



UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1

L'histoire ébouriffante de l'icosaèdre qui voulait résoudre une quintique



Adeline Pedron
Marie Péronnier

Encadrées par :
Philippe Caldero

Table des matières

I	Introduction : l'isomorphisme $SO_3(\mathbb{R}) \simeq PSU_2(\mathbb{C})$	13
I.1	Etablissement de l'isomorphisme	13
I.2	Version géométrique	18
I.3	Version alternative	24
I.4	Annexes	27
I.4.1	La projection stéréographique	27
I.4.2	Système générateur de rotations de $SO_3(\mathbb{R})$	29
I.4.3	Action par homographies	33
II	Les solides platoniciens	37
II.1	Les solides dans la sphère...	37
II.1.1	Introduction : premières définitions	37
II.1.2	Présentation des solides, groupes d'isométries positives	40
II.1.3	Les solides vus dans la sphère	50
II.2	...Et en projectif	52
III	Recherche d'invariants	63
III.1	Etude des Γ -orbites sur la sphère	63
III.2	Fonctions invariantes	74
III.2.1	Présentation du problème	74
III.2.2	Construction de fonctions Γ -invariantes	79
III.3	Générateurs de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$	109
III.4	Annexes	116
III.4.1	Calcul des fonctions orbitales associées pour T , O et I	116
III.4.2	Relations entre les fonctions orbitales associées à T , O et I -Exemples de calculs	119
III.4.3	Voyage entre trois mondes	121
IV	Inversion des fonctions invariantes	127
IV.1	Cas non-icosaédral	127
IV.2	Cas icosaédral	132
IV.3	Annexe	146
IV.3.1	Expression de f_T dans $\mathbb{C}(f_{D_2})$	146
V	Résolution de l'équation de Brioschi	149
V.1	Introduction à la méthode de Newton, étude du cas cyclique	149
V.1.1	La méthode de Newton	149

V.1.2	Etude d'un exemple emblématique : le cas cyclique	151
V.2	Résolution de l'équation de Brioschi : construction de l'algorithme	156
V.2.1	Mise en route du problème	156
V.2.2	Ingrédients de l'algorithme : calculs de F et de ϕ	158
V.2.3	Etude de la convergence du modèle	162
V.2.4	Passage de Z à W'	165
V.2.5	Résolution de la résolvante de Brioschi : recherche des racines	168
V.2.6	Aboutissement : l'algorithme de la résolvante de Brioschi	173
V.3	L'algorithme dans toute sa splendeur : mise en route du programme	175

Avant-propos



Ce mémoire se base sur l'article de Jerry Shurman, *Geometry of the Quintic*, qui lui-même reprend les travaux que Félix Klein a présentés dans son article *Lectures on the Icosahedron and Equations of the Fifth Degree*, écrit en 1884; et ceux de Peter Doyle, et Curt McMullen, qui ont publié cent ans plus tard, en 1989, l'article *Solving the quintic by iteration*.

Le problème que l'on se pose est celui qui hante (ou berce, c'est selon) la communauté mathématicienne depuis des siècles : la résolution d'équations. On se place sur \mathbb{C} , et l'on cherche les solutions d'une équation de type $f(z) = w$. Considérons par exemple l'équation de référence $z^n = w$; une méthode de résolution consiste à commencer par uniformiser cette équation, c'est-à-dire grâce à une transformation, se ramener à la résolution de l'équation $z^n = 1$. Cette méthode de simplification du problème, on aimerait bien pouvoir l'appliquer à d'autres équations, plus générales. Ainsi se pose la question suivante : sous quelle(s) condition(s) peut-on « uniformiser » une équation ? Basculons vers le point de vue de la théorie de Galois : chaque équation est la traduction d'une extension de corps (dans notre exemple, elle est de degré n); donc, à chaque équation correspond un groupe de Galois. Le résultat (admis) est alors le suivant : une équation peut être uniformisée si le groupe de Galois¹ qui lui est associé est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Dans la suite, on ne considèrera donc que des groupes (finis) qui s'injectent dans le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

L'idée, à présent, est de voir ces groupes comme des groupes d'isométries (positives) de solides platoniciens. Sauf que, quand on étudie les groupes d'isométries de solides platoniciens, l'habitude nous invite à les considérer comme des sous-groupes finis du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ plutôt que des sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Notre but, dès lors, est de trouver un lien entre $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, et le groupe projectif $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, afin de ramener les solides platoniciens, et leur groupe, dans le contexte qui nous intéresse.

Ce lien va se baser sur une notion bien connue de tous : la projection stéréographique, et on va voir qu'elle se traduit par l'isomorphisme de groupes voulu.

Projection stéréographique et isomorphisme $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$

La projection stéréographique permet d'établir un homéomorphisme entre la sphère \mathbb{S}^2 et la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Pour établir l'isomorphisme $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ qui nous intéresse, on peut utiliser une méthode très classique, qui n'utilise pas la projection stéréographique, et qui fait appel à la théorie des groupes de Lie, en étudiant l'action naturelle par conjugaison du groupe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ sur son algèbre de Lie, $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. Un autre point de vue intéressant est de se rendre compte que la géométrie permet de construire cet isomorphisme de façon plus concrète. En effet, le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ agit naturellement sur la sphère \mathbb{S}^2 , tandis que le groupe $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ agit naturellement, par homographies, sur la droite complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

1. A ne pas confondre avec le groupe de Galois, qui est irréductible par le théorème de Gosciny-Uderzo

La projection stéréographique, qui exhibe un homéomorphisme entre \mathbb{S}^2 et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, permet une action par transport de structures de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et on montre que cette action s'identifie à celle de $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ sur la droite complexe.

A noter que ces deux méthodes exhibent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Maintenant que le lien entre groupe de rotations $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et le groupe projectif est établi, on va se pencher sur l'étude des solides platoniciens.

