L3 - Math VI- Représentation des groupes finis
2012-2013

Partiel - Le 21 mars 2013 - 2h00

Avertissement. La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction et de la précision des arguments employés.

1. Produits hermitiens

Soit E un espace hermitien dont on note $(\ ,\ )$ le produit hermitien et $\|\cdot\|$ la norme.

a. Soit u et v deux vecteurs de norme un de E. Montrer que

$$\sqrt{1-|(u,v)|^2} = \|v - u(u,v)\|.$$

Nous admettrons le résultat suivant

Lemme . *Soit u, v et w trois vecteurs de norme un de E. Alors*

$$\sqrt{1-|(u,w)|^2} \leq \sqrt{1-|(u,v)|^2} + \sqrt{1-|(v,w)|^2}.$$

$$\sqrt{1-\gamma^2} \leq \sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{1-|\alpha\gamma+\beta\delta|^2},$$

ou encore

$$|\delta| - \beta \leq \sqrt{1-|\alpha\gamma+\beta\delta|^2}.$$

On peut élever au carré (pourquoi ?), ce qui donne après simplification

$$|\delta|^2 + \beta^2 - 2\beta|\delta| \leq \beta^2 + |\delta|^2 - 2\beta\left(\beta|\delta|^2 - \sqrt{(1-\beta^2)(1-|\delta|^2}\Re(\delta)\right)$$

ou encore

$$\beta|\delta|^2 - \sqrt{(1-\beta^2)(1-|\delta|^2}\Re(\delta) \leq |\delta|.$$

Si $\Re(\delta) \geq 0$, c'est facile. Sinon on utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur $\sqrt{(1-\beta^2)(1-|\delta|^2}$ et le fait que $\Re(\delta) \leq |\delta|$. Il suffit alors de montrer

$$\beta|\delta| \leq \frac{\beta^2+|\delta|^2}{2}$$

c'est-à-dire l'inégalité arithmético-géométrique. OUF ! Voilà pourquoi cela était admis.

b. Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices muni du produit hermitien $(\ ,\ )$ pour lequel la base canonique est unitaire. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, exprimer (A,B) à l'aide de la trace.

c. Montrer que si A et B sont deux matrices unitaires de taille n alors

$$\sqrt{n^2-|tr(AB)|^2} \leq \sqrt{n^2-|tr(A)|^2} + \sqrt{n^2-|tr(B)|^2}.$$

2. Matrices hermitiennes

Soit $V = \mathbb{C}^n$ et $(e_1,\ldots,e_n)$ les vecteurs de la base canonique de V. On notera les vecteurs de V comme des matrices à n lignes et 1 colonne.

a. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\bar{A} = A$, c'est-à-dire hermitienne. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

Un produit hermitien $(\cdot,\cdot)$ est dit *positif* si $(X,X) \geq 0$ pour tout $X \in V$.

b. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(1) Toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles ;

(2) Le produit hermitien de matrice A est positif.

On dira alors que A est *positive*.

c. Soit φ une forme linéaire sur V. Montrer que l'application $(\cdot,\cdot)_\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $(X,Y)_\varphi = \overline{\varphi(X)}\varphi(Y)$ est une forme hermitienne positive.

d. Soit L la matrice de φ dans la base canonique. Montrer que la matrice de $(\cdot,\cdot)_\varphi$ dans la base canonique est ${}^t\bar{L}L$.

e. Soit A une matrice hermitienne positive de rang un. Déduire de ce qui précède qu'il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $A = (\bar{z}_i z_j)$.

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$, on note $C = A \circ B$ l'élément de $M_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient (i, j) vaut $a_{ij} b_{ij}$. On note $(\cdot, \cdot)_B$ et $(\cdot, \cdot)_C$ les produits hermitiens dont B et C sont les matrices dans la base canonique.

On suppose B est hermitienne et A est hermitienne positive de rang 1. Trouver un endomorphisme σ de V tel que $(X, X)_C = (\sigma(X), \sigma(X))_B$.

f. En supposant de plus que B est positive, montrer que C est positive.

g. On suppose maintenant que A et B sont hermitiennes positives mais on ne fait plus d'hypothèse sur le rang de A. Montrer que C est hermitienne positive.
Indication. Utiliser le fait suivant $(A_1 + \cdots + A_r) \circ B = (A_1 \circ B) + \cdots + (A_r \circ B)$.

3. Groupes d'ordre p^2

Soit p un nombre premier.

a. Donner, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre p^2. On pensera à justifier que les groupes présentés comme distincts sont 2 à 2 non isomorphes.

Le but de l'exercice est de montrer qu'enlever l'hypothèse d'abélianité ne permet pas de construire d'autre groupes de cardinal p^2.

Un sous-groupe H d'un groupe G sera dit *central* si tout élément de H commute avec tout élément de G.

b. Soit G un groupe et H un sous-groupe central de G.

(1) Montrer que H est distingué dans G.

(2) On suppose que G/H est cyclique. Montrer qu'il existe $a \in G$ tel que toute classe à gauche de G/H peut s'écrire $a^k H$ pour un entier k et en déduire que G est abélien.

c. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^2.

(1) Soit $g_0 \in G$. Et soit $H_0 := \{z \in G,\ z g_0 = g_0 z\}$ le centralisateur de g_0. On considère l'application $\varphi : G/H_0 \to G$, donnée par $\varphi(\bar{g}) = g g_0 g^{-1}$. Montrer que l'application φ est bien définie et qu'elle est injective.

(2) En déduire que le cardinal d'une classe de conjugaison est une puissance de p.

(3) Pourquoi l'ensemble des classes de conjugaison forment-elles une partition de G ? Montrer qu'il existe un élément g_0 qui commute avec tout G, autre que l'élément neutre.

d. Montrer que G est abélien.

4. Une question de cours

Soit G un groupe abélien fini et g un élément de G différent de l'élément neutre. Montrer que

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0.$$