Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

4 Avril 2013

Durée : 2h30

Exercice 1

Soit n un entier positif. Pour tout $0 \leq m \leq n$, on considère la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{m,n}$ des sous-espaces vectoriels de dimension m de $\mathbb{R}^n$, munie de sa topologie habituelle. On veut montrer que l'application de $\mathrm{Gr}_{m,n}$ vers $\mathrm{Gr}_{n-m,n}$ qui envoie un sous-espace F vers son orthogonal $F^\perp$, pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, est un homéomorphisme.

1. On fixe un sous-espace F_0 de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{O}_0(n)$, resp. soit $\mathrm{O}_0^*(n)$, le stabilisateur de F_0, resp. le stabilisateur de $F_0^\perp$, dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ pour l'action naturelle. Comparer les deux sous-groupes $\mathrm{O}_0(n)$ et $\mathrm{O}_0^*(n)$.
2. En déduire que l'application qui à la classe de g dans $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n)$ associe la classe de g dans $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0^*(n)$ est bien définie et continue.
3. Conclure.

Exercice 2

Soit k un corps commutatif. On considère l'assertion suivante :
Il existe trois polynômes homogènes de degré 1, P, Q, R, indépendants dans le k-espace vectoriel $k[X,Y,Z]$, tels que

$$X^2 + 2YZ = P^2 - Q^2 - R^2.$$

Cette assertion est-elle vraie

(i) Si $k = \mathbb{R}$?

(ii) Si $k = \mathbb{C}$?

(iii) Si k est un corps fini de caractéristique différente de 2 ? On demande ici de caractériser les entiers $q = |k|$ tels que l'assertion est vraie.

Problème

La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la topologie de $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ et on munit chaque partie $X \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ de la topologie induite.

On désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant positif.

Première partie

On considère dans cette partie l'action standard du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathbf{K}^n - \{0\}$:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times (\mathbf{K}^n - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{K}^n - \{0\}, \quad (P, X) \longmapsto PX.$$

1. Démontrer que cette action est transitive
2. Déterminer le stabilisateur du premier vecteur de la base canonique et démontrer qu'il est isomorphe à un produit semi-direct topologique $\mathbf{K}^{n-1} \rtimes_\varphi \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K})$ que l'on explicitera.
3. En raisonnant par récurrence sur n, démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe.
4. En adaptant le raisonnement précédent, démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ est connexe.
5. Décrire les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Deuxième partie

On considère dans cette partie l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ par conjugaison :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad (P, A) \longmapsto PAP^{-1}.$$

On désigne par $\mathcal{O}_A$ l'orbite d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ et par Z_A son stabilisateur.

1. Démontrer que $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ est connexe lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Supposons maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et désignons par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant positif.

2. Démontrer que, si Z_A contient une matrice de déterminant négatif, alors $\mathcal{O}_A$ est connexe.
3. En déduire que $\mathcal{O}_A$ est toujours connexe lorsque n est impair.
4. Démontrer que, si Z_A est contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, alors $\mathcal{O}_A$ n'est pas connexe.
   (*Indication* : on pourra construire une application continue et surjective de $\mathcal{O}_A$ sur $\{\pm 1\}$.)
5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{O}_A$:
   - est connexe si $Z_A \not\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$;
   - a exactement deux composantes connexes si $Z_A \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$.

Troisième partie

On conserve les notations de la deuxième partie et on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de polynôme caractéristique χ_M. Démontrer que $\det(\mathrm{M}) < 0$ implique que χ_M possède une racine réelle de multiplicité impaire.
2. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Z_A contient une matrice de déterminant négatif ;
   (ii) il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F', F'' soient deux sous-espaces vectoriels A-stables et F soit de dimension impaire.
3. Supposons que A soit nilpotente, de diagramme de Young Y.
   (i) Supposons qu'il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F' et F'' soient deux sous-espaces vectoriels A-stables. Comment obtenir Y à partir des tableaux de Young Y' et Y'' des restrictions de A à F' et à F'' ?
   (ii) Démontrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe si et seulement si l'une des colonnes de Y est de longueur impaire.