Les solides platoniciens dans la sphère, et dans le projectif

Dans cette partie, on commence par réaliser les groupes d'isométries positives des solides platoniciens comme des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Ensuite, pour pouvoir utiliser l'isomorphisme établi précédemment, on inscrit les solides platoniciens dans la sphère \mathbb{S}^2 en normalisant leurs sommets, arêtes, et faces. Grâce à l'isomorphisme entre $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$, on peut alors transcrire chacun des solides dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et exprimer leur groupe d'isométries positives dans $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

On arrive dans le contexte souhaité pour résoudre des équations.

Construction de fonctions & Γ -invariance

Nous sommes maintenant dans le monde du projectif. On rappelle que l'on cherche à résoudre des équations du type $f(z) = w$. Chaque équation correspond, en théorie de Galois, à une extension de corps, et donc à un groupe de Galois, que l'on a réalisé comme le groupe d'isométries d'un solide platonicien. Reste maintenant à construire explicitement ces fonctions; autrement dit, on veut, à chaque groupe d'isométries positives Γ d'un solide platonicien, lui associer une fonction.

Le schéma général est le suivant :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(z) \\ \Big|_{|\Gamma|} \\ \mathbb{C}(z)^\Gamma \end{array}$$

Le corps $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ étant par définition le corps des Γ -invariants, notre problème, dès lors, est de construire des fonctions de $\mathbb{C}(z)$, donc rationnelles, qui sont Γ -invariantes, pour Γ groupe fixé.

Commençons par étudier les orbites de l'action du groupe Γ sur les points du solide platonicien correspondant, que l'on a inscrit dans la sphère. On comprend facilement que les points qui appartiennent à un axe de rotation d'un élément de Γ sont laissés fixes par l'action. Pour ces points, le stabilisateur est non trivial; leur orbite est donc de cardinal strictement inférieur au cardinal du groupe Γ ; on parle alors d'orbites *dégénérées*. Quant aux autres points quelconques de la sphère, leur orbite est dite *non dégénérée*, puisque de même cardinal que le groupe. Un théorème que l'on montre alors est que l'action de $\Gamma \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère \mathbb{S}^2 possède au plus trois orbites dégénérées; ces trois orbites correspondent, pour les solides, respectivement à l'ensemble de ses sommets, ses milieux de faces, et ses milieux d'arêtes.

C'est sur ces orbites dégénérées, vues dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, que l'on restreint notre étude. Pourquoi? Parce que l'on comprend bien que la notion de Γ -invariance ne peut apparaître qu'avec de telles orbites, où chaque point est fixe par l'action du groupe Γ .

Pour commencer, on aimerait être capable d'affubler une étiquette à chacune de ces orbites dégénérées, dans le sens : à partir des points d'une orbite donnée, construire une fonction de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui permette de caractériser cette orbite en question.

Avant d'aller plus loin, rappelons que l'on travaille dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; on se rend alors rapidement compte que le point ∞ pose problème : comment trouver une fonction que l'on puisse évaluer en l'infini ? Pour contourner le problème, on relève l'étude dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme suit : à un couple (x, y) de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on lui associe $\frac{x}{y}$ si $y \neq 0$, et ∞ si $y = 0$. Inversement, à $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on associe le couple $(z, 1)$ de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On relève également le groupe Γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ à $\text{SL}_2(\mathbb{C})^2$; on note Γ' le groupe Γ relevé.

Suivant ce principe de relèvement, à f fonction rationnelle invariante va correspondre un couple de polynômes homogènes (G, H) de $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, uniques à multiplication par un scalaire près, tels que $f(z) := f(\frac{Z_1}{Z_2}) = \frac{G(Z_1, Z_2)}{H(Z_1, Z_2)}$, et tels que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{(G, H)} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

Ainsi, construire f dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est construire les polynômes G et H dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$. Comment procéder ? On rappelle que les fonctions doivent être construites pour caractériser des orbites de points dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, après relèvement.

L'idée se résume en la correspondance suivante entre orbite de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (donc des droites) et fonction associée :

$$\begin{aligned} \cup_i [\lambda_i : \mu_i] =: \cup_i D_i & \rightarrow P = \prod_i (\mu_i Z_1 - \lambda_i Z_2) \\ \cup_i D'_i = \cup_i [\mu_i : -\lambda_i] & \leftarrow P = \prod_{i=1}^n (\lambda'_i Z_1 + \mu'_i Z_2) \end{aligned}$$

Tout cela constitue l'idée de base dans notre construction de fonctions. On rappelle que ce que l'on veut, c'est associer à chaque groupe Γ une fonction invariante f , rationnelle, qui traduise l'extension de Galois associée à Γ en termes d'équations. La fonction f vérifie alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $f \circ \gamma = f$; en notant $f = \frac{G}{H}$, on se rend compte que cette égalité ne revient pas à résoudre $G \circ \gamma' = G$, et $H \circ \gamma' = H$, pour $\gamma \in \Gamma'$; en effet, il suffit que G et H vérifient $G \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} G$, et $H \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} H$, pour un certain $\lambda_{\gamma'}$ dépendant de γ' . Nous verrons également que c'est une condition nécessaire, c'est-à-dire que la construction des fonctions invariantes se fait à partir de telles fonctions. Ainsi apparaissent les notions de fonctions *semi-invariantes*, et de *caractères* ; et l'on voit alors que la construction de fonctions invariantes passe d'abord par l'étude de fonctions G et H semi-invariantes.

Comme l'étude porte sur les orbites de points dégénérées, on fixe dès lors les conventions suivantes : pour tout groupe Γ considéré, F_1 désignera la forme orbitale semi-invariante associée à l'orbite dégénérée des sommets du solide platonicien considéré ; F_2 désignera la forme orbitale semi-invariante associée à l'orbite dégénérée des centres des faces ; F_3 désignera la forme orbitale semi-invariante associée à l'orbite dégénérée des milieux d'arêtes.

