fonctions spéciales. L'occasion de réviser ses classiques.

● Limite et série dans un (bel) exercice de Math Woods (11'22'')

Un petit exercice d'analyse sur cette chaîne (et oui, ça arrive!) proposé par Séquoia de Math Woods. Si x est un réel positif, on considère $S(x)$ la somme de la série (évidemment convergente) de terme général $(x/n)^n$. On veut calculer la limite de $S(x)^{1/x}$ quand x tend vers l'infini.

● Calcul de la série $k^{k-1}e^{-k}/k!$ et arbres généalogiques aléatoires (12'28'')

Un exercice proposé par Eric Tréfeu sur le site Math Woods! Montrer que la somme de cette série de terme général $k^{k-1}e^{-k}/k!$ vaut 1. On commence par en donner une première méthode à l'aide d'une série génératrice, puis, une autre en réalisant cette série sur un arbre généalogique aléatoire!

9 - Probabilité et combinatoire (14)

• Dés pipés et factorisation de polynômes (23'27'')

Deux dés sont numérotés de 1 à 6 et donc la somme des lancers des deux dés varie de 2 à 12. On veut savoir si l'on peut piper ces deux dés indépendamment de sorte que toutes les possibilités soient équiprobables. Bien sûr, le problème en cache un autre, plus général. Et on débouche sur un problème de factorisation de polynômes...

• Pavage de tuiles et formule combinatoire par Arthur (24'16'')

Rien de plus magique que ces formules obtenues en comptant de deux manières différentes le même objet. Arthur nous en fait une démonstration plus que convaincante!

• Dénombrement et polynômes (dés non pipés) (19'23'')

Voici une petite question, à la fois jolie et instructive, sur un lancer de dés non pipés ! Merci à Daniel Juteau pour le partage de son bel exercice. Et mention spéciale de l'humour mathématique à Riri qui dit n'avoir rien pipé ! 😊

• Borel-Cantelli et les amis de la poésie ! (14'00'')

On présente un exercice proposé par Guillaume Aubrun autour d'un poète prolifique qui veut relire toutes ses poésies. Cet exercice est une introduction au théorème de Borel-Cantelli.

• L'urne de Polya (tirage avec renforcement) (25'08'')

On effectue un tirage successif avec remise mais avec la particularité d'ajouter à l'urne un nombre fixé de boules de la dernière couleur tirée. On présente ici trois méthodes, sous les conseils avisés de Yan Doumerc (notre caution proba !), qui fournissent un joli florilège des outils à notre disposition en probas discrètes. Scoop ! Parmi ces outils figurent les actions de groupes ! Errata. Dans l'épilogue, je voulais dire que les X_i suivent une loi de Bernoulli mais leur somme S_n ne suit pas une loi binomiale.

• Tirage de nombres premiers entre eux (33'31'')

On tire indépendamment deux nombres de 1 à n et on veut connaître la probabilité de tirer des nombres premiers entre eux lorsque n est grand. Dans ce développement que l'on peut trouver dans *Carnet de Voyage en Analystan*, on verra comment la fonction ζ débarque dans la théorie des nombres.

• Tirage sans remise de n boules paires (9'53'')

Un petit exercice de probabilité qui permettra de tester nos formules sur la variance et la covariance ainsi que notre système D dans ce genre de situations. Attention, toutefois, car les probas ne font pas partie de mes domaines de compétence ! Yan Doumerc (que je remercie en passant) me fait remarquer à juste titre que la formulation "probabilité de X_i " n'est pas très heureuse, X_i étant une variable aléatoire et non un événement. La confusion entre les deux est fréquente chez les étudiants et parmi les candidats à l'agrégation, elle est très préjudiciable. Je voulais bien sûr dire probabilité que $X_i = 1$.

• Séries génératrices-mode d'emploi (21'24'')

Quelques petits exemples progressifs autour des séries génératrices dont le slogan pourrait être : "Si vous ne pouvez pas trouver un terme dans une suite, le mieux c'est de les compter tous !"

• Combinatoire sur le groupe des permutations (18'20'')

Deux petits exercices (en attendant d'en avoir deux plus gros) sur la moyenne du nombre d'inversions dans le groupe symétrique et la moyenne du nombre de cycles (dans la décomposition en cycles à supports disjoints). Référence H2G2- tome 2 (2015) Chapitre IV.

Algorithmes et probabilités: le "Randomized Quicksort" (19'01'')

Plutôt que de chercher des algorithmes déterministes assez coûteux, il est souvent plus rentable d'en choisir des probabilistes. Le cours de mon sympathique collègue Guillaume Aubrun à l'ENS Lyon décide justement d'illustrer cet adage par des exemples frappants. Cette vidéo détaille l'exemple de l'algorithme de tri aléatoire avec pivot. <http://math.univ-lyon1.fr/~aubrun/ens...>

• Invitation à la combinatoire quantique (37'49'')

Nous allons revenir sur les bases de la combinatoire classique (nombres binomiaux, formulaire de base) pour repartir d'un bon pied sur la combinatoire quantique et en observer les ressemblances et les différences.

• Pour une combinatoire équitable (31'40'')

Une petite vidéo pour un plaidoyer en faveur d'une combinatoire durable et équitable qui met en parallèle sous-structure et structure quotient (les deux piliers du temple de l'algèbre !), c'est-à-dire ici nombre de parties (coefficients binomiaux) et nombres de partitions, à k éléments. Le prétexte est alors de comprendre la variable qui, à une fonction de $[1, n]$ vers $[1, m]$, associe le cardinal de son image directe. Comme application, on traite deux problèmes : le problème des anniversaires et les problèmes des vignettes de footballeurs (ou de pokemon, selon les goûts).

• Le théorème de l'amitié (19'38')

Tout ce qu'on aime dans un problème d'algèbre : un bel habillage avec une histoire d'amitié, de la réduction, des matrices symétriques, de la combinatoire et un peu d'arithmétique ! Elle n'est pas belle, la vie ?

• Un exercice de dénombrement: la somme des cardinaux d'intersections de parties (14'05'')

Un exercice instructif (donné à un oral d'agrégation) qui demande de calculer la somme des cardinaux des intersections de deux parties (voire m parties) d'un ensemble fini E . Plusieurs techniques classiques s'entremêlent dans la solution que nous proposons : réarrangement de la somme en parties régulières, cardinal des parties régulières par bijection avec un ensemble connu, puis "série génératrice finie" où l'on reconnaît une dérivée.

10 – Les mathinales du mercredi (18)

• Les mathinales du mercredi - Une invitation au quotient (à l'agrégation) (35'31'')

Un petit cours informel où il est question d'invitation (voire de convocation) au quotient quand les structures s'y prêtent. On montre ici que la plupart des formules que l'on apprend dans un cours de licence en algèbre (arithmétique et algèbre linéaire) ont une interprétation en termes de morphismes et d'isomorphismes avec des structures quotient.

• Les mathinales du mercredi - Polynômes et évaluations à l'agrégation interne (1h23'02'')

On essaie de comprendre la notion d'évaluation d'un polynôme de $K[X]$ sur des exemples. On insistera particulièrement sur la notion de morphisme d'évaluation et d'idéal annulateur.

• Les mathinales du mercredi - Un "début d'introduction" aux corps finis (36'43'')

On essaie de motiver les troupes autour des corps finis, un sujet charnière entre arithmétique et théorie des corps. On se contentera de parler avec précision de F_4 , en laissant la suite à l'imagination de l'auditeur !

• Les mathinales du mercredi - Actions de groupes (on débrieфе sur des exemples) (38'10'')

Petite séance matinale informelle pour se familiariser avec les actions de groupes.

• Les mathinales du mercredi - Sous-groupes de $GL_n(K)$ (53'45'')

Une question à brûle-pourpoint en cette douce matinée automnale : "donnez-moi des exemples de sous-groupes de $GL_n(K)$ ". Un sujet qui, l'air de rien, brasse une bonne partie du programme !

• Les mathinales du mercredi - Petits exercices classiques de réduction (51'00'')

On fait le point sur des exercices de réduction qu'il est important de savoir faire pour les écrits.

• Les mathinales du mercredi - Images, noyaux et commutant.(54'45'')

I like the smell of math in the morning. Ce mercredi matin on étudie la condition pour que Im et Ker soient en somme directe pour un endomorphisme. On étudie ensuite le morphisme commutant sur les espaces de matrices.

• Les mathinales du mercredi - Méthode de Gauss-Projecteurs spectraux-Exponentielle (55'52'')

Heureusement, les maths sont là pour réchauffer nos petits matins d'hiver. Aujourd'hui, nous faisons le point sur la méthode de Gauss afin de répondre à une question de Christelle. Mais, la vraie question du jour consiste à écrire l'exponentielle d'une matrice A à l'aide de polynômes en A les plus simples possibles. On utilise pour cela les projecteurs spectraux. Un exercice instructif sur la réduction !

• Les mathinales du mercredi - Spectre et normes subordonnées (33'49'')

Ce matin, on fait le point sur le lien entre rayon spectral d'une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$ et norme subordonnée. La norme subordonnée à la norme 2 fait le lien entre la matrice A et le rayon spectral de A^*A . Mais si on veut le rayon spectral de A , on a en général que des inégalités. On présente alors toute une famille (infinie) de normes (infinies aussi) qui vont nous permettre de serrer les liens entre les normes subordonnées de A et rayon spectral !

• Les mathinales du mercredi - Groupes, arithmétique et réduction (1h04'00'')

Ce matin, quelques petits exercices divers et variés. Des classiques sur le groupe de permutation qui utilisent la formule de conjugaison et l'engendrement par les transpositions. Des situations dans l'arithmétique "en décimales" où on devrait avoir "envie de quotienter" par l'idéal (10^n) et enfin un calcul direct de polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs.

• Les mathinales du mercredi - Panorama sur les matrices (36'35'')

On a acquis des réflexes sur les matrices à force de les fréquenter. Mais, en mathématiques, il faut savoir se méfier des réflexes. Surtout que les matrices codent à la fois des applications linéaires, des endomorphismes, des formes quadratiques (et même des graphes !). On a passé cette partie de la mathinale pour s'aider à s'y retrouver.

• Les mathinales du mercredi - Exercices en algèbre linéaire (48'20'')

Quelques petites questions de cours et exercices en algèbre linéaire.

• Les mathinales du mercredi - Hyperplans en dimension infinie (54'57'')

On définit ce qu'est un hyperplan en dimension infinie dans le cadre d'un espace vectoriel normé puis on démontre l'alternative fermé/dense. On donne ensuite un exemple bien senti d'un même hyperplan qui peut devenir fermé ou dense selon la norme choisie. On fait ensuite le lien avec la continuité (ou pas) de "la" forme linéaire (définie à scalaire près) qui définit l'hyperplan. Tout (ou presque) se retrouve dans le chapitre VII de Carnet de Voyage en Analyste.

• Les mathinales du mercredi: Last minute exercises (44'06'')

Quelques petits exercices de dernière minute avant la plongée dans l'inconnu. On parle ici de normes strictement convexes, arithmétique des entiers de Gauss et de relation coefficients racines dans le cadre des racines n -ièmes de l'unité.

• Les mathinales du mercredi : déterminant, trace, et formes n -linéaires alternées (38'27'')

On retrouve les mathinales du mercredi (mathin!) Un exercice qui exploite à fond le théorème fondamental du déterminant qui affirme que deux formes linéaires n -alternées sur un espace de dimension n sont proportionnelles. Cela va nous permettre de définir le déterminant, la trace d'un endomorphisme,... et bien plus.

- **Les Mathinales du Mercredi- Introduction aux matrices de transvections (43'56'')**

On introduit les matrices de transactions et leurs applications. Entre autre, on donne une caractérisation du déterminant comme morphisme de $GL_n(K)$ dans K^* .

- **Mathinales du mercredi: le polynôme minimal, de la théorie à la pratique... (50'43'')**

On commence par un petit questionnaire sur le polynôme minimal. Disons quelques questions de cours (voire du cours avancé). On continue avec des petits exercices de calcul de polynôme minimal dans des situations concrètes, et qui nous amèneront inéluctablement vers des considérations arithmétiques.

