Morphismes d'anneaux. Corrigé.

• Montrer que $(A/I)/(J/I) \simeq A/J$.

On construit tout d'abord le morphisme naturel $\phi_I : A/I \to A/J$, (bien defini car $I \subset J$) par passage au quotient de $A \to A/J$ qui est surjectif ! On sait que son noyau est $\ker(\phi_I) = J/I$ et on passe au quotient.

• $A[X,Y]/(X-1) \simeq A[Y]$.

On a le morphisme surjectif $A[X,Y] \to A[Y]$, $P \mapsto P(1,Y)$, dont le noyau est $(X-1)$.

• $A[X,Y]/(X,Y) \simeq A$.

Idem, avec $P \mapsto P(0,0)$.

• $A/(a)[X] \simeq A[X]/A[X]a$.

Il faut partir l'envers ! On part du morphisme naturel $A[X] \to A/(a)[X]$ qui au polynôme P associe le polynôme dont les coefficients sont les classes modulo (a) des coefficients de P. Il est surjectif et son noyau est $A[X]a$.

• $\mathbb{Q}[X]/\mathbb{Q}[X](X^2+1) \simeq \mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}[X](X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.

Pour le premier : on construit le morphisme $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[i]$, $P \mapsto P(i)$, qui est bien sur surjectif. Son noyau est un idal principal car $\mathbb{Q}$ est un corps engendr donc par le polynôme minimal de i sur $\mathbb{Q}$ qui est bien connu : X^2+1 (il est bien annulateur et il n'y en a pas de plus petit !).
Pour le second : on construit le morphisme $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i]$, $P \mapsto P(i)$, qui est bien sur surjectif. Son noyau est, d'aprs ce qui précède $\mathbb{Z}[X] \cap \mathbb{Q}[X](X^2+1)$. On a bien sûr $\mathbb{Z}[X](X^2+1) \subset \mathbb{Z}[X] \cap \mathbb{Q}[X](X^2+1)$. Inversement, ce n'est pas facile et cela demande un lemme de Gauss sur le contenu ou un calcul pnible, en tout cas, cela utilise le fait que $\mathbb{Z}$ est factoriel. Attendre d'avoir vu cela en cours.

• Si ϕ est un morphisme injectif de A dans un anneau A', $A/I \simeq \phi(A)/\phi(I)$.

• Si ϕ est un morphisme de A dans un anneau A', $A/I + \ker\phi \simeq \phi(A)/\phi(I)$.

Partir de la composée de ϕ avec le morphisme canonique $\phi(A) \to \phi(A)/\phi(I)$. Le noyau de cette composée est $\phi^{-1}(\phi(I)) = I + \ker\phi$.

• p est un entier. $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(X^2+1)$.

$\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i] \simeq (\mathbb{Z}[X]/(X^2+1))/p(\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$. Point 5 et 6.
$(\mathbb{Z}[X]/(X^2+1))/p(\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[X]/(p, X^2+1)$. Point 1 avec $I = p\mathbb{Z}[X] \subset J = p\mathbb{Z}[X] + (X^2+1)\mathbb{Z}[X]$.
$\mathbb{Z}[X]/(p, X^2+1) \simeq (\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X])/(X^2+1)\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X]$. Point 1 avec $I = (X^2+1)\mathbb{Z}[X] \subset J = p\mathbb{Z}[X] + (X^2+1)\mathbb{Z}[X]$.
$(\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X])/(X^2+1)\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(X^2+1)$. Point 4.