2. On rappelle que l'on avait *a priori* $\Gamma \subset \text{PSU}_2(\mathbb{C})$; mais comme $\text{PSU}_2(\mathbb{C}) \subset \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, le groupe Γ est désormais considéré comme un sous-groupe fini de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Pour chaque groupe Γ fixé, et donc pour chaque solide platonicien, les polynômes G et H sont des produits des fonctions F_1 , F_2 et F_3 .

Cependant, pour récupérer une fonction invariante, des fonctions semi-invariantes ne suffisent pas car, si les fonctions homogènes associées à f n'ont pas le même caractère, le quotient de ces deux fonctions n'est pas invariant. Pour résoudre ce problème, on montre qu'il suffit de considérer des fonctions dont les zéros sont des orbites non dégénérées, ou des orbites dégénérées avec des multiplicités bien choisies ; on parle alors de *fonctions pleines orbitales*. Pour Γ fixé, une fonction f_Γ est alors Γ -invariante si et seulement si elle s'écrit comme quotient de fonctions pleines orbitales ; plus précisément, la fonction invariante que l'on construit à partir des fonctions pleines orbitales est de la forme $\frac{F_1^{n_1}}{F_2^{n_2}}$, où F_1 , F_2 ont été définies précédemment, et $n_1 = \frac{|\Gamma|}{\deg(F_1)}$, $n_2 = \frac{|\Gamma|}{\deg(F_2)}$. Les puissances n_1 et n_2 permettent de considérer des fonctions pleines orbitales, donc de même degré = $|\Gamma|$, et donc au quotient de ces fonctions d'être homogène, de degré 0, et surtout, Γ' -invariante.

Pour résumer, on considère les groupes d'isométries du tétraèdre, resp. octaèdre, resp. icosaèdre ; on calcule les fonctions orbitales associées : $F_{1,T}$, $F_{2,T}$, $F_{3,T}$, resp. $F_{1,O}$, $F_{2,O}$, $F_{3,O}$, resp. $F_{1,I}$, $F_{2,I}$, $F_{3,I}$. On calcule $\frac{F_1^{n_1}}{F_2^{n_2}}$ pour chacun des solides platoniciens ; cela nous donne une fonction Γ' -invariante. On vérifie que l'on peut bien passer au quotient pour enfin obtenir une fonction Γ -invariante comme désiré.

Ces fonctions appartiennent à $\mathbb{C}(z)^\Gamma$. Par le théorème de Lüroth, on sait qu'un tel corps est engendré par un élément. L'existence est assurée. Une question qui se pose alors naturellement est : a-t-on l'unicité ? On montre que le fait que les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ s'identifient à $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, et que ce groupe agit façon 3-simplement transitive sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, assurent l'existence d'un unique générateur du corps $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ qui vaut 0 sur les centres de faces du solide platonicien, ∞ sur ses sommets, et 1 sur ses milieux d'arêtes.

Ainsi, à partir des fonctions invariantes construites grâce au procédé décrit précédemment, on construit pour chaque solide platonicien les uniques fonctions invariantes génératrices des corps $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ correspondantes, valant 0, resp. ∞ , resp. 1 sur les centres de faces du solide, resp. les sommets, resp. les milieux d'arêtes. On appelle ces fonctions f_T , resp. f_O , resp. f_I , pour le tétraèdre, resp. l'octaèdre, resp. l'icosaèdre.

Le travail de résolutions d'équations peut alors débiter.

Résolution d'équations

On commence par le cas non icosaédral : on cherche à résoudre l'équation $f_O(z) = w$, où f_O est la fonction génératrice de $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_O}$, associée à l'octaèdre. Il s'agit d'une équation de degré $|\text{Iso}^+(O)| = |\mathfrak{S}_4| = 24$; pas terrible...Mais, le groupe \mathfrak{S}_4 possède des sous-groupes distingués ; on montre en effet que l'on a $C_2 \triangleleft D_2 \triangleleft \Gamma_T \triangleleft \Gamma_O$. En théorie des corps, cela se traduit par la suite d'extensions (normales, puisque les groupes sont distingués) :

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{C}(z) \\
 | \\
 2 \\
 | \\
 \mathbb{C}(f_{C_2}) \\
 | \\
 2 \\
 | \\
 \mathbb{C}(f_{D_2}) \\
 | \\
 3 \\
 | \\
 \mathbb{C}(f_T) \\
 | \\
 2 \\
 | \\
 \mathbb{C}(f_O)
 \end{array}$$

On a donc divisé le problème en une série de résolutions d'équations de degré 2 et 3 ; c'est gagné. La résolution de l'équation $f_O(z) = w$ se résume de la manière suivante :

$$f_O(z) \xrightarrow{(1)} f_T(z) \xrightarrow{(2)} f_{D_2}(z) \xrightarrow{(3)} f_{C_2}(z) \xrightarrow{(4)} z$$

- (1) : Trouver w' , une racine de P_{f_T/f_O} qui s'exprime en fonction de w , ainsi $f_T(z) = w'$;
- (2) : Trouver w'' , une racine de $P_{f_{D_2}/f_T}$ qui s'exprime en fonction de w' , et ainsi $f_{D_2}(z) = w''$;
- (3) : Trouver w''' , une racine de $P_{f_{C_2}/f_{D_2}}$ qui s'exprime en fonction de w'' , et ainsi $f_{C_2}(z) = w'''$;
- (4) : Trouver z , une racine de $P_{z/f_{C_2}}$ qui s'exprime en fonction de w''' .