- **Mathinales du mercredi: étude asymptotique de la suite itérée des sinus (48'39'')**

Une petite suite de bon mathin! On propose de trouver un développement asymptotique à deux termes de la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$

11 - Annales (69)

2026

- Oraux de l'agrégation interne '26 (le retour à chaud!) (32'30'')
- Agrégation interne 2026- les résultats sont tombés! (29'28'')
- Epreuve 1 PC Mines-Ponts 2026- Décomposition d'une matrice en somme de matrices de carré nul (29'13'')
- Epreuve 2 Mines-Ponts 2026 (31'51'')
- Épreuve 2 Mines-Ponts 2026 Parties III-IV (36'13'')
- Épreuve 2 Mines-Ponts 2026 Parties I-II (39'54'')
- Epreuve EP2-2026 de l'agrégation interne- Partie IV (20'03'')
- Epreuve EP2-2026 de l'agrégation interne- Parties II-III (23'42'')
- Epreuve EP2-2026 de l'agrégation interne- Préliminaires et Partie I (21'36'')
- Epreuve EP2-2026 de l'agrégation interne (un tour d'horizon) (26'31'')
- EP1-2026 Parties III-IV et VI (45'38'')
- EP1-2026 Vrai-Faux-Parties I et II (32'40'')
- EP1-2026 de l'agrégation interne (un tour d'horizon) (59'27'')

2025

- EP2-2025-TOUT sur l'ellipsoïde de John! (30'09'')
- EP2-2025 Agrégation interne-Présentation (18'43'')
- Epreuve 1 de l'agrégation interne 2025-2 (22'54'')
- Epreuve 1 de l'agrégation interne 2025 (34'40'')

- Agreg-Docteur-2025-Pb Algèbre Partie III-IV (33'40'')
- Agreg-Docteur-2025-Pb Algèbre Partie I-II (20'56'')
- Agreg Docteur 2025- Problème d'Algèbre (18'27'')

Correction X-ENS-MP 2025 Problème A-Partie-V-VI (40'47'')

Correction X-ENS-MP 2025 Problème A-Partie-I-IV (49'02'')

Epreuve X-ENS MP 2025 (Réaction à chaud) (53'35'')

- Endomorphismes qui stabilisent $\text{GL}_n(K)$ -MD-2025-Partie V (ou PSI 2023 ?) (21'54'')

Epreuve Math D X-ENS-ULM MP 2025 (No country for young (wo)men) (55'34'')

- Mines-Ponts-PC 1-2025 (en 18 mn chrono) (18'21'')

2024

- Trace et nilpotence - Agreg-Docteur-2024 (10'03'')
- "Introduction aux graphes aléatoires" par l'épreuve Mines-Pont 2024 (et le livre) (25'25'')
- Mines-Ponts-Maths 2-MP-2024 (44'15'')

X-ENS MP-2024-Correction Q1-15 (1h03'10'')

- Epreuve 1-Agrégation interne 2024 (25'35'')
- Epreuve 1-Agrégation interne 2024-Exercice 1 (le vrai-faux) (7'17'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Exercice 2 (17'13'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Exercice 3 (17'37'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Questions 10 et 11 (23'55'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Questions 12 à 16 (15'02'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Questions 17 à 21 (Partie IV) (12'57'')
- Epreuve 1-Agrégation interne-2024-Questions 22 à 25 (Partie V) (18'49'')
- Epreuve 1-Agrégation interne 2024 (Partie VI) (18'13'')
- La théorie des représentations post EP1-2024 (22'10'')

2023

- Epreuve 1-Le théorème de Skolem-Mahler (37'56'')
- Epreuve 1-Problème I-C (11'31'')
- Epreuve 1-Problème I-B (13'39'')
- Epreuve 1-Problème I-A (11'07'')

- Epreuve 1-Vrai-Faux et Exercices (36'02'')

2022

- EP1-2022- Le débrief du dernier samedi (1h44'09'')
- Epreuve 1-9 (Les réseaux à l'agreg !) (29'10'')
- Epreuve 1-8 (Survol des parties restantes) (42'58'')
- Epreuve 1-7 (la partie IV) (28'13'')
- Epreuve 1-6 (la partie III) (15'24'')
- Epreuve 1-5 (la partie II) (9'16'')
- Epreuve 1-4 (la partie I) (18'58'')
- Epreuve 1-3 (l'exercice préliminaire) (11'10'')
- Epreuve 1-2 (le vrai-faux) (7'46'')
- Epreuve 1-1 (14'02'')

2021

- Epreuve 1-6 : les corollaires du théorème de Burnside (22'43'')
- Epreuve 1-5 : Quelques exemples sur $\mathbb{Q}$ (16'15'')
- Epreuve 1-4 : Quelques exemples (13'26'')
- Epreuve 1-3 : théorème de densité de Jacobson (ou Burnside) (7'33'')
- Epreuve 1-2 : stabilité et semi-simplicité (18'32'')
- Epreuve 1-1 : Préliminaires et palabres (14'54'')

2020

- Epreuve EP1-2 (17'32'')
- Epreuve EP1-1 (11'22'')

2019

- Polynômes d'Hermite-EP2 (51'19'')

2018

- Agrégation interne Epreuve 1 2018 (1h01'07'')

2017

- Exercices sur les homographies-EP1 (16'44'')

2014

- EP1-parties-I-II (1h19'01'')

2008

- EP1-Partie II (30'53'')
- EP1-Partie I (37'27'')

12- Les oraux (144)

● Oraux de l'agrégation interne '24 (le retour à chaud !) (22'57")

En attendant les résultats, qui ne sauraient tarder, voici **quelques petits retours sur les oraux de l'agrégation de l'interne de maths** qui viennent de se dérouler au Lycée Pierre Gille de Gennes à Paris. **Quelques conseils, quelques critiques** mais, avant tout, bravo aux membres du jury et, en particulier, à son président Loïc Foissy, qui fait tout pour maintenir un vrai concours dans de bonnes conditions d'équité, malgré tous les déboires administratifs que l'on n'a pas de mal à imaginer...

● Groupes finis - un minimum vital de botanique pour les oraux (22'46")

On présente ici un **minimum vital d'exemples de base à bien connaître** dans le cadre d'un oral d'agrégation sur les groupes finis.

● Oraux X-ENS - Décomposition des matrices diagonalisables réelles (9'10")

On propose de montrer qu'une matrice réelle est diagonalisable si et seulement si elle se décompose en le produit d'une matrice symétrique définie positive par une matrice symétrique.

● Oraux X-ENS - Du théorème spectral au calcul différentiel: un tour du monde des maths! (26'53")

Un incroyable exercice qui utilise **topologie, réduction, forme trace, calcul différentiel, espaces euclidiens, théorème spectral**... On introduit une fonction sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives réelles et on en cherche le minimum. Info : il s'agit de l'exercice 2.6 du livre de 1998, "Optimisation et Analyse convexe" (PUF), de JBHU. Merci à lui de me l'avoir signalé. Errata : feldid34 me fait remarquer une erreur à la toute fin. $X_0 = R_{A-1}(R_A B R_A)^{1/2} R_{A-1}$ en fait il ne faut pas être tenté de faire rentrer R_{A-1} sous le radical.

● Oraux X-ENS et Agrégation - $\exp(AB)$ vs $\exp(BA)$ (9'50")

Un petit exercice de jury autour de l'exponentielle de matrices.

● Oral X-ENS - Trace et exponentielle- Inégalité de Golden (22'47")

Attention ! Exercice à manipuler avec précaution ! Il s'agit de montrer que **si A et B sont deux matrices symétriques réelles, alors la trace de $\exp(A+B)$ est plus petite que la trace de $\exp(A)\exp(B)$** . Je vous laisse deviner le cas d'égalité :-). Même si l'exercice, dans le cadre d'un oral semble impossible à résoudre sans l'avoir vu au préalable, **sa solution va nous permettre de faire le point sur des sujets transversaux (exponentielle, théorème spectral, Cauchy-Schwarz... et l'utilisation toujours aussi classe de la trace !)**

● Oral Centrale MP - Primalité des nombres de Mersenne (15'22")

Les nombres de Mersenne ont cela d'extraordinaire que l'on peut tester facilement s'ils sont premiers ou non via un **critère de divisibilité**. On montre ici, dans le cadre d'un oral de Centrale MP, comment la question a été posée et avec quelles indications. Attention, ici nous ne prouvons que la partie "implique premier" du critère, c'est-à-dire ce que l'on peut appeler "l'implication facile". On donnera bientôt "l'implication moins facile" dans une prochaine vidéo mais celle-ci demande des mathématiques de Master...

● Oral Centrale MP - Produit de somme de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (13'29")

Voici un petit exercice d'oral de Centrale qui permet de **bien faire le point sur les calculs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et ses carrés**. Précision, x est dans l'ensemble C des carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pas dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tout entier

● Oral Centrale MP: Rayon spectral et suite de traces par Nina (22'15")

Nina nous propose un exercice d'oral de Centrale MP. On doit montrer que **pour toute matrice carrée complexe A, la suite des racines n-èmes du module de $\text{tr}(A^n)$ a pour valeur d'adhérence le rayon spectral de A**. Cela pourrait sembler intuitif, voire évident mais, à y regarder de plus près, ça ne l'est pas du tout ! On tombe sur le problème des sous-groupes denses de $\mathbb{R}$...

● Oral MP - Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (30'27")

Voici une question d'oral niveau (théorique L2) : on sait que les fonctions sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont toutes polynomiales (par le théorème d'interpolation de Lagrange). Mais ce n'est pas le cas de fonctions sur un anneau en général. D'où la question : **quelles sont les fonctions polynomiales sur l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Combien y en a-t-il et comment les caractériser ?**

● Oral des Mines - Une équation diophantienne (5'19")

On démine une petite équation diophantienne (et ce sera vite réglé !)

● Oral des Mines : traces et matrices de rang 1 (9'10")

Même sur un petit exercice, on peut apprendre un tas de techniques. Ici, on va devoir bien manipuler la trace, la multiplication matricielle... et les matrices de rang 1.

● Oral des Mines: l'équation matricielle $AM=MB$ (9'59")

Il s'agit d'un exercice tout à fait charmant que l'on peut retrouver avec bonheur dans le non moins charmant livre de Roger Mansuy et Rached Mneimné "Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes". **Que peut-on dire du spectre des matrices A et B si l'on sait qu'il existe une matrice M telle que $AM=MB$?**

● Petit exercice d'oral autour de Vandermonde (5'28")

On présente un petit exercice inspiré d'un commentaire de Toto sur cette chaîne. L'exercice dont **la solution est étonnamment simple pour un énoncé plutôt anxiogène**, montrera aux plus instruits (ceux qui lisent Carnet de Voyage :-)) que **derrière la matrice de Hankel se cache la matrice de Vandermonde**.

- **Oral Centrale MP: déterminant d'un endomorphisme de multiplication matricielle (15'29'')**

On propose un exercice de "calcul sans les mains" d'un déterminant. On le résout par trois méthodes: une niveau Bac+2, puis niveau BAC+3 et enfin BAC+4 (la méthode de Maître Chifu)!

- **Oral Centrale MP: traces et séries entières (4'12'')**

A la suite d'une remarque de l'ami Toto sur une vidéo récente de Nina, nous proposons une preuve alternative du résultat qui dit que la limite sup du module de $\text{tr}(A^k)$ puissance $1/k$ est égal au rayon spectral de la matrice.

- **Oral des Mines: Vecteurs propres de la transposée de la comatrice (10'36'')**

Un petit exercice sympathique et instructif proposé à l'oral des Mines. Le but est de montrer que si X est vecteur propre de A , alors il est vecteur propre de la transposée de sa comatrice. On ajoutera un petit bonus à la fin, juste pour le plaisir.

- **Oral des Mines: Sur les matrices de rang 1 et l'inversibilité (15'41'')**

Un petit exercice sur les matrices de rang un qui permettra de vérifier notre artillerie sur la réduction

- **Oral Centrale: Etude du commutant d'un endomorphisme nilpotent (14'53'')**

Il y a deux situations classiques où l'on sait déterminer la dimension du commutant d'un endomorphisme nilpotent u de $\text{End}(\mathbb{R}^n)$. Il s'agit du cas où u est nul (dimension n^2) et le cas où u est cyclique (dimension n). En général, la chose n'est pas facile (voir Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométrie, tome 2, Chap II). Cet exercice de centrale propose un cas intermédiaire raisonnable. Après la résolution de l'exercice, on propose un résultat général sans démonstration.

- **Oral Centrale: Hyperplan stable et Spectre (14'37'')**

Un énoncé contre-intuitif... mais au bout du compte, on finit par lui donner raison. Un endomorphisme qui stabilise un hyperplan affine ne contenant pas 0 possède forcément 1 dans son spectre! On donne deux méthodes, une plutôt "concrète" avec force base, matrice, polynôme caractéristique, et une autre plus abstraite. Faites votre choix!

- **Oral des Mines: l'équation $AB-BA=B$ (et au-delà!) (22'33'')**

Un exercice assez classique consiste à montrer que si deux matrices carrées sur le corps des complexes vérifient l'équation $AB-BA=B$, alors B est nilpotente. On en donne trois preuves express. On continue avec un contre-exemple en caractéristique p , une solution possible en caractéristique quelconque quand B est nilpotente. En épilogue, pour qui aime à prendre de la distance, on parlera du théorème de Lie pour les représentations d'algèbres de Lie résolubles.

- **Oraux-X-ENS: Caractérisation des matrices normales (14'03'')**

Un exercice d'oraux-X ENS que l'on peut trouver dans Algèbre 2 de Patrice Tauvel. La condition porte sur la trace (mais que peut-on faire sans elle?) et on montre par la suite que si A , B , AB sont normales, alors BA l'est également.

- **Oral Centrale: Polynômes Stables- le cas de la dimension 3... et au-delà (18'53'')**

Un polynôme réel est dit stable si toutes ses racines sont de partie réelle strictement négative. Le but de l'exercice est de trouver une caractérisation de stabilité par les coefficients du polynôme!

- **Oral de Centrale: d'un exercice de kholle vers un théorème de Loewner sur les opérateurs monotones (29'22'')**

Les exercices de kholles sont parfois fascinants. Mais quand certains s'avèrent n'être que des "taupinades" d'autres se révèlent être de magnifiques portes d'entrée vers des mathématiques avancées. Ici, on définit un ordre naturel sur l'espace des matrices réelles, et on va chercher les opérateurs qui respectent cet ordre. Mots-clé: théorème de Loewner, opérateur-monotone, théorie de Nevanlinna...

- **Oral Mines: Matrices circulantes, rotations de l'espace et relations coefficients-racines. (23'38'')**

Et oui, on peut mélanger dans un même exercice rotations de l'espace, relations coefficients racines, et étude de fonctions. Et même en allant un peu plus loin, lemme chinois et transformée discrète. C'est ce que nous allons voir dans cet exercice donné lors d'un oral des Mines.

- **(Oral Mines-Ponts) Un sous-espace de fonctions continues sur lequel N_4 et N_2 sont équivalentes? (14'53'')**

Les normes N_2 et N_4 ne sont certainement pas équivalentes sur l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ (d'ailleurs, avez-vous un contre-exemple pour le montrer?) En revanche, on peut trouver un sous-espace de dimension infinie (s'il vous plaît!) sur lequel elles sont bien équivalentes. Saurez-vous le trouver?

Leçons (20)

- **Leçon 133 - Groupe opérant sur un ensemble- Applications (55'03'')**

Une leçon aussi riche que passionnante à laquelle on va se confronter au mépris du danger ! Et le danger ici, c'est qu'il y a tellement de belles choses à raconter qu'on pourrait s'y perdre. On commence ici avec un 6 minutes sur la leçon. Allez, 9 minutes... Quelques questions de jury qui tournent autour de l'utilisation de la définition des actions de groupes, via les morphismes de groupes, la formule des classes, le principe de conjugaison-translation, la possibilité de ramener un problème à sa forme normale, l'utilisation de l'isomorphisme canonique associé au morphisme d'action, le dénombrement d'une orbite par le calcul de l'ordre du stabilisateur... Quelques développements que l'on pourra trouver dans Carnet de Voyage en Algèbre et NH2G2.

