Matrices magiques et théorie des représentations

Philippe Caldero

21 mars 2019

Résumé : On illustre ici la théorie des représentations à travers la caractérisation des matrices magiques.

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $L_i(A)$, $1 \leq i \leq n$, la somme $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ de sa i-ème ligne et $C_j(A)$, $1 \leq j \leq n$, la somme $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ de sa j-ème colonne. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices magiques de taille n, c'est-à-dire, pour nous, l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $L_i(A)$ et $C_j(A)$ sont égaux, pour tout i, j à une même constante.

On remarque que $\mathcal{C}$ est stable par permutation des lignes et des colonnes.

Dire par exemple que $\mathcal{C}$ est un sous-espace stable par permutation des lignes revient à dire que $\mathcal{C}$ est une sous-représentation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ donnée par $\sigma \cdot A := P_\sigma A$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et où P_σ désigne la matrice de permutation associée à σ.

Au fait, quelle est la décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en $\mathfrak{S}_n$-irréductibles, pour cette représentation ?

On note pour cela que, pour tout i, j et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, en notant E_{ij} la matrice élémentaire associée au couple (i, j),

$$P_\sigma E_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n E_{\sigma(k)k} \right) E_{ij} = E_{\sigma(i)j}.$$

On voit donc que la représentation qui nous intéresse est une représentation par permutations, ce qui implique que son caractère $\chi(\sigma)$ est égal au nombre d'invariants de σ pour l'action définie par $\sigma \cdot (i, j) = (\sigma(i), j)$. Si on note I_σ le nombre d'invariants de σ pour l'action naturelle de σ sur $[1, n]$, il vient $\chi(\sigma) = nI_\sigma$. Or, on sait qu'une représentation dont le caractère est $\sigma \mapsto I_\sigma$ est isomorphe à la représentation $\mathbf{1} \oplus V_{\text{std}}$, où $\mathbf{1}$ est la représentation triviale et V_{std} la représentation (irréductible) standard de $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 0.1. Il est intéressant de noter, en aparté, que l'espace $\mathbb{C}^n$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_n$ par permutation des coordonnées est isomorphe à $\mathbf{1} \oplus V_{\text{std}}$. La représentation irréductible $\mathbf{1}$ correspond à la droite engendrée par le vecteur $v := (1, \cdots, 1)$ et la représentation irréductible V_{std} correspond à l'orthogonal de v pour la forme canonique (qui est bien $\mathfrak{S}_n$-invariante), c'est-à-dire l'hyperplan des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ dont la somme des coordonnées est nulle.

On déduit que la représentation cherchée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à la représentation $\mathbf{1}^{\oplus n} \oplus V_{\text{std}}^{\oplus n}$.

Il y a ici trop de multiplicités pour pouvoir reconnaître et caractériser $\mathcal{C}$. Nous allons donner sens à ces multiplicités et voir qu'elles correspondent à une représentation pour l'autre action de $\mathfrak{S}_n$.

Pour ce faire, on dote $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une structure de représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ par

$$(\sigma, \tau) \cdot A = P_\sigma A\, {}^tP_\tau.$$

Cette fois-ci, le groupe est suffisamment gros pour faire disparaître les multiplicités. C'est ce qu'assure la proposition qui suit :

Proposition 0.2. *Pour la représentation de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie plus haut, la décomposition en irréductibles est donnée par*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \otimes V_{\text{std}}) \oplus (V_{\text{std}} \otimes \mathbf{1}) \oplus (V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}).$$

Démonstration. Soit $E := \mathbb{C}^n$ l'espace de vecteurs colonnes et son dual E^* vu comme espace de vecteurs lignes. On a un isomorphisme $\varphi : E \otimes E^* \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donné par $V \otimes {}^tW = V\, {}^tW$. Effectivement, il est bien défini et linéaire puisque l'application $E \times E^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui envoie $(V, {}^tW)$ sur $V\, {}^tW$ est bilinéaire. Il est surjectif puisque $E_j\, {}^tE_i$, où E_j est le j-ième vecteur colonne canonique de $\mathbb{C}^n$, est la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et enfin, il est injectif par dimension.

De plus, φ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$-représentations, puisque

$$(\sigma, \tau) \cdot (V\, {}^tW) = (\sigma \cdot V) \otimes (\tau \cdot {}^tW) = (P_\sigma V) \otimes {}^t(P_\tau W),$$

par définition des actions sur l'espace, le dual, et le produit tensoriel. Or, $(P_\sigma V) \otimes {}^t(P_\tau W)$ est envoyé par φ sur $P_\sigma V\, {}^tW\, {}^tP_\tau = (\sigma, \tau) \cdot V\, {}^tW$.

Comme l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $E = \mathbb{C}^n$ fournit une représentation par permutation, isomorphe à $\mathbf{1} \oplus V_{\text{std}}$, qui est isomorphe à son propre dual (les caractères sont entiers donc stables par l'involution bar). Il vient que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à

$$(\mathbf{1} \oplus V_{\text{std}}) \otimes (\mathbf{1} \oplus V_{\text{std}})^* = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \otimes V_{\text{std}} \oplus V_{\text{std}} \otimes \mathbf{1} \oplus V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}.$$

Le fait de n'avoir aucune multiplicité dans la décomposition en irréductibles permet de voir qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-représentations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, plus précisément 2^4 correspondant au nombre de parties dans l'ensemble (à quatre éléments) des irréductibles de la décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il est facile d'identifier, ou disons de donner un sens, à chaque composante irréductible. La composante $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ correspond à la droite $\langle J \rangle$ engendrée par la matrice $J := (1, \cdots, 1)\, {}^t(1, \cdots, 1)$, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les composantes sont égales à 1. La composante $\mathbf{1} \otimes V_{\text{std}}$, resp. $V_{\text{std}} \otimes \mathbf{1}$, est la composante constituée des matrices A dont toutes les lignes, resp. colonnes, sont égales et telles que $L_i(A) = 0$ pour tout i, resp. $C_j(A) = 0$ pour tout j. Enfin, la composante $V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}$ est constituée des matrices dont la somme des lignes et la somme des colonnes sont toutes nulles, c'est-à-dire l'intersection des noyaux des L_i et des C_j.

Maintenant, pour z donné dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices A telles que $L_i(A) = R_j(A) = z$, pour tout i, j, est un espace affine d'espace vectoriel associé à l'intersection des noyaux des L_i et des C_j, c'est-à-dire $V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}$. Il s'agit donc de $\frac{z}{n}J + V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}$. La sous-représentation des matrices magiques est donc la sous-représentation $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \oplus V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si l'on veut construire des matrices magiques, il suffit donc de savoir construire toutes les matrices de $V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}}$. Au final [1],

$$\mathcal{C} := \{zJ + {}^t(z_1, \cdots, z_{n-1}, -z_1 - \cdots - z_{n-1})(z'_1, \cdots, z'_{n-1}, -z'_1 - \cdots - z'_{n-1}), z, z_j, z'_i \in \mathbb{C}\}.$$

Si l'on veut toutes les matrices magiques à coefficients entiers, il suffit de prendre les z_i, z'_i entiers.

1. Tu répète pas à Rached, hein ?