Le cas icosaédral est plus délicat : l'équation à résoudre, $f_I(z) = w$, est de degré $|\text{Iso}^+(I)| = |\mathfrak{A}_5| = 60$, et \mathfrak{A}_5 est simple, donc ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial...Heureusement pour nous, on va pouvoir s'en sortir quand même : le fait que l'icosaèdre possède 5 tétraèdres inscrits permet de montrer que le groupe d'isométries d'un de ces tétraèdres, T' (qui correspond au tétraèdre T fixé dans \mathbb{R}^3 mais normalisé, et pivoté de sorte à l'inscrire dans l'icosaèdre), est en fait le stabilisateur de ce tétraèdre dans Γ_I ; cela permet de scinder l'extension en deux :

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{C}(z) \\
 | \\
 12 \\
 | \\
 \mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}} = \mathbb{C}(f_{T'}) \\
 | \\
 5 \\
 | \\
 \mathbb{C}(z)^{\Gamma_I} = \mathbb{C}(f_I)
 \end{array}$$

L'extension de degré 12 se ramène au cas non icosaédral, que l'on a résolu ; tout le problème se concentre alors sur l'extension de degré 5. Après calcul du polynôme minimal d'un générateur du corps $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$ sur $\mathbb{C}(f_I)$, on montre que l'équation associée à cette extension est celle que l'on nomme la *résolvante de Brioschi* :

$$R(X) = X^5 - 10F_{1,I}X^3 + 45F_{1,I}^2X - F_{3,I}$$

La résolution de cette extension comporte plusieurs étapes de changements de variables, que l'on résume en la chaîne suivante :

$$f_I \xrightarrow{(1)} W' \xrightarrow{(2)} \tilde{s} \xrightarrow{(3)} \tilde{r} \xrightarrow{(4)} f_{T'}$$

(1) : On pose $W' = \frac{1}{1728(1-f_I)}$;

(2) : La résultante de Brioschi s'écrit alors $T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2$; on en détermine ensuite une racine, que l'on note \tilde{s} .

(3) : On pose $\tilde{r} = \frac{\tilde{s}^2}{W'} = \frac{\tilde{s}}{F_{1,I}}$; plus facile à manipuler, car contrairement à \tilde{s} , \tilde{r} est un générateur de $\mathbb{C}(f_{T'})$.

(4) : Comme \tilde{r} et $f_{T'}$ sont générateurs du même corps, il existe une homographie qui permet de passer de l'un à l'autre.

Cependant, à ce stade, il manque un important maillon dans cette chaîne de résolution : l'étape (2), où il nous faut déterminer une racine de la résultante de Brioschi.

Résolution de l'équation de Brioschi

La méthode de Newton : principe

On veut résoudre $R(z) = 0$, avec R la résultante de Brioschi. Cette équation de degré 5 ne saurait bien sûr se résoudre par radicaux. On va alors s'appuyer sur la méthode de Newton, dont voici le principe général : on cherche à localiser les racines d'une fonction f . Pour ce faire, on choisit un point t_0 "assez proche" de la racine cherchée, à condition que l'image de ce point par la dérivée de f ne soit pas nulle ; on trace ensuite la tangente à la courbe $y = f(x)$ en t_0 . Le point t_1 d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses vérifie alors $t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)}$. Et on recommence le processus.

On voit donc apparaître une fonction récursive ; la fonction $F(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$. Recommencer, cela signifie appliquer plusieurs fois la fonction récursive F ; on verra donc dans la suite apparaître des fonctions de type F^k , $k \in \mathbb{N}$.

Pour résumer, la méthode de Newton consiste à voir z comme une limite de la fonction récursive évaluée en un point l_0 qui approche z .

Application à la résolution de l'équation de Brioschi

En se servant de ce principe : on part d'une famille d'équations indexées par W , de la forme : $f(Z) = W$ (w et z ont été relevés en des indéterminées W et Z) ; cette famille d'équations, on l'a rendue rigide, c'est-à-dire que l'on a ramené l'étude de cette famille à l'étude d'une seule fonction itérative, uniformisée, modulo changement de variable homographique³, afin d'obtenir une rigidité dans la façon d'obtenir une racine.

En suivant cette idée, on parvient à construire étape par étape un algorithme de résolution de l'équation de Brioschi ; on termine par la mise en oeuvre réelle de l'algorithme, en le faisant tourner grâce au logiciel *SAGE*.

3. Comme le groupe considéré est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, le théorème énoncé au tout début s'applique ; on peut donc bien uniformiser l'équation.

AVATARS

Ayant effectué ce travail à deux, il était nécessaire de créer un signe distinctif en début de chaque partie, afin que chacune des parties se voie attribuer clairement une auteure ; aussi nous sommes-nous attribués les avatars suivants :



: Parties rédigées par Adeline Pedron.



: Parties rédigées par Marie Péronnier.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Philippe Caldero, qui nous a permis de réaliser ce projet, et de voyager dans la beauté des mathématiques avec sérénité, amusement, et passion.

Un grand merci également à Amaury Thuillier, pour sa lecture attentive, à l'affût de toutes les imprécisions et erreurs qui se cachaient dans ces pages...

- *Oh!!*
- *Quoi, t'as trouvé quelque chose ?*
- *Non rien, je m'entraîne pour quand je trouverai un truc...*

Fouillologue, "RRRrrrr!!!", *Alain Chabat*

Chapitre I

Introduction : l'isomorphisme

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$$



I.1 Etablissement de l'isomorphisme

La projection stéréographique de la sphère réelle sur le plan complexe est une notion incontournable en géométrie et en algèbre. Elle nous permet d'établir l'homéomorphisme

$$\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

On peut voir cet homéomorphisme comme une application de la sphère privée du pôle Nord sur le plan réel, que l'on identifie à la droite complexe \mathbb{C} ; on prolonge ensuite cette application par continuité en envoyant le pôle Nord N sur l'infini.

L'établissement et la description détaillée de la projection stéréographique est faite en annexe I.4.1.