- **Leçon 133 - Groupe opérant sur un ensemble (15'29'')**

- **Leçon-133 - Groupe opérant sur un ensemble-Développement-Coloriage du tétraèdre (14'35'')**

- **Leçon : Groupe de permutations d'un ensemble fini- Applicatins (1h20'04'')**

- **Leçon 106 - Idéaux d'un anneau commutatif (42'57'')**

Une nouvelle leçon est apparue à l'agrégation interne, il s'agit de la **leçon sur les idéaux**. Cela demande un bagage important que la plupart des candidats ne possède pas et, pour commencer, la notion même de structure quotient doit être bien comprise. On va voir, tour à tour, les idéaux, les générateurs d'idéaux, les opérations sur les idéaux, le passage au quotient et tout ce que cela implique. Dans un second chapitre, on voit comment les idéaux principaux permettent de définir le PGCD, PPCM et une relation de Bézout. Ensuite, on déroule, le rideau euclidien-principal-factoriel. Enfin, le chapitre III est consacré aux applications des idéaux à l'étude des nombres premiers, en réduction, dans le système de congruence, et même aux intersections de courbes planes.

- **Racines d'un polynôme fonctions symétriques élémentaires-Leçon 144 (14'07'')**

Voici une petite présentation des éléments à mettre (selon affinités) dans une leçon sur les racines d'un polynôme.

- **Leçon 152 - Déterminant et applications (47'25'')**

Le déterminant est l'outil central de l'algèbre linéaire. On propose ici un 6 minutes (en fait, 6'40'') dans le cadre d'une leçon à l'agrégation externe (ou interne). Tout doit reposer sur le caractère **n-linéaire alterné du déterminant qui lui permet de détecter les relations linéaires**. On passe, ensuite, à des petites questions de savoir-faire sur le déterminant dans le cadre de questions à un oral d'agrégation puis à quelques suggestions de développements que l'on peut trouver avec bonheur dans NH2G2 et dans Carnet de Voyage en Algérie.

- **Leçon 106/123-externe/interne: Groupe linéaire, sous-groupes et applications (28'38'')**

Voici une vidéo qui présente (de façon relativement exhaustive, quoique) de quoi remplir cette leçon sur le groupe linéaire. Cela pourra fournir des idées à certains et, pour d'autres, les aider à s'organiser sur un thème aussi riche !

- **Leçon 107 - PGCD et PPCM. Algorithmes et Applications 1 (21'26'')**

- **Leçon 107 - PGCD et PPCM. Algorithmes et Applications 2 (11'40'')**

- **Leçon 107 - PGCD et PPCM. Algorithmes et Applications 3 (18'14'')**

- **Leçon 107 - Le contenu de Gauss 4 (11'08'')**

- **Leçon 107 - La formule pgcd (a, b).ppcm (a, b) = ab dans tous ses états 5 (18'29'')**

- **Leçon 107 - Tout sur l'algorithme d'Euclide 6 (18'09'')**

- **Leçon 107 - Invariants du groupe symétrique-PGCD 7 (27'17'')**

- **Leçon 110 - La dimension et le rang (58'45'')**

- **Leçon(s) formes linéaires et dualité. (37'49'')**

- **Leçon 351 AI - Exercices avec utilisation de polynômes irréductibles (31'21'')**

- **Leçon 327 AI - Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux 1 (26'02'')**

- **Leçon 327 AI - Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux 2 (17'58'')**

Développements (86)

- **Le théorème de Kronecker (18'19'')**

Voici un développement assez classique : la preuve d'un théorème de Kronecker qui décrit les polynômes unitaires à coefficients entiers et dont les racines sont de module inférieur ou égal à 1. Ici, la preuve est axée sur la matrice compagnon.

- **Kronecker: la méthode à Toto! (15'07'')**

Toto, qui intervient de façon pertinente sur cette chaîne propose une variante pour le développement du théorème de Kronecker. Ici, il n'est plus question de relations coefficients/racines mais de l'utilisation du contenu de Gauss dans un lemme classique (toutefois instructif).

- **Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ par Nina (23'51'')**

On se promène de façon aléatoire (avec des pas de 1 ou -1 avec équiprobabilité) sur $\mathbb{Z}$. Nina propose de calculer un équivalent de l'espérance du nombre de fois que l'on sera revenu à la position initiale au bout de n pas.

- **Théorème de Weierstrass version probabiliste par Nina (30'21'')**

Nina nous propose la preuve probabiliste (due à Bernstein) du théorème de Weierstrass et que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Analyste. La présentation se fait en mode développement de 15 minutes avec les questions de jury qui ne manquent pas de suivre !

- **Inégalité de Wirtinger/Inégalité isopérimétrique par Nina (27'44'')**

Nina nous propose l'inégalité de Wirtinger et son application au problème d'optimisation de l'aire avec une longueur donnée ! La présentation se fait en mode développement de 15 minutes suivi d'une séance de questions. Référence : Carnet de Voyage en Analyste (Chez Calvage & Mounet), Exercice 46.

● Zêta... par Nina! (22'17")

Non, ce n'est pas le nouveau parfum de Nina Ricci ! En mode développement 15 minutes pour l'agrégation, Nina nous présente les propriétés classiques de la fonction zêta. Caroline (que l'on a eu le bonheur de voir sur la chaîne), et Julien se sont constitués en jury "d'anciens de la prépa" pour lui poser quelque question. Ambiance assurée !

● Une preuve de Don Zagier du théorème des deux carrés par Nina (21'19")

Nina nous a dégotté une preuve élémentaire du théorème des deux carrés qui peut se faire avec des élèves en terminale maths expertes. Elle est au prolix Don Zagier (entre autres le directeur de thèse du médailleux Field Maxime Kontsevich) ! On peut trouver cette preuve dans Oaux-X ENS.

● La formule d'Euler-Maclaurin par Nina (32'32")

Nina nous présente la formule d'Euler-Maclaurin qui fait le lien entre l'intégrale de f et la série $f(n)$. On discutera ensuite de l'application de cette formule à la série harmonique. Référence : Carnet de Voyage en Analystan.

● Les nombres d'Euler par Nina (22'55")

Pour celles et ceux qui ont aimé le développement sur les nombres de Bell, voir  ● Les nombres de Bell par Radia voici une variante avec les nombres d'Euler appelés aussi nombres zigzag. Nina introduit la notion de permutation alternées de n éléments et propose de les compter. Leur cardinal E_n est donné par une formule de récurrence et la série génératrice des E_n vérifie une équation différentielle facile à résoudre. Ceci permet de voir que les E_n pour n impair participent à la décomposition de Taylor de la tangente en 0 et que les E_n pour n pair, à celle de $1/\cos(x)$. Ceci est extrait du très bel article de R.P. Stanley que vous pouvez trouver sur <https://arxiv.org/abs/0912.4240>

● Propriété de rang 2 à l'agrégation par Nina (topologie du rang!) (44'56")

Nina nous propose, en mode développement, le résultat sur l'adhérence des matrices de rang r sur $M_n(\mathbb{C})$. Nous en profitons par suite pour discuter de son année de préparation (et plus!) qui s'est achevée sur un joli rang (2).

● Le lemme de Zolotarev par Agnès (comment j'ai chassé mes démons avec l'EMDR) (33'08")

Agnès vient nous faire un tour d'honneur après avoir obtenu l'agrégation interne en présentant un dernier développement. Rien de tel pour se remettre d'une année de préparation. On en profite pour discuter, par la suite, de la préparation psychologique au concours. Et oui, les démons du concours ne sont pas toujours de nature mathématique, et ils savent surgir au moment de ce que l'on appelle très justement les "épreuves" orales !

● Nicolas - Fonction de Zeta-fonction Gamma (44'53")

Nicolas nous présente en mode développement les liens entre fonction zêta et fonction gamma !

● L'intégrale de Gauss par Michael (40'10")

Michael nous présente avec clarté et sous forme de développement l'intégrale de Gauss. Au programme, intégrale à paramètres, échange de passages à la limite et équations différentielles. Il s'en suit une discussion sur son parcours, dans un face à face, façon Elise Lucet !

● Décomposition LU et Applications par Mathis (41'28")

En mode Développement-Question de jury, Mathis dont le nombre de cafés avalés quotidiennement n'égale que le nombre de théorèmes ingurgités, nous parle de la décomposition LU, avec force applications (Critère de Sylvester, Cholesky). Il arrive en même temps à nous convaincre à quel point ce développement est recevable dans pas mal de leçons !

● La méthode de Newton par Caroline (27'34")

Les oraux blancs de la prépa Lyon sont souvent encadrés par les agrégatifs des années précédentes. On a ici une jolie séance d'interrogation, toute en complicité, sur le thème de la méthode de Newton. Toto me fait remarquer que quand on parle de voisinage, de la limite afin de faire converger la suite, il faut parler d'intervalles !

● Le critère de Sylvester par Geneviève (30'53")

Geneviève nous propose un joli développement sur le critère de Sylvester, exécuté en temps réel (Si-si !). Il s'en suit une séance de questions autour des formes quadratiques réelles. Sources : Carnet de Voyage en Algèbre, p. 115

● Entrelacement des solutions d'équations différentielles par Caroline (18'43")

Et oui, les mathématiques peuvent aussi exprimer de la tendresse avec l'entrelacement de solutions d'équations différentielles. C'est Caroline, fraîchement agrégée, qui va nous le montrer au cours d'un développement que l'on peut trouver dans "Carnet de Voyage en Analystan" exercice 69 (version Calvage et Mounet).

● L'ellipsoïde de John Loewner par Radia (25'58")

Radia nous présente ici l'ellipsoïde de John Loewner. Un développement riche dans la diversité de ses thèmes abordés (formes quadratiques, inégalité de Minkowski, volumes, théorème spectral, convexité...) et en corollaires (en particulier, la caractérisation des sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$). On finit sur une conversation où Radia nous parle de sa passion des mathématiques. Petit errata. Radia parle de forme quadratique en écrivant une norme à 5'50 et 11'46. Il faudrait élever au carré pour que ce soit vraiment une forme quadratique

● Trace et Dualité par Laetitia (25'52")

Laetitia nous présente le développement de Carnet de Voyage en Algèbre sur le thème trace et dualité. Chaud les questions ! Bravo à elle pour sa super note à l'oral !

● Les nombres de Bell par Radia (26'09")

Radia présente les nombres de Bell selon Carnet de Voyage en Analystan Exercice 37. NE changez rien aux réglages, on est bien en vitesse réelle !

● Le problème des chars d'assaut allemands (26'54")

Un problème très jouable en développement qui couvre bien le programme de probabilités (Formules combinatoires, loi uniforme, inégalité de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Théorème central limite) autour de la recherche (historique !) du nombre de chars que possédait l'Allemagne en 1942.

● L'intégrale de Dirichlet par Riri (28'06")

Haut les cœurs ! Riri l'intrépide nous présente un développement sur l'intégrale de Dirichlet avec une méthode simple et élégante. Attention, petite coquille à la fin repérée par @Totototo8119. Il faut lire intégrale de 0 à l'infini au lieu de l'intégrale de 0 à $\pi/2$. Toujours dans les remarques de @Totototo8119, l'intégrale J_n peut être vue comme le noyau de Dirichlet. On peut donc imaginer que l'intégrale de Dirichlet est plutôt une conséquence directe, attribuée à Dirichlet, de son noyau ! C'est-à-dire que dans l'histoire telle qu'elle s'est déroulée va dans le sens inverse du développement :-)

● La méthode d'Archimède par Caroline (34'21")

Caroline, que l'on félicite pour son super classement à l'interne, cette année, propose la méthode d'Archimède face à un jury qui ne manque pas de questions. Pour ceux et celle qui veulent avoir un avant-goût de ce que certains agrégatifs appellent l'enfer lyonnais 😊

● Cayley-Hamilton topologique par Raphaël (24'39")

Bravo à Raphaël qui vient de décrocher le concours ! Le voici au cœur de sa préparation en train de présenter le théorème de Cayley-Hamilton dans sa version topologique de Carnet de Voyage en Algèbre Exercice 3.42.

● Critère d'Eisenstein par Laetitia (38'26")

Laetitia nous présente le critère d'Eisenstein. Maintenant qu'elle vient d'obtenir l'agrégation avec une belle prestation à l'oral, on peut dévoiler les coulisses de la préparation.

● Adhérence des matrices diagonalisables réelles (17'41")

Voici un développement assez agréable tiré de Carnet de Voyage en Algèbre, où l'on prouve que l'adhérence des matrices diagonalisables réelles est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables réelles. Dans la foulée, on montre que, sur $\mathbb{C}$, l'adhérence des matrices diagonalisables est l'espace des matrices tout entier.

● Coprimalité, Moebius et Zeta par Arthur (24'58")

Arthur et sa craie Excalibur viennent nous présenter un développement transversal sur les thèmes du dénombrement, de l'arithmétique et des probabilités. On montre que si l'on choisit au hasard deux nombres de 1 à n , la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux tend vers $6/\pi^2$. Source : carnet de voyage en Analystan.

Errata : à " , dans la preuve du point 2, il faudrait remplacer la somme de d allant de 2 à n en une somme où l'ensemble des diviseurs de d est dans $P_{13'02_n}$, avec d différent de 1.

● ENS '86 Matrices de Moore (feat. Théorème spectral... et la trace) (29'59")

Voici un développement que l'on peut trouver dans "30 développements pour l'agrégation de mathématiques" de Bastien Lartigue. On y trouve de la réduction, du théorème spectral et de l'arithmétique. Mieux, il possède une très belle interprétation en termes de théorie des graphes que l'on évoquera en épilogue.

● Le critère d'Eisenstein (et applications) par Marie (26'35")

Marie nous présente ici le critère d'Eisenstein, en insistant sur le contenu de Gauss. Elle termine sur une application que l'on peut trouver avec bonheur dans Carnet de voyage en Algèbre 😊

● Théorème de progression arithmétique de Dirichlet (version faible) (18'29")

Pour tout entier n strictement positif, on montre qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à 1 modulo n . On suit une preuve que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Algèbre.

● Théorème de Dirichlet faible par Luca-Développement-Questions de jury (23'25")

Luca propose le développement du théorème de Dirichlet faible. Il s'en suit une séance de questions.

- **Les nombres de Bell par Séverine (22'30'')**

Séverine nous présente **une formule donnant le nième nombre de Bell**, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n , dans sa version analytique. Le format est celui d'un développement et il s'en suit une petite séance de questions.

- **Fonction ζ sur les entiers naturels pairs par Caroline (15'15'')**

La fonction ζ associe à $s > 1$ la somme des $1/n^s$. On sait souvent montrer en licence que l'image de 2 est le fameux $\pi^2/6$. La généralisation de cette formule aux entiers pairs demande les nombres de Bernoulli et, plus généralement, un mélange d'intégration de polynômes de Bernoulli et de décomposition en séries de Fourier.

- **Méthode de quadrature de Gauss par Caroline (22'25'')**

Voir Carnet de Voyage en Analystan (particulièrement dans la nouvelle édition qui vient de sortir). La méthode de quadrature de Gauss donne des nombres réels permettant d'intégrer un polynôme sur un intervalle à partir d'une combinaison linéaire de ce polynôme en ces réels. Le plus étonnant dans cette histoire est que l'on n'a besoin que de n réels pour un polynôme de degré $2n-1$. C'est ce que va nous raconter Caroline. Il s'en suivra l'inévitable série de questions de jury !

- **SO (3) est simple par Benjamin (32'19'')**

Voici une méthode topologique (Carnet de Voyage en Algèbre 3.5.6) pour montrer que le groupe spécial orthogonal SO (3) est un groupe simple. L'exposé est donné par Benjamin en format "développement à l'agreg" (15 minutes ou peu s'en faut) Questions de jury, à bruler pourpoint.

- **Le groupe $SO_2(F_p)$ par Clément (20'24'')**

Clément nous présente un groupe orthogonal fini : le groupe des matrices orthogonales sur le corps fini F_p tel qu'on peut le retrouver dans Carnet de Voyage en Algèbre. On montre que ce groupe est cyclique, ce qui n'est finalement pas si étonnant pour un cercle, même sur un corps fini !

- **Sous-groupes de $\mathbb{R}$. L'alternative dense/monogène par Caroline (33'19'')**

Un théorème essentiel pour l'approximation des nombres réels que nous présente Caroline, sous forme de développement à l'agrégation. Il est tiré de Carnet de Voyage en Algèbre. S'en suivent la série de question de jury...

- **Résoudre un système de congruence par Caroline (16'14'')**

Système de congruences tel qu'il est fait dans Carnet de Voyage en Algèbre, Exercice 4.2.8. Attention, on n'est pas dans la situation "premiers entre eux".

- **Homéomorphisme de décomposition polaire (11'38'')**

Tiphaine nous propose une preuve (issue, par exemple, :-)) de Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, chap. VI) de l'homéomorphisme de décomposition polaire.

- **L'homéomorphisme de décomposition polaire par Riri (15'32'')**

Une présentation soignée de l'homéomorphisme de décomposition polaire face à un jury à l'affut ! Au passage, on pourra trouver une pléthore d'applications de cette décomposition sur .Décomposition polaire- Applications-3

- **$GL_n(\mathbb{C})$ est DOC! (Dense, ouvert connexe) par Riri (30'59'')**

Quoi de neuf, Doc ? L'énoncé, $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert puis dense dans $M_n(\mathbb{K})$, la connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$, et la séance de questions.

- **La décomposition polaire (par Dom) (25'18'')**

Dom nous propose le développement classique sur la décomposition polaire. Il s'en suit une série de questions impitoyables du jury.

- **Volumes et décomposition polaire (24'20'')**

Un petit développement pour l'utilisation de la décomposition polaire, cette fois-ci, appliquée à la préservation des volumes. On refait ici la preuve de l'existence de la décomposition polaire pour une matrice (invertible ou pas).

- **Une preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton (18'19'')**

Voici une preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton sur le corps des complexes. Elle est toutefois montrée de manière élémentaire pour pouvoir en faire profiter à la fois à ceux qui ne connaissent pas la théorie de fonction holomorphes, et à ceux qui la connaissent et qui sauront en trouver des raccourcis. On passe par une jolie formule de résidus matriciels qui permet de définir, en général, l'analogue matriciel d'une fonction (analytique) complexe.

- **Preuve analytique de Cayley-Hamilton par Patrick Sam Al Habobi (26'04'')**

Patrick Sam revient sur la chaîne pour une preuve de Cayley Hamilton par le calcul d'intégrales !

- **Critère de diagonalisabilité de Klarès par Florence (31'52'')**

Un joli critère dans un format de développement pour montrer qu'une matrice sur $\mathbb{C}$ est diagonalisable sur une condition qui porte sur son commutant. Et bien sûr, à la suite, la séance de questions de jury.

- **Diagonalisabilité : le critère de Klarès (17'55'')**

Une preuve ravissante qui peut fournir un développement agréable dans le cadre d'une leçon sur la réduction ou sur les formes quadratiques. On peut le trouver dans le chapitre II de Carnet de Voyage en Algèbre.

● Le critère de Klarès- un high five avec Axel (56'34'')

Axel nous propose un des développements phares qu'il avait préparé pour ses oraux d'agrégation interne: le critère de Klarès, avec une jolie preuve (un peu remaniée) de *Carnet de Voyage en Algèbre*, qui couvre pratiquement tout le programme d'algèbre linéaire du concours (rang, noyaux, réduction, diagonalisabilité, nilpotence, formes quadratiques, orthogonalité... La suite de la vidéo est consacrée à une présentation d'Axel, qui est parti, comme il le dit, d'un niveau de troisième au rang de 5ème à l'agrégation. On parlera de cette année passée à progresser, entre inquiétudes et bonheur, et entre famille et intelligence artificielle..

● La suite de polygones par Caroline (14'08'')

Caroline nous présente le développement sur la suite de polygones du plan complexe (*Carnet de Voyage en Algèbre*, 1.3.28). Au programme : réduction, convexité, barycentres, et limites de suites de matrices. Qui dit mieux ?

● Condition de cocyclicité de quatre points par Caroline (13'29'')

Voici un critère de cocyclicité de quatre points A, B, C et D : l'existence d'un quadruplet de réels non tous nuls a, b, c et d tels que pour tout point M, $aAM^2 + bBM^2 + cCM^2 + dDM^2 = 0$.

● Ellipsoïde de John-Loewner (20'05'')

Myriam nous présente l'ellipsoïde de John-Loewner. Un développement des plus transversaux mais attention aux épines !

● Une méthode express (et expresse) pour les isométries du cube (18'57'')

Une méthode classique pour comprendre le groupe des isométries du cube passe par son action sur ses quatre grandes diagonales. Ici, nous proposons une méthode qui consiste à passer par son action sur ses trois axes de symétrie. Cela a l'avantage d'obtenir de jolies matrices orthogonales. On donne la preuve, dans un premier temps, puis, dans un épilogue, on voit comment récupérer des matrices pour l'hypercube et pour le tétraèdre.

● Ellipse de Steiner par Caroline (24'40'')

Caroline revient nous présenter l'existence et l'unicité de l'ellipse de Steiner d'un triangle. S'en suit une petite séance de questions.

● Fonction Gamma, premières propriétés par Caroline (14'38'')

Caroline présente ici les propriétés de base de la fonction Gamma sous un format de développement. On peut trouver la source dans *Carnet de Voyage en Analystan*.

● Noyau de Fejér par Florence (22'40'')

Florence propose de nous parler du noyau de Fejér dans le cadre de la convergence des séries de Fourier. Il suivra de ce développement une petite séance de questions.

● Forme trace et dualité (10'55'')

On fait le point sur la forme trace, vue comme une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des matrices carrées. On explique, ici, pourquoi elle est non dégénérée et pourquoi cette propriété est essentielle pour comprendre plus finement l'algèbre de matrices $M_n(K)$.

● Théorème de Sophie Germain par Julien (20'34'')

Julien le sérénissime nous présente ici le théorème de Sophie Germain sur l'équation de Fermat. J'ai tout essayé pour le démontrer au moment de la séance de questions... rien n'y a fait !

● Le théorème de Gauss-Lucas par Agnès (28'31'')

Agnès nous propose le théorème de Gauss-Lucas.

● Théorème de Gauss-Lucas et application par Séverine (15'57'')

Un développement tiré de *Carnet de Voyage en Algèbre* (deuxième édition). Le théorème de Gauss-Lucas affirme que si P est un polynôme complexe de degré supérieur à 2 alors les affixes des racines du polynôme dérivé P' sont dans l'enveloppe convexe des affixes des racines de P. Comme application, elle montre que si P'' divise P alors les racines de P sont toutes alignées.

● Théorème de Gauss-Lucas et application- par Patrick Sam Al Habobi (16'59'')

Le théorème de Gauss-Lucas stipule que les affixes des racines de la dérivée d'un polynôme complexe (non constant) se situent dans l'enveloppe convexe des affixes des racines du polynôme. On va en déduire que si la dérivée seconde de P divise P alors toutes les racines de P sont alignées.

● Théorème de Gauss-Lucas et application- Questions du Jury (15'59'')

La séance de questions de jury ! Séance qui pourra en éclaircir quelques-uns sur la convexité.

● Méthode des puissances par Patrick Sam Al Habobi (35'37'')

Patrick Sam Al Habobi nous présente, sous le format de développement à l'agrégation (interne ou externe), la méthode des puissances pour l'approximation de valeurs propres d'une matrice symétrique réelle. On peut trouver ce développement dans une version récente de *Carnet de Voyage en Analystan* (publié chez l'IREM Lyon). On continue avec une série de questions de jury. Une typo, toutefois, dans la récurrence, il faut lire $x_{n+1} = Sy_n$ au lieu de $x_n = Sy_n$.

● Le collier de perle (version Kétrane) (38'37'')

Sam Patrick Al Habobi nous présente la version du collier de perles du Kétrane. On compte un nombre de colliers de perles modulo l'action du groupe diédral, avec un nombre fixé de perles de couleurs données. S'en suivent les questions de jury.

- **La série harmonique (32'15'')**

Le développement de la série harmonique est un bel exercice d'analyse qui peut se faire par étapes successives. Dans un premier temps, il y a l'apparition de la constante d'Euler, suivie, dans un deuxième temps, du calcul des premiers termes en $1/n$ et $1/n^2$. Mais pour obtenir un développement "illimité", il faut passer par les nombres de Bernoulli sur lesquels nous ne tarirons pas d'éloges.

- **Le théorème de Korovkin par Patrick Sam Al Habobi (28'23'')**

Le théorème de Korovkin est un théorème d'approximation de fonctions sur un compact. Il permet de prouver une convergence uniforme d'une certaine famille de fonctions à partir de très faibles hypothèses. Les questions du jury suivent le développement.

- **Le théorème de Korovkin et son application au théorème de Weierstrass (30'32'')**

Voici un développement (en fait, deux développements car il y a deux résultats) que l'on peut trouver tel quel dans *Carnet de Voyage en Analystan*. Le puissant théorème de Korovkin et son application au non moins puissant théorème de Weierstrass sur la densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues sur un compact.

- **Méthode de quasi-Newton par Patrick Sam Al Habobi (46'05'')**

Dans le format d'un développement à l'oral de l'agrégation, Patrick Sam Al Habobi nous propose une méthode de quasi-Newton pour inverser une matrice réelle suivie d'une séance de questions sur le développement. Au programme : suites de matrices, méthode de Newton, théorème spectral et normes subordonnées. Référence : *Carnet de voyage en Analystan*.

- **L'équation différentielle $X'=AX$ 1/2 (11'56'')**

Avant d'attaquer le problème de l'allure et la stabilité des solutions des équations différentielles de type $X'=AX$, il est bon de faire quelques préliminaires et de passer à la loupe les outils usuels qu'exige la situation.

- **L'équation différentielle $X'=AX$ 2/2 (12'10'')**

On donne une autre approche pour l'allure des courbes dans $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation différentielle $X'=AX$. Cette approche passe par une classification plus grossière que celle des classes de similitude (on s'autorise à multiplier par un scalaire non nul).

- **Courbes solutions du système d'équations différentielles $X'=AX$ dans le plan réel par Aurélien (19'31'')**

Aurélien présente un développement pour l'agrégation interne (ou externe). Il s'agit de classer toutes les situations possibles pour les courbes solutions de l'équation $X'=AX$ où A est une matrice réelle de taille 2. Il en suit quelques questions de jury.

- **Le groupe du tétraèdre par Rozenn (18'42'')**

Le développement sur le groupe du tétraèdre !

- **Méthode de Newton pour la décomposition polaire par Antoine (23'07'')**

Antoine nous propose un développement à cheval sur l'algèbre linéaire et l'analyse : une méthode de Newton pour calculer la décomposition polaire d'une matrice inversible réelle. A l'aide du théorème spectral, on se ramène au problème analogue en dimension 1, c'est à dire la méthode de Héron, ce qui ne nous rajeunit pas. Enfin, le jury (Nicolas et Philippe) pose ses questions à Antoine autour de son développement sur la méthode de Newton.

- **Le théorème de Bohr-Mollerup par Audrey (22'44'')**

Extrait de *Carnet de Voyage en Analystan*. On connaît la fonction Gamma, essentielle en analyse complexe. Audrey en montre ici une caractérisation par la log-convexité et son équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$. Il s'agit du théorème de Bohr-Mollerup. Audrey profite des minutes d'arrêt de jeu pour en déduire la formule de duplication de Legendre. S'en suivent quelques questions de jury (par Tewfik et Philippe). C'est le moment de montrer qu'on est en mode zéro bluff !