Cet homéomorphisme a un pendant algébrique, dans le sens où il se traduit par un isomorphisme de groupes, que nous allons exploiter dans la suite.

Ce qui va suivre requiert des notions de groupes et d'algèbres de Lie; une excellente source¹ pour revoir, ou découvrir ces notions, est le livre [1].

Proposition I.1.1. *On a l'isomorphisme :*

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}).$$

Démonstration. On considère le groupe de Lie $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$; il agit naturellement par conjugaison sur son algèbre de Lie :

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \{H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); H^* = -H, \mathrm{tr}(H) = 0\}$$

1. Que les lecteurs ne croient pas que ceci est une tentative d'amadouement du jury...

On remarque que, comme pour tout $U \in SU_2(\mathbb{C})$, $U^{-1} = U^*$, l'action se fait également par congruence. On a donc le morphisme induit par l'action :

$$\begin{aligned} \Phi : SU_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})) \\ U &\longmapsto (\phi_U : H \mapsto UHU^*) \end{aligned}$$

Tout d'abord, cela définit bien une action, puisque, pour $U \in SU_2(\mathbb{C})$, et $H \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$: $(UHU^*)^* = UH^*U^* = -UHU^*$, et $\text{tr}(UHU^*) = \text{tr}(H) = 0 \Rightarrow UHU^* \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

Etudions la dimension de cette algèbre de Lie. Prenons $M \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$; $M := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.
En écrivant les égalités

$$\begin{aligned} M^* &= -M \\ \text{tr}(M) &= 0, \end{aligned}$$

on en déduit que α est imaginaire pur, que $\delta = \bar{\alpha}$, et que $\gamma = -\bar{\beta}$.
Autrement dit, la matrice M peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} ia & -b + ic \\ b + ic & -ia \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la dimension de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ est égale à 3, et on remarque au passage que c'est une dimension réelle, contrairement à ce que l'on pouvait croire.

De plus, puisque $\det(\phi_U(H)) = \det(H)$, on peut dire que $\phi(SU_2(\mathbb{C}))$ est contenu dans $O(\det)$, le groupe d'isotropie de la forme quadratique \det .

Quel est le rang de cette forme quadratique ? Pour le savoir, prenons H dans $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$\det(H) = \det \begin{pmatrix} ia & -b + ic \\ b + ic & -ia \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2.$$

On voit donc que le déterminant est une forme quadratique non dégénérée, et de rang (maximal) 3. Ainsi, dans une base orthonormée de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ pour la forme quadratique \det , le groupe $O(\det)$ s'identifie à $O_3(\mathbb{R})$.

On en déduit que :

$$\Phi : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow O_3(\mathbb{R}).$$

Or, $SU_2(\mathbb{C})$ est connexe. Donc son image par Φ est contenue dans une composante connexe de $O_3(\mathbb{R})$ qui contient l'identité : c'est $SO_3(\mathbb{R})$.

Etudions maintenant le noyau de Φ . On a par définition :

$$\ker(\Phi) = \{U \in SU_2(\mathbb{C}); \forall H \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) : UHU^* = H\}.$$

Prenons $U := \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \ker(\Phi)$, avec a, b complexes vérifiant $\det(U) = 1$, i. e. $|a|^2 + |b|^2 = 1$;

et prenons $H := \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ (avec $\alpha \in i\mathbb{R}$, mais peu importe, pour les calculs qui suivront, on ne s'en sert pas).

L'égalité $UHU^* = H$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Comme $U \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$, alors on a $U^* = U^{-1}$, et donc $(U^*)^{-1} = U$. L'égalité précédente est alors équivalente à : $UH = HU$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

En développant le calcul matriciel, on tombe sur le système d'équations suivant (les inconnues étant les coefficients de la matrice U) :

$$\begin{cases} a\alpha - \bar{b}\beta = a\alpha - b\bar{\beta} & (1) \\ b\alpha + \bar{a}\beta = a\beta + b\bar{\alpha} & (2) \\ -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} = -\bar{b}\alpha - \bar{a}\bar{\beta} & (3) \\ -b\bar{\beta} + \bar{a}\bar{\alpha} = -\bar{b}\beta + \bar{a}\bar{\alpha} & (4) \end{cases}$$

L'égalité (1) nous donne :

$$\bar{b}\beta = b\bar{\beta} = \overline{b\beta},$$

Autrement dit, $\bar{b}\beta \in \mathbb{R}$. Et une info de gagnée !

On va poursuivre le raisonnement pour montrer que b ne peut être que nul. On rappelle que les inconnues de ce système d'équations sont a et b , et que ces égalités doivent être valables pour tous α et β .

Ecrivons $b := u + iv$, et $\beta := w + it$. On a alors :

$$\bar{b}\beta = (u - iv)(w + it) = uw + vt + i(ut - vw).$$

Le fait que $\bar{b}\beta \in \mathbb{R}$ nous donne :

$$\forall w, t; ut - vw = 0$$

Cette égalité devant être valable pour tous w, t , on en déduit alors que $u = v = 0$ (en prenant par exemple dans l'égalité d'abord $w = t$, puis $w = -t$), c'est-à-dire :

$$b = 0$$

Passons à a . L'égalité (2) nous donne :

$$\bar{a}\beta = a\beta,$$

Autrement dit, pour $\beta \neq 0$, $\bar{a} = a \Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

Pour conclure, rappelons-nous que le déterminant de U doit être égal à 1, c'est-à-dire : $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Comme $b = 0$, on obtient alors :

$$|a|^2 = 1, a \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que

$$a = \pm 1$$

Finalement, on a montré que

$$\ker(\Phi) = \{\pm \mathrm{Id}\}.$$

On en déduit une injection :

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} =: \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

Reste à montrer la surjectivité. Pour ce faire, on va utiliser le théorème d'inversion locale. On considère la différentielle de Φ en l'identité :

$$\begin{aligned} d\Phi_e : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathfrak{so}(\det) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \\ U &\longmapsto (H \mapsto UH + HU^*) \end{aligned}$$

On sait déjà que $\dim(\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})) = 3 = \dim(\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}))$.