- **Le théorème de Riesz par Raphaël 1 (12'25'')**

Le théorème de Riesz dit que si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors la boule unité de E n'est pas compacte. Voici la preuve de Raphaël dans le plus pur exercice de style du développement à l'oral de l'agrégation.

- **Le théorème de Riesz par Raphaël 2 (7'22'')**

Voici le moment des questions du jury. Cela donne une bonne idée de comment les choses se passent le jour J.

- **La décomposition LU par Patrick Sam Al Habobi (30'32'')**

Patrick Sam nous présente la décomposition d'une matrice en une matrice triangulaire inférieure unipotente " L " et une matrice triangulaire supérieure " U ", suivi par les fameuses questions du Jury...

- **Optimiser l'aire d'un triangle inscrit dans deux cercles tangents par Sam (16'09'')**

Sam nous présente un petit développement qui mêle savamment, cercles, triangles, géométrie, calcul différentiel, trigonométrie et topologie... Référence : le Karmati.

- **Probabilité que deux éléments commutent dans un groupe (58'22'')**

On cherche à exprimer la probabilité p_G que deux éléments tirés indépendamment dans un groupe fini G , de façon équiprobable, commutent entre eux. On va voir que si G est non abélien (ie p_G différent de 1) alors p_G ne peut pas dépasser $5/8$, borne atteinte, par exemple, pour le groupe diédral et le groupe quaternionique. Mais on trouvera une formule particulièrement simple pour p_G mettant en relation l'ordre de G et le nombre de classes de conjugaison. Cet exercice figure dans *Carnet de Voyage en Analystan*.

On vient de voir dans une vidéo précédente une formule simple qui relie ordre du groupe fini G , nombre de classes de conjugaison et probabilité pour que deux éléments commutent dans G . On va donner une illustration de cette formule quand G est le groupe GL_2 sur un corps fini, ce qui va nous permettre d'utiliser nos connaissances sur la réduction !

On vient de calculer la probabilité pour que deux matrices de $GL_2(K)$ commutent sur un corps fini K . La généralisation de ce résultat à $GL_n(K)$ demande un peu plus de savoir et de savoir-faire. **De savoir tout d'abord**, avec le théorème de décomposition de Frobenius qui va trouver son objectif plein-emploi dans cette vidéo et de savoir-faire avec des techniques classiques (**mais manifestement** souvent ignorées des étudiants à l'agrégation) de séries génératrices.

● Irrationalité de Pi par Riri (14'14'')

Dans cet état de calme mental affiché qui le caractérise, Riri nous présente **une preuve de l'irrationalité de Pi, que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Analystan**. Et, tout en s'élevant (par l'absurde) au-dessus de la hâte des hommes, il tient tout de même le pari d'exécuter ce développement en moins de 15 minutes !

● Points remarquables du triangle et barycentres (15'01'')

Un **exercice incontournable dans la leçon des barycentres** est celui qui consiste à réaliser les points remarquables d'un triangle par ses coordonnées barycentriques. En voici un exposé qui fait à peu près le tour de la question.

● Courbes de Bézier et algorithme de de Casteljau par Adrien (43'10'')

Adrien, qui vient de briller à l'agrégation interne, va nous présenter, de façon élémentaire, les courbes de Bézier (ingénieur chez Renault) et un algorithme, dû à de Casteljau (ingénieur chez Citroën) pour les construire.

● Le principe de la corde universelle par Nina (20'58'')

Nina vient nous présenter le très contre-intuitif principe de la corde universelle! La rencontre inéluctable du TVI et du TGV.

● Nina, le retour! L'intégrale de Dirichlet (19'42'')

Nina nous présente, en format développement, l'intégrale de Dirichlet dans tous ses états!

● Critère pour les matrices symétriques positives (par les mineurs principaux) (19'13'')

Un critère à la Sylvester pour la positivité des matrices symétriques. On rappelle dans un premier temps le cas défini positif avant de s'attaquer au cas positif. La méthode repose sur une astuce merveilleuse à retenir autour des coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice!

● Théorème de Lévy et théorème central limite par Basile (22'55'')

Basile a eu l'agrégation cette année. Il nous raconte, en direct du square Evariste Galois du campus de la Doua, comment il a transformé ses déboires en victoire. Il nous propose ensuite un joli développement (en exclusivité sur cette chaîne) avec le théorème de Lévy et le TCL.

● Tout sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$ par Basile (40'29'')

Basile propose une belle présentation sous forme de développement sur la classification des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$ cycliques. Le reste de la vidéo est consacrée à un bon nombre de situations où ce groupe intervient: recherches de décimales, automorphismes du groupe cyclique, irréductibilité des polynômes cyclotomiques, et quelques petites évocations des extensions cyclotomiques.

Questions d'oral (12)

● Question de jury sur le thème polynômes et fractions rationnelles (3'48'')

Voici une petite question de jury qui demande **un minimum de réflexion pour détourner le gros piège à mammouth** qui se cache sous le feuillage.

● Question de jury sur la leçon 106- Groupe linéaire-Sous-groupes (14'57'')

Voici une petite série de questions successives de jury qui passe **en revue un bon nombre de points** (pas tous évidemment, ce serait trop beau) dans cette leçon sur **le groupe linéaire et ses sous-groupes**. On passe **en revue, le groupe spécial linéaire, le sous-groupe des homothéties, les groupes à un paramètre, les problèmes d'engendrement et même les isomorphismes exceptionnels**.

● Questions de jury sur le thème racines de l'unité (14'32'')

Voici trois questions de jury sur la leçon 131 où l'on doit parler de racines de l'unité. Trois choses fondamentales sous-jacentes à ces questions. 1) L'utilisation de l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques Φ_n sur $\mathbb{Q}$ et leur degré $\varphi(n)$. 2) Le fait que $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec n . 3) le fait que **pour étudier l'intersection de deux extensions, il est important de connaître le corps engendré par ces deux extensions**.

● Question de jury - Leçon PGCD ou rang-dimension (14'05'')

Un exercice posé au jury de l'interne cette année. Il s'agit de **tirer des informations sur le PGCD de deux polynômes caractéristiques des matrices A et B à partir d'une matrice C de rang r qui vérifie $AC=CB$** . Un futur classique ?

● Question de jury sur le thème distances ou extrema (12'19'')

On trouve, **en algèbre comme en analyse**, à l'interne comme à l'externe, des leçons sur **les distances ou sur les extrema**. Voici une question de jury récemment entendue et rapportée par le sympathique Nicolas !

- **Questions de jury autour du rang en algèbre linéaire (34'11'')**

Deux questions de jury classiques au cours d'une leçon d'agrégation sur **le rang**. Une, sur **la diagonalisabilité**, et l'autre (plutôt esprit agrégation externe qu'interne) sur **la stabilité du polynôme minimal par extension**. Et, à la fin, une rencontre du troisième type :-)! Puis quelques questions classiques sur **les propriétés topologiques du rang**. Enfin, une dernière question de jury autour des propriétés du rang, mais, cette fois-ci, **le rang concerne les formes quadratiques sur un corps fini** !

- **Exercice de jury sur les actions de groupes (5'03'')**

Un petit exercice de jury est le bon réflexe est de dire pour commencer... "j'ai envie d'utiliser les actions de groupes".

- **Questions de jury sur la leçon 144- Racines d'un polynôme (55'04'')**

On y propose les fondamentaux de la leçon, quelques petits exercices, et certains développements. Voici 8 questions de jury d'horizons diverses sur la leçon 144- sur les racines d'un polynôme et fonctions symétriques élémentaires

* *

- **U-Turn (Philippe) par Guillaume Mallet (3'32'')**

Une belle année de prépa pleine d'émotions, qui finit en chanson, avec Guillaume et sa cover de U-Turn (Lili)

- **Tarare (et on a fait des maths) (3'39'')**

A joint work of U.C.B.L (United Choir of Baire Lovers) and Topoldavy University

- **La dernière échéance, United Choir of Baire Lovers (4'15'')**

Une petite vidéo souvenir de ces moments passés à préparer l'agreg externe sous confinement

- **Le banquet final à la Chapelle (5'07'')**

Une année pleine d'émotion, d'échanges, d'espairs, de réussites... ou pas. Mais une année qui se termine en chanson !

13 - Divertissements (106)

Arithmétique

Nombres premiers et carrés consécutifs (on répond aux auditeurs!) (12'19")

A la suite de la vidéo Arthur Meyer s'est interrogé dans un commentaire sur  • **Nombre de carrés consécutifs modulo p par ... l'existence de nombres premiers p tels qu'il existe suffisamment de carrés consécutifs modulo p .** Voici un petit exercice corrigé qui répond à la question parce que c'est tellement rare d'avoir réponse à une question que c'est un plaisir de la donner ! :-)

Le p -adique (ses merveilleuses applications) (48'19")

L'épreuve 1 de l'agrégation interne 2023 nous invite (maladroitement, certes) à nous intéresser aux entiers p -adiques. Nous allons introduire de façon piétonne les entiers et les nombres p -adiques ainsi que de merveilleuses applications (empruntée à un article de Bruno Winckler) qui nous convaincront que la théorie est indispensable. <http://mathem-all.fr/bw/introductiona...>

Théorème de Goodstein avec des ordinaux... peu ordinaires ! (51'31")

Voici l'occasion rêvée de rencontrer cette arithmétique exotique des nombres ordinaux, nés pour créer des récurrences, tout en tutoyant l'infini avec une aisance déconcertante. On commence par une rapide présentation, quelques petits calculs, puis une application qui en étonnera plus d'un : la preuve que la suite vertigineuse, dite de Goodstein, est stationnaire !

Tout d'abord quelques liens : le blog de David Mardore pour le plaisir <http://www.madore.org/~david/weblog/d...> et Scherer-Rideau pour les détails <https://www.math.ens.psl.eu/shared-fi...>

Cinq preuves coup de cœur pour une infinité de nombres premiers ! (27'16")

On propose 5 preuves, toutes d'horizons totalement différents, pour l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers (et la bravitude de leurs auteurs !)

Le problème des pièces de monnaies de Frobenius (24'23")

Le problème des pièces de monnaie que nous présentons ici se ramène au problème de comprendre la partie additive dans $\mathbb{N}$ engendrée par deux nombres premiers entre eux. La solution proposée par Frobenius est à la fois simple et admirable ! Et, en plus, à la fin, il y a un (Fro)bonus !!!

Utilisation de l'arithmétique dans les polygones (un exercice) (11'31")

Tout le monde a remarqué que la longueur des côtés d'un rectangle est périodique de période 2 (Longueur-Longueur-Longueur-Longueur). Et bien cette propriété se généralise avec les longueurs d'un p^n -gone dont les angles sont réguliers... Arriverez-vous à le montrer ?

Le problème des sabliers d'Euclide (15'50")

Un petit problème de sablier, de niveau élémentaire, qui demande tout de même un peu d'astuce et qui n'est pas sans rappeler un algorithme bien connu 😊

La table des restes de J^3 (21'40")

Jean-Jacques Juré m'a envoyé son article que je présente ici, où l'on trouvera avec bonheur (et nostalgie !) une table des restes permettant de travailler avec des collégiens et des lycéennes autour d'une méthode par les graphes du calcul du reste dans une division euclidienne.

Ma contribution est de montrer ici que ces tables de restes peuvent être éclairantes dans l'enseignement supérieur. Un lien vers l'article : <https://math.univ-lyon1.fr/~caldero/T...>

Trouver n entiers consécutifs sans nombre premier (et sans puissance de nombre premier) (2'52")

Dans la même veine que la vidéo "Entiers consécutifs sans/avec des facteurs carrés", thetamaths nous propose cet exercice astucieux ! On y verra que c'est justement parce qu'il y a une infinité de nombres premiers qu'il y a des plages aussi grandes que l'on veut sans nombre premier... Quel beau paradoxe !

Un exercice transverse entre réduction et arithmétique (niveau licence) (13'55")

Voici un exercice instructif où on développe nombres de petites techniques utiles et efficaces. On considère la matrice de la permutation cyclique $(12...n)$ et on considère la matrice D égale à la somme des m premières puissances de C , où m est un naturel non nul. On veut montrer que D est inversible si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

Un exercice ("Terminale option Maths") autour du théorème des deux carrés et plus si affinités. (19'07")

On part d'un exercice que Michael (vu sur cette chaîne :-)) m'a récemment proposé. On résout l'exercice avant de passer à une seconde question, nettement plus agrégative... Bref on pousse un peu le curseur 😊

Des nombres puissants (et un échange stupéfiant) (17'47")

Dans le cadre de la fête de la science (2024), on décrypte une conversation entre Paul Erdős et Kurt Mahler, deux mathématiciens de haut vol, qui a eu lieu à Oslo en 1936, et qui portait sur les nombres puissants.

La période des chiffres des unités de la suite de Fibonacci (47'45")

Un petit exercice qui fait la synthèse de ce que l'on apprend à l'agrégation interne sur l'arithmétique, la réduction, les suites récurrentes linéaires et les polynômes !

Une suite récurrente de nombres premiers: le théorème de Miller (8'54")

Le théorème de Miller assure qu'il existe un réel x tel que, avec $f(t)=2^t$, la suite des parties entières des itérés $f^{(n)}(x)$ donne toujours un nombre premier. On présente le théorème sous forme d'exercice, qui pourrait être donné à partir de la L1, voire la terminale, à condition que l'on admette le postulat de Bertrand. On pourra retrouver cet exercice avec bonheur dans le livre de Francinou et Gianella algèbre 1.

Equation diophantienne de degré 2/points entiers d'une conique (14'07")

On propose une équation de degré 2 à deux inconnues dont on cherche les solutions entières. Il s'agit là d'un classique qui utilise la fameuse méthode de Gauss de réduction des formes quadratiques mais avec, cette fois-ci, une variante car on s'oriente plutôt vers l'arithmétique !