Montrons de plus que le noyau est trivial, ce qui montrera que $d\Phi_e$ est injective, et donc bijective par égalité des dimensions.

Même raisonnement que précédemment, prenons $U := \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \ker(d\Phi_e)$; a, b complexes, et

$H := \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ quelconque, avec α, β complexes également.

On a alors $UH^* + HU^* = 0$, c'est-à-dire $UH^* = -HU^*$.

La matrice U étant dans $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, elle vérifie : $U^* = -U$; l'équation précédente devient alors :

$$UH = HU$$

C'est la même équation que précédemment, sauf que U n'est plus dans $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, mais dans $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. Par le même raisonnement que celui qui précède, on trouve

$$b = 0.$$

La matrice U est alors une homothétie : $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Mais, comme $U \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, U doit vérifier l'égalité : $U + U^* = 0$.

On en déduit alors que

$$a = 0$$

Ainsi, U est la matrice nulle, et le noyau de $d\Phi_e$ est trivial, comme désiré.

Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage V de l'identité tel que Φ soit un difféomorphisme de V dans W , voisinage ouvert de $\Phi(\text{Id})$.

Cela signifie que $\text{Im}(\Phi)$ contient un ouvert. Or, $\text{Im}(\Phi)$ est un sous-groupe de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$; il est donc aussi fermé. C'est donc une composante connexe de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ contenant l'identité; autrement dit : $\text{Im}(\Phi) = \text{SO}_3(\mathbb{R})$, et cela termine la preuve.

◇

Remarque I.1.2. Au cours de cette preuve, nous avons détaillé le calcul du noyau de $\Phi : U \mapsto (\phi_U : H \mapsto UHU^*)$; ainsi que le noyau de la différentielle $d\Phi_e : U \mapsto (H \mapsto UH + HU^*)$. Les calculs, bien que peu agréables, n'en restent pas pour le moins faisables, car il s'agit de manipuler des matrices 2×2 ; cependant, ces résultats ont été montrés dans le cas général, en dimension quelconque; pour la découvrir, ou la relire pour le plaisir, nous vous invitons à vous référer à la partie correspondante dans [1] (p.178, prop B.2.2.).



I.2 Version géométrique

L'isomorphisme exceptionnel établi dans la partie précédente possède une version géométrique. Nous allons voir que cet isomorphisme est l'analogie dans le monde des groupes de la projection stéréographique.

En effet, nous avons un isomorphisme entre deux groupes,

$$PSU_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} SO_3(\mathbb{R})$$

une bijection entre deux ensembles :

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

et deux actions naturelles :

$$SO_3(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^2 \text{ et } PSU_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

La seconde action provient de l'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ par homographies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (voir l'annexe I.4.3).

Nous allons donc montrer que Φ et π sont compatibles avec les actions naturelles, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} PSU_2(\mathbb{C}) & \times & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \Phi \times \pi & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ SO_3(\mathbb{R}) & \times & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Idée. La bijection de \mathbb{S}^2 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par la projection stéréographique, conjointement à l'action naturelle de $SO_3(\mathbb{R})$ sur \mathbb{S}^2 , fournit une action, par transport de structure, de $SO_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

En utilisant un système de générateurs de $SO_3(\mathbb{R})$, nous allons voir que

1. $SO_3(\mathbb{R})$ agit fidèlement par homographies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;
2. Cette action coïncide avec celle de $PSU_2(\mathbb{C}) \subset PGL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;
3. Le morphisme de $SO_3(\mathbb{R})$ dans $PSU_2(\mathbb{C})$ ainsi défini coïncide avec l'isomorphisme Φ vu précédemment (on développera ce point dans la partie I.3).

Pour cela, considérons le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : SO_3(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Bij}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \\ \rho & \mapsto & \pi \circ \rho \circ \pi^{-1} \end{array}$$

où $\text{Bij}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Le théorème qui suit nous permettra d'établir que Ψ est un isomorphisme de $SO_3(\mathbb{R})$ dans $PSU_2(\mathbb{C})$.

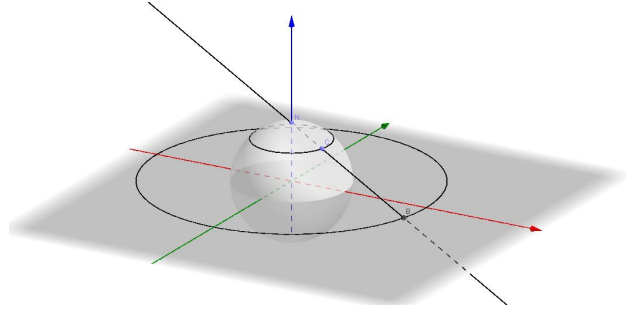
Théorème I.2.1. *Soit $\rho_{p,\alpha} \in SO_3(\mathbb{R})$, $p := (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{S}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle.*

On définit $f_{p,\alpha} := \Psi(\rho_{p,\alpha})$, et on a :

$$f_{p,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + ip_3 \sin \frac{\alpha}{2} & -p_2 \sin \frac{\alpha}{2} + ip_1 \sin \frac{\alpha}{2} \\ p_2 \sin \frac{\alpha}{2} + ip_1 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} - ip_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

Démonstration. Cette démonstration comporte 4 étapes : on établit la formule pour un point, puis par rotation et composée de transformations, on arrive à nos fins.

- 1^{ère} étape : On prend $p = N(= (0, 0, 1))$.



On remarque qu'un cercle de \mathbb{S}^2 parallèle au plan complexe est envoyé sur un cercle centré en O du plan complexe par la projection stéréographique. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\rho_{N,\alpha}} & \mathbb{S}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f_{N,\alpha}} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

Ainsi, $f_{N,\alpha}$ est la rotation de centre O et d'angle α dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$:

$$f_{N,\alpha} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

- 2^e étape : On se place dans le cas $p = (1, 0, 0)$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On a : } \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} (0, 0, 1) \mapsto (0, -1, 0) \\ (0, 1, 0) \mapsto (0, 0, 1) \\ (0, 0, -1) \mapsto (0, 1, 0) \end{cases}$$

Par correspondance, on a :

$$f_{1,\frac{\pi}{2}} : \begin{cases} +\infty \mapsto -i \\ i \mapsto +\infty \\ 0 \mapsto i \end{cases}$$

Mais, cela est loin de suffire pour déterminer l'expression complète de $f_{1,\frac{\pi}{2}}$. Dans ce cas, pas le choix : on effectue les calculs à la main.

Comme, de même que précédemment, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}} & \mathbb{S}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

On a la formule : $f_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} = \pi \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} \circ \pi^{-1}$.

Soit alors $z := z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$. Par les formules établies en I.4.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
f_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} &= \pi \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} \circ \pi^{-1}(z_1, z_2) \\
&= \pi \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2z_1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}, \frac{2z_2}{z_1^2 + z_2^2 + 1}, \frac{z_1^2 + z_2^2 - 1}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \right) \\
&= \pi \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z_1}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \\ \frac{2z_2}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \\ \frac{z_1^2 + z_2^2 - 1}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \end{pmatrix} \\
&= \pi \begin{pmatrix} \frac{2z_1}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \\ \frac{z_1^2 + z_2^2 - 1}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \\ -\frac{2z_2}{z_1^2 + z_2^2 + 1} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{2z_1}{z_1^2 + z_2^2 + 1 - 2z_2}, \frac{-z_1^2 - z_2^2 + 1}{z_1^2 + z_2^2 + 1 - 2z_2} \right)
\end{aligned}$$

En travaillant un peu cette expression, on voit que $f_{1,\frac{\pi}{2}}$ peut s'écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f_{1,\frac{\pi}{2}}.z = -i \frac{z+i}{z-i}$$

On note au passage que les points $+\infty$, i et 0 sont envoyés sur les images annoncées précédemment.

Il faut maintenant montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}} & \mathbb{S}^2 \\
\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f_{1,\frac{\pi}{2}}} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})
\end{array}$$

En d'autres termes, montrer que $f_{1,\frac{\pi}{2}} \circ \pi = \pi \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$. On rappelle alors que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{D'une part, } \pi \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \pi \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{x - iz}{1 - y}.
\end{aligned}$$

2. Il suffit de développer cette expression, en écrivant $z = z_1 + iz_2$, pour retomber sur l'expression qui précède.

$$\begin{aligned}
\text{D'autre part, } f_{1, \frac{\pi}{2}} \circ \pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \Psi \left(\frac{x+iy}{1-z} \right) \\
&= -i \frac{\frac{x+iy}{1-z} + i}{\frac{x+iy}{1-z} - i} \\
&= \frac{(1+y-z-ix)(x-i(y+z-1))}{x^2+(y+z-1)^2} \\
&= \frac{2x-2xz-2iz+2iz^2}{2-2y-2z+2yz} \\
&= \frac{x-xz}{1-y-z+yz} + i \frac{z^2-z}{1-y-z+yz} \\
&= \frac{x-iz}{1-y}
\end{aligned}$$

On a alors démontré que $f_{1, \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

• **3^e étape :** On démontre la formule pour $f_{i,\alpha}$.

Cette étape est une compilation de l'étape 1 et 2 car on a la relation suivante (voir le lemme I.4.1) :

$$\rho_{(0,1,0),\alpha} = \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}^{-1} \circ \rho_{(0,0,1),\alpha} \circ \rho_{(1,0,0),\frac{\pi}{2}}.$$

Puisque nous avons la relation $f = \pi\rho\pi^{-1}$, nous obtenons :

$$f_{i,\alpha} = f_{1,\frac{\pi}{2}}^{-1} \circ f_{N,\alpha} \circ f_{1,\frac{\pi}{2}}.$$

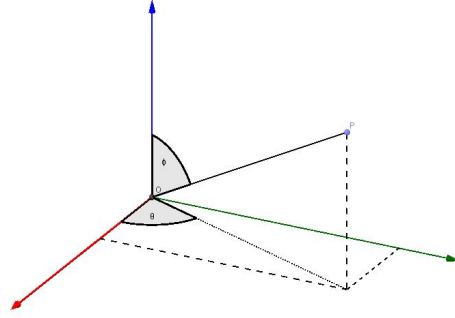
On calcule :

$$\begin{aligned}
f_{1,\frac{\pi}{2}}^{-1} \circ f_{N,\alpha} \circ f_{1,\frac{\pi}{2}} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} & -\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i} \\ \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i} & \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

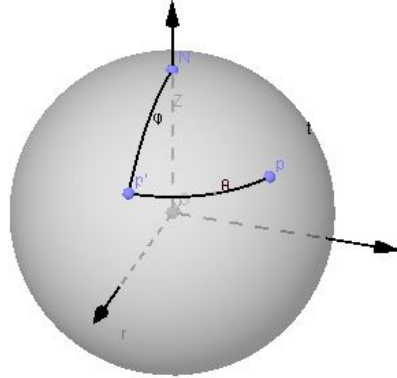
On vient ainsi de démontrer la formule pour $p = (0, 1, 0)$ et α quelconque.