Le nombre 26 par Luca (38'22")

Luca, avec son aisance naturelle, nous parle de son développement à l'oral de l'agrégation mathématiques sur une équation de Mordell ! Il a encore dans sa mémoire vive, toutes les questions que le jury lui a posées :-)

TOUT sur les nombres de Bernoulli ! (1h00'35")

On présente ici les nombres et les polynômes de Jacques Bernoulli. Ces nombres se retrouvent miraculeusement, à la fois, en algèbre, en combinatoire, en théorie des nombres, en arithmétique mais aussi en analyse, en théorie de Fourier, en topologie, K-théorie, et il se rencontre de façon naturelle en algèbre non commutative. On va introduire ces nombres par analyse-synthèse par la recherche de polynômes permettant de calculer des sommes de Newton.

Maintenant que l'on a appris à écrire sans faute le mot "Bernoulli" dans la première vidéo (entre autres, grâce au pense-bête "Bernoulli n'est pas une nouille"), on prouve une formule non totalement triviale qui permet de calculer explicitement les fascinants nombres de Bernoulli. La preuve passe par la formule donnant le nombre $s_{n,m}$ de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à m éléments (via la formule du crible), puis un résultat surprenant (et intéressant en soi) qui prouve que $s_{n,m}$ est le coefficient de la base canonique des polynômes dans la base des polynômes de Hilbert !

On établit, à l'aide de la formule de Dirichlet sur les séries de Fourier, un lien entre les nombres de Bernoulli et la fonction Zeta de Riemann.

Mais, pourquoi les nombres de Bernoulli apparaissent-ils comme en génération spontanée, dans divers domaines des mathématiques ? Finalement, c'est peut-être cette famille $B_n(t)/n!$ qui s'apparente à la famille $x^n/n!$ dans son comportement vis-à-vis de la dérivée... Il est alors normal que les nombres de Bernoulli se retrouvent dans les développements limités de la famille des exponentielles. On donne ici le développement de $\text{xcot}(x)$ en 0. On saluera, en passant, les fécondes méthodes de déformation en analyse.

On fait un résumé succinct de l'utilité des nombres de Jacques Bernoulli en analyse (développements limités, trigonométrie, formule de Stirling, approximations d'une intégrale, précision dans la méthode des rectangles) ...

On prouve une formule qui fournit le dénominateur de tous les nombres de Bernoulli. C'est le théorème de Clausen-Von Staudt.

Presqu'entiers et nombres de Pisot (1h03'02")

Partie I. On va s'intéresser aux suites géométriques de réels dont les termes sont des "presqu'entiers" à partir d'un certain rang. On aboutit à une définition des "nombres de Pisot".

Partie II. On va présenter, en tentant de motiver, la théorie de Charles Pisot. Tout d'abord, en montrant l'utilité de ces nombres dans l'approximation diophantienne. Ensuite, en montrant que ces nombres sont à la fois rares (et donc chers), du fait d'une caractérisation via les suites géométriques de presqu'entiers, et, en même temps, suffisamment présents dans la nature, puisque toute extension algébrique réelle de $\mathbb{Q}$ est engendrée par un nombre de Pisot.

Partie III. Les mathématiciens confirmés connaissent par cœur la formule du déterminant de Vandermonde mais peu d'entre eux savent inverser la matrice de Vandermonde. Une astuce qui utilise les polynômes permet de le faire élégamment. On aura ensuite besoin de cette inversion pour montrer le théorème de Pisot dans une prochaine vidéo.

Partie IV. On prouve le théorème de Pisot : un nombre algébrique réel supérieur à 1 qui est la raison d'une suite géométrique presque entière est un nombre de Pisot. La preuve est instructive et utilise pas mal de classiques de l'agrégation externe (théorème de Cayley-Hamilton, système de Vandermonde, sous-réseaux de $\mathbb{Z}^n$, morphisme de multiplication dans un anneau, morphismes de conjugaison dans un corps).

Divine proportion, nombre plastique et méthode des puissances (48'34")

Une construction classique consiste à partir d'un rectangle et lui associer un autre rectangle en plaçant un carré sur son côté. En itérant cette méthode (et en normalisant), on obtient à la limite le fameux rectangle d'or. On fait ici le lien entre cette construction et la méthode des puissances en algèbre linéaire, bien connue (ou pas) des agrégatifs. On cherche une "divine proportion en dimension 3", pour faire plaisir aux architectes mais également pour mettre à profit la méthode des puissances. Cette fois-ci, il faut résoudre l'équation $X^3 - X - 1$ dans le corps des complexes. On en profite pour montrer comment le discriminant permet de voir le nombre de solutions de l'équation. On tente de faire un lien de parenté entre nombre d'or et nombre plastique pour tomber sur la notion de suite géométrique presque-entière. On verra plus tard que ces deux nombres appartiennent à une famille remarquable de nombres réels : les nombres de Pisot.

Un fractal de Pascal (43'27")

Pour cette période de fêtes, voici un petit aperçu d'une preuve de la structure fractale de triangle de Pascal, vu modulo p premier. Pour $p=2$, nous avons le fameux triangle de Sierpinsky, mais pour les autres ? Dans un premier temps, nous voyons que le triangle modulaire cache une auto-similarité tensorielle...

On prouve ensuite la propriété d'auto-similarité tensorielle du triangle de Pascal modulo un nombre premier p , qui donnera dans une prochaine vidéo la structure fractale du triangle de Pascal. On montre en particulier que cette propriété repose essentiellement sur le morphisme de Frobenius, et donc, n'a que peu de chance de se généraliser tel quel pour tout entier n (non premier) et même pour toute puissance de p .

Puis, l'auto-similarité se fait fractale. Il suffit pour cela d'étendre le triangle vers l'intérieur au lieu de la faire vers l'extérieur. On s'intéresse donc aux fractales, qui auraient pu être mieux exploitée durement le confinement, en créant des kilomètres de parcours de santé dans un périmètre restreint. On présente (assez modestement) la structure fractale du carré de Pascal et du triangle de Pascal modulo p . On calcule

facilement la dimension fractale de la jolie "structure triangle", par invariance, en la calculant sur la structure carrée (moins jolie mais forcément plus pratique).

Bonne année 2026 - Et que la force de Gauss soit avec toi! (27'52")

Il y a 400 ans, Fermat commençait ses recherches en arithmétique, il y a 250 ans, Lagrange achevait ses œuvres avec ses "Recherches d'arithmétique" et, il y a 100 ans, Emil Artin donnait sa version géniale de la loi de réciprocité quadratique. On propose en cette nouvelle année un petit quizz qui relate cette épopée.

Groupes

Etude du groupe de Rubik (36'24")

Cette vidéo propose la lecture d'un article qui étudie le cube de Rubik d'un point de vue de la théorie des groupes. On donnera une description du groupe à partir de l'analyse du cube, puis on en décrira le centre, les éléments d'ordre 2, et on découvrira que certains sous-groupes classiques y sont cachés. Au programme, actions de groupes, produits semi-directs, hyperplans et même action par homographie !

Un 2-Sylow de S_4 en 6ème avec l'IREM (20'14")

Je propose de présenter ici une de mes fiches "Galion" de sixième. On apprenait les groupes, à cette époque, et je trouve admirable le travail de l'IREM pour faire passer ce que l'on appelait les maths modernes. On finit avec un peu de recul sur les maths de master qui se cachent derrière cette fiche. Mais, tout de même, quelle utopie extraordinaire en cette fin des trente glorieuses.

La preuve tellement incroyable que c'est à peine croyable! (11'43")

On a vu récemment que le morphisme naturel de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ était surjectif. Mais en général, si A est un anneau et I un idéal, peut-on affirmer que le morphisme naturel de $SL_2(A)$ vers $SL_2(A/I)$ est surjectif. Et bien Jean-Louis Tu répond par la négative avec un contre-exemple juste extraordinaire.

Analyse

Prix Abel 2025- L' époustouflant Masaki Kashiwara ! (51'43")

C'est le mathématicien Masaki Kashiwara qui a obtenu le prix Abel 2025 ! Je me permets donc de donner un petit aperçu de ses résultats les plus prestigieux (qu'il me pardonne la vulgarisation terre à terre de sa pensée transcendante !). Jean Pierre Pompin me fit remarquer que c'est Ofer Gabber et non pas Olaf Gabber.

Mais où sont passés les zéros de l'exponentielle? (Niveau Licence-Agreg) (49'41")

Avis de recherche : les zéros de l'exponentielle ont disparu alors que l'exponentielle tronquée P_n en degré n possèdent toujours n zéros bien distincts. On les cherche à la trace en suivant le problème Centrale Supélec 2001 MP et, surtout, en "dégommant les racines" à l'aide du polynôme $Pi_n(X)=P_n(nX)$. Au programme, formule de Taylor avec reste intégral, critère de Weyl, relations de Newton... Bref, un problème élégant et instructif. Une remarque élégante de Toto² : Le fait que les racines de Pi_n sont uniformément bornées provient directement du critère de Eneström-Kakeya qui dit que si les coefficients d'un polynôme sont positifs croissants, les racines sont dans le disque unité !

Variations sur la série harmonique (20'45")

On sait que la série harmonique (la somme des $1/n$) diverge mais que peut-on dire si on la somme sur un ensemble plus restreint ? Comme les nombres qui n'ont pas de 9 dans leur écriture décimale ? Ou les nombres qui ont "peu" de 9 dans leur écriture décimale ? C'est comme cela que commence un joli problème posé par mon camarade François. On le dit dans l'oreillette qu'il s'agit de la série de Kempner. Merci à Hervé Clavier de me l'avoir signalé.

Polynômes

Friandises avec déterminants et polynômes (17'34")

Deux petits exercices bien instructifs sur le thème déterminants et polynômes. Au programme, le théorème fondamental des déterminants, Vandermonde, Taylor polynomial, et du doigté ! Au final, pour les experts, on montre comment passer d'une formule algébrique sur un corps de caractéristique nulle vers un corps de caractéristique non nulle...

Factorisation sur $\mathbb{F}_q$ et factoriel de Carlitz (22'39")

Un joli développement (néanmoins classique) consiste à factoriser le polynôme "total" $X^{qn}-X$ sur $\mathbb{F}_q$. Nous donnons la preuve classique de ce développement avec deux applications, dont une plutôt nouvelle à effet waouh : le calcul du factoriel de Carlitz ! Pour une fois qu'un développement, c'est une factorisation, faut en profiter :-))

Polynômes palindromiques (ou réciproques) Caractérisation-exemples (31'24")

"Elu par cette crapule" peut également se lire de la même manière à l'envers ! C'est aussi le cas de certains polynômes appelés palindromiques ou réciproques. On en propose ici une caractérisation. On montre ensuite que ces polynômes sont omniprésents dans la jungle des mathématiques, leur "palindromicité" reflétant souvent un phénomène profond.

Olympiades

Un problème de décimales aux Olympiades (9'23")

Un problème rentré dans les annales des olympiades et proposé par notre ami Antoine avec sa solution arithmétique pleine d'élégance.

Olympiades 1990? Un sacré numéro! (20'40")

Un sujet des olympiades mathématiques de 1990 a dû donner du fil à retordre aux candidats qui s'y sont frottés. Un problème qui laisse pantois et une solution de toute beauté qui mêle calcul complexe, polynômes, racines de l'unité, arithmétique... plus quelques surprises que je ne voudrais pas spoiler. Mais tout de même sachant que ça s'est passé à Pékin cette année-là, on peut douter de quel lemme on va devoir se servir 😊

Dernières décimales de n^{10d} (aux olympiades ou plus si affinités) (6'58")

Un petit exercice d'olympiades en arithmétique. Au programme : congruence, indicatrice d'Euler et groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Un petit exercice d'Olympiades (pour briller) (4'29")

Petit exercice suggéré par JBHU! Calculer la série des $d(n)/n^2$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n .

Un petit bijou d'Olympiades sur le thème Combinatoire et Arithmétique (Toronto '95) (18'10")

On propose deux méthodes (une élémentaire et une autre avancée) pour ce superbe exercice qui consiste à compter les parties de $[1, 2p]$, p premier, dont la somme est multiple de p . Au programme, polynômes générateurs mais à la sauce modulaire! Un petit soucis dans la preuve élémentaire que me signale Bruno Michel. Je rectifierai cela dans une vidéo "errata"

Retour sur l'exercice Olympiades Toronto 1995 (Une méthode élémentaire) (12'34")

Nous présentons une méthode élémentaire (Merci à Bruno Michel pour ses commentaires et corrections) de ce magnifique exercice qui consiste à calculer le nombre de parties à p éléments (p premier impair) dans $[1, 2p]$, dont la somme est un multiple de p .

Exercice d'Olympiades: les triangles presque isocèles rectangles à côté entiers. (17'34")

Il n'y a pas de triangle isocèle rectangle (non trivial) à côtés tous entiers: cela provient du fait que racine de 2 est irrationnel. En revanche il existe une infinité de triangles presque isocèles rectangles à côtés entiers, c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle droit diffèrent d'une unité! Sauriez-vous les montrer et trouver tous ces triangles?

Olympiades ('98): une équation diophantienne balkanique (4'50")

Il faut rendre à César ce qui appartient à César, et aux Balkans ce qui appartient à Diophante! Voici une petite équation qui vous aidera à comprendre votre choix de l'entier m lorsque vous voudrez regarder une équation diophantienne modulo p !

Olympiades : une équation diophantienne (3'43")

Un tout petit exercice d'arithmétique que m'a proposé mon ami Rached Mneimné sur la somme des carrés d'entiers consécutifs.

Un triangle d'or aux Olympiades (32'45")

Première partie : Un bel exercice, proposé par Jean-Jacques Juré, et donné aux Olympiades mathématiques sur une construction d'un triangle équilatéral à partir d'un autre, selon une égalité de surfaces. On en propose ici une preuve de type "Master" avec de la réduction de matrices, et une autre, plus élémentaire, qui peut, théoriquement, être faite en lycée. On pourra en tirer, une construction à la règle et au compas pour les nostalgiques et une formule matricielle par affixes qui a permis à Jean-Jacques d'intégrer la construction dans la rétine du héros de manga Itachi Uchiwa. Seconde partie : Après une remarque de Denis, je reprends cette vidéo sur la divine proportion dans un triangle équilatéral. Ceci nous permet de prendre plus de recul sur la méthode par réduction des matrices et de fournir à ce problème une solution de niveau collège... Bref, des problèmes à grande largeur de spectre comme on aimerait en voir plus souvent.

Une perle d'olympiades en 1988 (10'18")

Une perle d'olympiades propose de montrer que si (a, b) sont des naturels tels qu' $ab+1$ divise a^2+b^2 alors leur quotient est un carré. On propose une solution basée sur une idée simple d'un niveau terminale. Cette idée permet d'ailleurs de trouver tous les couples (a, b) possibles...

Olympiades-un exercice cinq étoiles! (22'58")

Un exercice ne demandant que très peu de background, juste la définition d'une partie entière... Ces exercices que l'on appelle "les jardins des délices" en hommage à Jérôme Bosch, pour exprimer notre condition de mathématiciens pris entre le paradis des énoncés simples et l'enfer de leurs preuves. Préparez-vous à une belle rencontre avec le nombre d'or !

Géométrie

Fête de la science 2025! L'art de la découpe (19'08")

On présente quelques exercices du livre Géométrie de Michèle Audin qui consistent à découper des figures pour reconstituer un carré. On retrouve avec bonheur nos classiques de la géométrie plane 😊

Comment compter des triangles équilatéraux (par Louis Moraine) (18'15")

On veut compter le nombre de triangles équilatéraux à sommets basés sur les points entiers d'un triangle équilatéral. En exposant ma méthode dans la vidéo • Combien de triangles équilatéraux dans un ... , j'ai fait part de mes insatisfactions, voire mes frustrations sur la méthode trop "miraculeuse" pour être honnête. Louis Moraine, étudiant à l'ENSAE, et amateur d'exercices d'olympiades à ses heures perdues, m'a envoyé pas moins de deux solutions qui montrent sa maturité mathématique. A vous de juger!

Combien de triangles équilatéraux dans un triangle équilatéral? (24'24")

Un problème au départ bien naturel qui consiste à partir d'un triangle équilatéral formé de $n(n+1)/2$ points et de chercher à construire parmi ceux-ci tous les triangles équilatéraux possibles dont les sommets se trouvent sur ces points. Il faut bien mener son calcul pour trouver au final un résultat si simple... que l'on a l'impression d'être passés à côté de quelque chose.

Qui a le plus grand périmètre? (et pourquoi j'aime cet exercice!) (10'37")

Un petit ravissant exercice (niveau 3ème?) proposé par Denis Roussillat.

Napoléon trivialisé par Maître Yoda ! Régularisation d'un n-gone (22'04")

Voici un magnifique problème proposé par Jean-Jacques Juré. Le théorème de Napoleon permet de régulariser un triangle. Nous allons voir qu'il est possible également de régulariser un n-gone pour tout n, ce que l'on appellera le théorème de Napolygon (merci mpc formation) !!! Voici un problème qui ne manquera pas de séduire à la fois ceux qui aiment la géométrie plane que ceux qui aiment la réduction, l'analyse spectrale et toutes leurs interférences ! Merci à Nicolas Poppon pour le titre 😊

Un quizz qui fait intervenir la géométrie finie! (16'39")

Un petit quizz autour d'un problème mondial lors d'une croisière sur le paquebot du Capitaine Woody.

Géométrie des cercles (ou droites) - Pour débiter avec la géométrie anallagmatique (1h52'19")

On va, à partir de ce que nous savons tous sur les cercles et droites, créer un lien entre leur géométrie et celle de l'espace de Lorentz, c'est-à-dire, l'espace R^4 muni d'une forme quadratique de signature (3,1). On écrit ici tous les résultats dans un tableau à double entrée pour cette belle correspondance et on fera les preuves plus tard. On a ainsi obtenu un tableau qui met en relation des cercles du plan euclidien et des droites de l'espace R^4 muni de la forme de Lorentz.

Maintenant, on passe aux preuves, que l'on peut retrouver dans NH2G2, XI-3.3.8. On commence à minutieusement mettre en place une correspondance entre droites et cercles du plan complexe et droites de l'espace R^4 . On peut, par section hyperplane, voir tout cela assez agréablement dans R^3 euclidien muni de sa boule unité. Par cette correspondance, construite en transformant un cercle en une "droite de l'espace de Lorentz R^{4*} " grâce à son équation, on utilise Sylvester pour classer les faisceaux de cercles et les faisceaux orthogonaux.

On a, pour l'instant, un joli modèle pour l'étude des cercles, qui sont représentés comme des points d'un espace projectif de dimension 3. Dans cet espace, nous allons voir que les points d'un cercle donné se voient sur une sphère, puis, par projection stéréographique, on va retrouver le cercle dans la géométrie de R^4 .

Maintenant, on introduit l'action de $SL_2(C)$ sur les cercles par homographie. Nous l'avons déjà dans une playlist mais, cette fois-ci, l'originalité vient du fait que cette action provient de l'action par congruence sur les formes hermitiennes, donc leurs cônes isotropes. Nous sommes à deux doigts de conclure à une des plus belles correspondances de la géométrie qui fait toute la richesse de la géométrie anallagmatique. On prouve un isomorphisme entre les groupes simples $PSL_2(C)$ et $PSO(q)$ qui sera ensuite prolongé par un isomorphisme un peu plus complet. On finit alors sur un tableau de correspondance entre deux versions de la même géométrie, dite anallagmatique, en indiquant comment ces deux versions se complètent pour créer une géométrie puissante.

Théorème de Descartes par le déterminant de Cayley-Menger (21'50")

Alden Bradford a récemment trouvé une preuve express du théorème de Descartes sur les cercles tangents. Cette preuve utilise une astucieuse interprétation du déterminant de Cayley-Menger.

Une formule d'Apollonius en dimension n (avec le théorème spectral) (15'46")

La formule d'Apollonius relie les distances entre les sommets d'un triangle et le milieu d'un côté. Le théorème spectral permet d'en voir une généralisation tous azimuts en dimension n.

Saurez-vous trouver le rayon du cercle? (7'08")

Un charmant problème de géométrie qui ne demande que des notions de collège et dont la solution est proposée par le non moins charmant Denis Roussillat!

Maths et musique

Les tonalités musicales vues par un mathématicien-1 (26'45")

Surtout que le mathématicien en question est MONSIEUR Michel Broué, et j'avais à cœur de partager son article que vous pouvez télécharger sur sa page web : où il donne, avec la prudence qui convient, son regard de mathématicien face au monde si varié des tonalités musicales. Dans un premier temps, on introduit le cercle dodécaphonique à partir de quelques axiomes bien sentis... On verra que finalement, ces axiomes amènent au sous-groupe engendré par 3 dans le quotient R [### Les tonalités musicales vues par un mathématicien-2 \(35'39"\)](https://webusers.imj-prg.fr/~michel.b...**(2) et, à faire, dans ce sous-groupe, une erreur grossière, mais bien humaine !</p></div><div data-bbox=)

Dans ce deuxième volet, après s'être résolu à travailler dans $H := Z/12Z$, nous allons classer les gammes par leur nombre de transpositions possibles, ce qui revient finalement à étudier les orbites de l'action de H à gauche sur l'ensemble $P(H)$ des parties de H . Et voici une drôle de rencontre avec cette fonction de Moebius.

Les tonalités musicales vues par un mathématicien-3 (47'36")

Voici le dernier volet de notre série sur les tonalités musicales vues par un mathématicien dont voici l'article originel de Michel Broué. On donnera (avec quelques illustrations pianistiques) deux théorèmes d'existence et d'unicité. Un sur les gammes adaptées à la transposition, et un, qui caractérise la gamme occidentale (Do-ré-mi-fa-sol-la-si-do...) à l'aide de quatre conditions naturelles. On donnera ensuite quelques pistes pour l'analyse de ces conditions. <https://webusers.imj-prg.fr/~michel.b...>

Interviews

Des maths au World Tour: itinéraire d'un data scientist chez Groupama-FDJ (58'27")

Comment passer des groupes... à groupama? Voici Olivier Mazenot, étudiant brillant à Lyon 1, agrégé à l'université de Franche-Comté, puis, data scientist pour l'équipe de coureurs cyclistes Groupama FDJ. Olivier va nous parler de son parcours hors cadre, de ses échecs, de sa remise en selle, et de son métier de statisticien au service d'une équipe sportive. Et bien sûr, on parlera de l'arrivée inévitable de l'I.A. dans ce monde compétitif!

Lancement du site Math Woods et présentation par leurs créateurs!! (36'11'')

Math Woods est une encyclopédie d'exercices open source! Matthieu Finck et Thomas Lejeune ont muri ce magnifique projet d'une encyclopédie en ligne d'exercices de mathématiques open source, entremêlant énoncés, solutions et concepts! Ils présentent leur site sous tous ses angles, ainsi que ce qui les a motivés. On termine la discussion sur ce qui pourra en intéresser beaucoup, comment on crée un tel site en ligne. Lien vers le site: Lien vers le tuto • Math Woods, une encyclopédie d'exercices o...

Un jeune élève de terminale prouve le théorème de Birkhoff-Von Neumann (respect !) (21'19'')

Antoine, qui vient de finir sa terminale, a prouvé récemment le théorème de Birkhoff-Von Neumann qui affirme qu'une matrice bistochastique est combinaison convexe d'au plus n^{2-n+1} matrices de permutation. Il m'a permis de présenter sa preuve (qu'il a trouvée par lui-même), qui utilise la théorie des graphes, et en particulier, le principe de mariages de Hall. J'en profite pour faire de la pub pour le Club de Maths Discrètes de Lyon qui a fortement contribué à la formation d'Antoine.

Histoire des sciences - Pierre Crépel

Une matinée avec Pierre Crépel- Académicien-Historien des Sciences-1 (17'24'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques.

Une matinée avec Pierre Crépel- La quadrature du cercle à l'ère des rationalistes-2 (4'16'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Nous allons discuter de la quadrature du cercle au XVIIIème siècle, c'est-à-dire bien avant Lindemann!

Une matinée avec Pierre Crépel- Des probabilités à la météorologie-3 (9'32'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Probabiliste de formation, Pierre nous parle de l'apparition des probabilités, des statistiques... Pas toujours facile, maintenant que les certitudes et les incertitudes se sont bien ancrées, de se remettre dans le contexte de l'époque.

Une matinée avec Pierre Crépel- Les théories scientifiques de la musique au XVIIIème-4 (4'56'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Livre à l'appui, il nous montre en feuilletant des bribes de documents anciens consacrés à la théorie de la musique.

Une matinée avec Pierre Crépel- Les "savants moyens"-5 (5'52'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Pierre nous parle avec la malice et la retenue qui le caractérise, des savants moyens, donc, de vous et moi 😊

Une matinée avec Pierre Crépel- Le jeune Ampère et son AVS-6 (7'54'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Pierre nous parle de la jeunesse, pleines de passion mathématiques, du savant lyonnais André-Marie Ampère, archives à l'appui.

Une matinée avec Pierre Crépel- Statistique et politique coloniale-7 (5'26'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. Pierre nous parle ici de la jeunesse des statisticiens à l'époque de la politique coloniale...

Une matinée avec Pierre Crépel- Mathématiques et poésie-8 (8'40'')

Pierre Crépel nous reçoit à l'Académie des Sciences Belles Lettres et Arts de Lyon, qu'il préside. Il partage avec nous, dans cet environnement entouré de figures qui forcent le respect, et avec cette voix feutrée de bibliothèques, les réflexions basées sur son travail d'archiviste et son expérience d'historien des mathématiques. On sait que les mathématiques sont de la poésie, mais là, on est sur la médiane!

Maths et IA

La conjecture jacobienne invalidée! (34'08'')

Avec l'aide de l'IA, le mathématicien Levent Alpöge a invalidé la conjecture jacobienne, conjecture émise par Keller en 1939, et considérée comme vraie jusqu'ici. Sûrs de sa validité, les mathématiciens avaient construits des "châteaux en Espagne", et tout ce monde est en train de s'écrouler! Nous présentons la conjecture dans cette vidéo, pourquoi était-elle naturelle, ses versions algébriques, analytiques, et topologiques. On essaiera ensuite de mieux comprendre le contre-exemple trouvé par Claude ainsi que la magnifique interprétation de Terence Tao. Erratas: Cdsp me signale que l'interprétation Terence Tao provient en fait d'une idée de Andy Jiang. Riri me signale que l'hyperplan générique que je mentionne pour "faire tomber la dimension" dans l'interprétation finale doit passer par 0 et non pas l'inverse.

La conjecture jacobienne avant et après l'IA, par Pascal Adjamagbo-1 (52'24'')

Pascal Kossivi Adjamagbo, chercheur à l'IMJ (Institut Mathématique de Jussieu), a travaillé toute sa carrière sur la conjecture jacobienne. C'est dire s'il a des choses à raconter sur ce problème récemment invalidé par l'intelligence artificielle. Un témoignage important qui je l'espère, fera partie d'un travail nécessaire de réappropriation.

La conjecture jacobienne: ce que l'on sait démontrer, par Pascal Adjamagbo-2 (53'10'')

Hegel a dit « le faux est un moment du vrai ». C'est donc le moment rêvé pour parler avec Pascal Kossivi Adjamagbo, chercheur à l'IMJ (Institut Mathématique de Jussieu), de la conjecture jacobienne, récemment invalidée par l'intelligence artificielle.

La conjecture de Fermat enfin vérifiée par ordinateur (33'02'')

Le théorème du siècle est désormais infaillible! La conjecture de Fermat, ou si vous préférez le théorème de Wiles (ou Taylor-Wiles) a vu sa preuve implémentée dans LEAN. Une épopée moderne qu'on va essayer de vous raconter. Le lien sur le post d'Anthropic Le lien vers la vidéo de Loris sur la programmation sur LEAN Le lien vers la polémique, faites vous un avis

Le problème de Navier-Stokes (de Leray à l'IA) par Lorenzo Brandolese (41'05'')

Lorenzo Brandolese, collègue de Lyon 1 (et de longue date!) qui a travaillé sur le problème de Navier-Stokes, nous parle du problème du Millénaire (1M de dollars quand même!) proposé par l'institut Clay. Mais pour commencer, Lorenzo va s'attarder sur le problème tel qu'il a existé depuis des décennies, avant d'avoir la couverture médiatique actuelle. Ces anciens étudiants apprécieront certainement de retrouver l'ambiance de ses cours et les autres apprécieront certainement qu'un chercheur sache aussi bien rendre accessible

Formalisation informatique de preuves par Loris (44'28'')

Loris, actuellement en cursus de Master Avancé de mathématiques, travaille cette année sur la **réécriture et la formalisation de preuves**. Il a eu l'excellente idée de "formaliser" la preuve d'un développement fétiche de son année d'agrégation : le théorème de Gauss-Wantzel.

📺 • Construction à la règle et au compas du p-... Il nous présente ici un petit aperçu de son travail sur le logiciel LEAN et de là sa librairie sur laquelle ont été implantés tout un pan des mathématiques ! Vol au-dessus d'un travail de titan ! A propos de travail de titan, un article du monde paraît au moment où l'on publie cette vidéo ! Coïncidence ? Je ne crois pas 😊

<https://www.lemonde.fr/sciences/artic...>

Les inclassables

Le principe d'incertitude d'Heisenberg expliqué à mon voisin Nico (16'30'')

Une vidéo pour expliquer l'iconique principe d'incertitude d'Heisenberg avec un minimum de moyens mathématiques. En effet, on utilisera juste la notion de système linéaire, matrice inversible... et la série géométrique.

Changement d'heure (et dualité) (25'29'')

Heure d'hiver, heure d'été ? On avance l'heure ou on la recule ? On dormira un peu plus ou on manquera de sommeil ? Ce dernier week-end de mars où l'on passe à l'heure d'été est propice à ce genre de questionnement. **On en profite donc pour remettre les pendules à l'heure en faisant le point sur la dualité !**

C'était comment le bac en 67 ? (35'44'')

Une petite perle au bac Paris 1967. Il s'agit de la structure de groupe sur une hyperbole et, chose étonnante, quelques applications géométriques, (simples, certes, mais tout de même !) de cette structure ! Chaud quand même les questions ! Doit-on y voir une raison aux événements de l'année qui a suivi :-)?

Le problème Bac Paris 69 (32'12'')

Jean-Claude Andrieux a passé le bac en 1969 et la vidéo à effet Waouh sur la géométrie du demi-plan de Poincaré lui a rappelé des souvenirs ! Il m'a donc envoyé son sujet de Bac qui remonte à 55 📺 • Approximation d'un réel et pavage par des ... ans, dont voici le lien : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Paris_... Auriez-vous eu le bac cette année-là ? Auriez-vous eu un 17/20 comme Jean-Claude ? Faites le test !

Des vœux de bonne année...elliptique! (25'55'')

On profite de ce passage de 2024 (année tétraédrique) à 2025 (année carrée) pour réfléchir à cette question grégophantienne (ie diophantienne et grégorienne) quand est-on (ou va-t-on) passé (passer) d'une année tétraédrique à une année carrée ? C'est le moment rêvé pour réviser, tout en douceur, nos connaissances sur les courbes elliptiques.

Remarquables identités (14'49'')

On passe en revue tous nos souvenirs de troisième et de seconde, où nous avons rencontré, pour la première fois, les identités remarquables. Mais, avec le recul, nous pouvons les voir désormais comme des formules de congruences entre formes quadratiques ! Tout un programme. Au final, nous ferons la lumière sur une identité remarquable relativement méconnue mais liée à un résultat fondamental de Grothendieck-Witt sur la diagonalisation des formes quadratiques par congruence !

Variance des inversions, polynômes générateurs et décomposition de Bruhat (23'51")

Un mélange instructif et passionnant de citation de papillote, de variance sur le groupe symétrique, de petits calculs polynomiaux qui nous amènent curieusement à la décomposition en cellule de la variété de drapeau (mais, on le dira un peu autrement, avec des matrices). Feat. Stella (la star !)

Une formule de déterminants à imprimer sur vos T-Shirt! (8'59")

Voici un petit exercice astucieux de déterminant proposé par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. La magie de la formule à prouver réside dans le fait qu'elle compare deux déterminants de matrices de tailles différentes !

Apprendre à multiplier avec les doigts! (10'58")

Allez zou ! Une vidéo élémentaire pour réunir toute la famille ! On montre comment une formule (peu connue) permet de retrouver très rapidement ses tables de multiplications.... Et plus !

Exercice sur une limite de suite complexe (niveau licence) (9'54")

Un petit exercice sur une limite de suite où l'on retrouvera, avec toujours le même plaisir, calcul complexe, développement limité (ou équivalent), trigonométrie et construction géométrique !

En attendant le C26 (8'11")

Un petit problème sur les attentes de bus avec un résultat... plutôt contre-intuitif.

Vous êtes plutôt "réels" ou "rationnels"- On énumère les différences (33'06")

Petits, on apprend les rationnels, puis, on découvre les réels. Et il faut l'avouer, l'environnement réel fournit une zone de confort bien rassurante mais aussi puissante et pratique. On énumère différentes zones des mathématiques (théorie des ensembles, topologie, groupes topologiques, polynômes, réduction, et même groupes de Brauer) où l'on peut confronter version rationnelle et la version réelle. Et, finalement, la version rationnelle de notre enfance reste encore bien attachante. Merci à Riri pour la proposition de sujet. Errata : Le groupe de Brauer de $\mathbb{Q}_p$ est $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et non pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme je l'ai dit vers la fin ! Merci à Alain Genestier pour m'avoir fait remarquer ma bourde !

Propriétés (ou non) de l'orthogonal dans un Hilbert (21'17")

Le bon cadre pour présenter des propriétés et contre-exemples autour de l'orthogonalité semble être celui de l'espace de Hilbert. A-t-on toujours par exemple que l'orthogonal de l'orthogonal est égal au sous-espace lui-même, que l'orthogonal de l'intersection est égal à la somme des orthogonaux, ou de son adhérence. Nous proposons ici une petite discussion informelle sur le sujet.

A quelle condition $(x+e_i)_i$ est une base? (Niveau Licence) (8'08")

On propose ici deux méthodes à l'exercice classique qui donne une condition simple pour que $(x+e_i)_i$ soit une base quand $(e_i)_i$ est une base d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E .

Théorème de Cantor-Bernstein et théorème de Knaster-Tarski (12'29")

Je présente une preuve express du théorème de Cantor-Bernstein qui stipule que si E et F sont deux ensembles, s'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E alors il existe une bijection entre E et F .

Applications du théorème de Cantor-Bernstein aux cardinaux infinis (24'49")

On donne les exemples les plus typiques d'ensembles équipotents (ie en bijection) à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Voilà qui va nous permettre d'observer le théorème de Cantor-Bernstein dans ses œuvres !

L'atelier des racines carrées! (10'35")

Antoine nous présente sa dernière création, un cercle à racines carrées, cubiques et même quatrième. Du fait main, avec de belles maths et de belles aquarelles !

L'énigme du singe de Fibonacci (24'57")

On simplifie le problème du singe dactylographe avec un clavier de simplement deux lettres et on cherche à trouver des expressions explicitées des probabilités d'apparition de suites de lettres. On tombe miraculeusement sur une généralisation naturelle de la suite de Fibonacci.

Epreuve du bac - une erreur persistante? (14'27")

Je présente ce qui me semble être une erreur récurrente dans les sujets du bac, sur l'exercice de probabilités. On trouve cette erreur dans un bon nombre de sujets et cette vidéo a pour but de convaincre les concepteurs qu'il faudrait changer, en conséquence, les futurs énoncés.

L'énigme du robot de Cantor (15'01")

Une énigme sur la recherche de la position d'un robot, dont la solution en étonnera plus d'un !

Au talent ou au karma ? Le retour du robot de Cantor ! (32'43")

Yan Doumerc, qui intervient avec brio sur cette chaîne comme "expert proba", m'a récemment envoyé un petit texte qui affine l'énigme du robot de Cantor présenté sur cette chaîne. Au départ, on voulait préparer une série cohérente de questions au robot afin de connaître sa position au bout d'un nombre fini de coups. Mais désormais, le test est devenu plus exigeant puisqu'il demande maintenant de construire des suites consécutives arbitrairement longues de réponses positives. Yan nous montre qu'il y a deux façons de procéder : soit déterministe, soit au hasard. Mais pas n'importe quel hasard, un hasard légèrement trafiqué. On devrait l'écrire "hazar" 😊 📺 🔴

L'enigme du robot de Cantor .

Zeta(2) - Les plus belles preuves! (38'59")

La formule qui affirme que la somme des $1/n^2$ vaut $\pi^2/6$ est bien connue de tous les mathématiciens. Après avoir motivé les troupes, on se lance dans un florilège de preuves célèbres plus jolies les unes que les autres que l'on peut retrouver (pour certaines) sur

<https://www.math.cmu.edu/~bwsulliv/ba...>

Un exercice sur les graphes et la star zeta(2)! (22'30")

Voici un exercice assez élémentaire sur la coloration des graphes qui fera curieusement intervenir la fonction zeta en 2 et donc le fameux nombre π . Il est inutile de savoir quoi que ce soit sur les graphes pour se retrouver dans un problème de dénombrement qui amène naturellement à la série de Riemann.

Nombre chromatique d'un graphe et théorème spectral (23'06")

Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimal de couleurs que l'on peut attribuer à ses sommets pour que deux sommets connectés soient de couleurs différentes. On prouve une inégalité sur le nombre chromatique d'un graphe en fonction du spectre de sa matrice d'adjacence. L'inspiration provient de la jolie épreuve 1 de l'agrégation interne de 2019.

Inégalités de Cheeger pour les graphes (30'13")

L'étude des graphes passe souvent par celle de sa matrice d'adjacence qui, comme toute matrice réelle symétrique, possède une suite décroissante de valeurs propres réelles. Nous allons voir (découvrir ?) que la robustesse du graphe, c'est-à-dire, **sa capacité à rester connexe même si on en retire des sommets, dépend de la position de la seconde valeur propres par rapport à la première.**

Devinez la caractéristique du corps! (10'06")

Un petit exercice taquin pour occuper nos méninges! Soit a_i pour i de 1 à 27 des éléments non nuls d'un corps K . On suppose que la suite b_i des sommes des a_j pour j différent de i , est une permutation des a_i . On doit montrer que cela n'est possible (et ça l'est effectivement) pour certaines caractéristiques de K .

Brillez en société! Sachez résoudre l'équation de degré 2, même si $2=0$! avec Béranger Seguin (14'39")

Posez la question à votre prof de maths préféré : "comment résoudre un trinôme ?" Et quand il vous dira "il faut prendre sa forme canonique", vous lui répondez "oui mais sans diviser par 2 parce que $2=0$ ". Et là, vous connaîtrez votre premier sentiment de victoire... et peut-être même de gloire !

Théorème de d'Alembert-Gauss, preuve intuitive par Antoine (10'41")

Une petite approche intuitive du théorème fondamental de l'algèbre, vu comme un théorème des valeurs intermédiaires en 2D....

A partir de quand les mathématiques deviennent-elles incompréhensibles? (29'43")

Voici l'extrait d'une question qu'Aegidius Rex m'a envoyée en commentaire. Je l'ai trouvé très inspirante, et cette vidéo en est une réponse. "Cher Phil. Une question d'un dimanche d'été 2026 pour vous et vos auditeurs, pour ceux qui ont quelques instants à y consacrer. Savez-vous à partir de quel moment les mathématiques deviennent incompréhensibles ? Je pourrais poser la question à ChatGPT mais je vous demande votre avis à tout hasard, si vous en avez un à ce sujet, si toutefois la question vous paraît pertinente. Il semble qu'il y ait un saut à un moment donné qui largue le public qui ne sait plus de quoi l'on parle..."

Math Woods, une encyclopédie d'exercices open source! (un tuto de Matthieu Finck) (13'52")

Matthieu Finck et Thomas Lejeune ont muri ce magnifique projet d'une encyclopédie en ligne d'exercices de mathématiques open source, entremêlant énoncés, solutions et concepts! Tout un programme. Voici un tuto pour les utilisateurs, les curieux et les concepteurs de ce site en devenir! Lien pour le site:

Un petit exercice de trigonométrie (collège?) et un joli fractal (5'35")

Un exercice que j'aurais aimé voir au collège avec une construction qui rappelle les plus beaux fractals (on dit des fractaux???)

La division de droite à gauche (du dyslexique au dix-adique) (16'05")

Une autre façon de poser sa division... et ça va vous étonner!

L'astuce de la ceinture de Dirac, clef USB et l'équation de Schrödinger par Matthieu (30'02")

En plus d'être le créateur du site Math Woods, Matthieu Finck, alias Ancient Tree, est l'auteur d'une thèse en physique intitulée "Fibré et obstructions topologiques en théorie des bandes", aux confins de la topologie et de la physique des particules. Il nous présente ici l'astuce de la ceinture de Dirac, pour introduire ensuite, la notion de groupe fondamental qui éclaire ce "tour de magie". Dans un troisième temps, il nous parle de l'équation de Schrödinger et de cette clef USB qui marche à condition qu'on la retourne...

Multiplication? Dites-le avec des fleurs! (21'08'')

Plein de goodies (fleurs-bouquets-posters...) sur ce site proposé par Jean-Jacques Juré qui propose des représentations botaniques aux opérations arithmétiques, en tenant compte de l'ordre ou de l'association au cours de l'opération. Laissez-vous séduire par la beauté du site que l'on peut partager en famille, ou avec ses élèves ! <https://claude.ai/artifact/JPfmr6AtP6HWpMDHn2yZS>