- 4^e étape : On travaille maintenant avec les coordonnées sphériques, $p = (p_1, p_2, p_3)$, avec

$$p_1 = \sin \phi \cos \theta, \quad p_2 = \sin \phi \sin \theta, \quad p_3 = \cos \phi.$$



Maintenant, on applique $\rho_{(0,1,0),\phi}$ et $\rho_{(0,0,1),\theta}$ à N afin de l'envoyer sur p.



De la relation géométrique (voir encore une fois le lemme I.4.1) :

$$\rho_{p,\alpha} = \rho_{(0,0,1),\theta} \circ \rho_{(0,1,0),\phi} \circ \rho_{(0,0,1),\alpha} \circ \rho_{(0,1,0),\varphi}^{-1} \circ \rho_{(0,0,1),\theta}^{-1},$$

on en déduit :

$$f_{p,\alpha} = f_{N,\theta} \circ f_{i,\varphi} \circ f_{N,\alpha} \circ f_{i,\varphi}^{-1} \circ f_{N,\theta}^{-1}.$$

On se lance dans le dernier calcul de cette partie qui achèvera cette preuve :

$$f_{p,\alpha} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} & e^{i\theta} \cos \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} - e^{i\theta} \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \\ e^{i\theta} \cos \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} - e^{i\theta} \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} & e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1+\cos \varphi}{2} \right) + e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1-\cos \varphi}{2} \right) & \frac{1}{2} (e^{i\theta} e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin \varphi - e^{i\theta} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin \varphi) \\ \frac{1}{2} (e^{-i\theta} e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin \varphi - e^{-i\theta} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin \varphi) & e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1-\cos \varphi}{2} \right) + e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1+\cos \varphi}{2} \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} + \cos \varphi \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} & \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} (-\cos \theta \sin \varphi - i \cos \varphi \sin \theta) \\ \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} (\cos \theta \sin \varphi - i \cos \varphi \sin \theta) & \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} - \cos \varphi \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + ip_3 \sin \frac{\alpha}{2} & -p_2 \sin \frac{\alpha}{2} + ip_1 \sin \frac{\alpha}{2} \\ p_2 \sin \frac{\alpha}{2} + ip_1 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} - ip_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant étudier notre morphisme :

$$\begin{aligned}
\Psi : \quad \text{SO}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Bij}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \\
\rho &\mapsto \pi \circ \rho \circ \pi^{-1}
\end{aligned}$$

- **Injectivité** : L'action de $\text{SO}_3(\mathbb{C})$ sur \mathbb{S}^2 est fidèle et π est bijectif donc Ψ est injective.
- **Surjectivité** : D'après le théorème I.2.1, nous avons :

$$\text{Im}(\Psi) \subset \text{PSU}_2(\mathbb{C}).$$

A présent, considérons $\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{PSU}_2(\mathbb{C})$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Notons $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$. On va montrer que cette matrice est l'image par Ψ d'un certain $\rho \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

$$\text{En se donnant comme conditions : } \begin{cases} a_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \\ a_2 = p_3 \sin \frac{\alpha}{2} \\ b_1 = p_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ b_2 = p_1 \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \text{ on retrouve } \rho_{\varepsilon p, \varepsilon \alpha}, \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

Or $\rho_{-p, -\alpha} = \rho_{p, \alpha}$. D'où la surjectivité.

Remarque I.2.2. On peut en fait voir la surjectivité de façon plus abstraite, comme annoncé au point 3 de l'idée, en identifiant le morphisme $r_{p, \alpha} \mapsto f_{p, \alpha}$ avec l'isomorphisme Φ étudié précédemment. C'est ce que nous allons développer dans la partie suivante.



I.3 Version alternative

On a vu, dans la partie I.2., que Ψ établissait un isomorphisme entre $SO_3(\mathbb{R})$ et $PSU_2(\mathbb{C})$ via :

$$\begin{aligned} SO_3(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\Psi} PSU_2(\mathbb{C}) \\ \rho_{p,\alpha} &\mapsto f_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

avec $\rho_{p,\alpha}$ la rotation d'axe porté par p et d'angle α , et $f_{p,\alpha}$ la rotation correspondante dans $PSU_2(\mathbb{C})$ via la projection stéréographique, dont la formule a été explicitée dans la proposition I.2.1.

Cependant, dans la première partie, nous avons construit un isomorphisme entre $PSU_2(\mathbb{C})$ et $SO_3(\mathbb{R})$ via la théorie des groupes de Lie :

$$\begin{aligned} PSU_2(\mathbb{C}) &\xrightarrow{\Phi} SO(\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})) \simeq SO_3(\mathbb{R}) \\ P &\mapsto \text{ad}_P : (H \mapsto PHP^{-1}) \end{aligned}$$

A ce stade, il est naturel de chercher un lien entre Ψ et Φ .

Problème : L'isomorphisme Ψ est-il bien l'isomorphisme inverse de Φ ? A-t-on bien un lien cohérent entre ce qui a été fait précédemment, et ce que nous donne la théorie de Lie ?

Trève de suspense³ :

Proposition I.3.1. *L'application Ψ est l'isomorphisme réciproque de Φ .*

Démonstration. Pour montrer que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, on va montrer que, sur un système de générateurs de $SO_3(\mathbb{R})$, donné dans l'annexe I.4.2, on a $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{SO_3(\mathbb{R})}$. Comme Φ est un isomorphisme, il est en particulier injectif, donc inversible à gauche, et on aura alors

$$\Psi = \Phi^{-1}.$$

C'est parti pour la preuve. Commençons par noter que Ψ fournit un système générateur de $SU_2(\mathbb{C})$ à partir des générateurs de $SO_3(\mathbb{R})$.

Pour vérifier que Φ est bien l'isomorphisme inverse de Ψ , il suffit donc de vérifier que $\Psi(\rho_{N,\alpha}) =: f_{N,\alpha}$ est envoyé sur $\rho_{N,\alpha}$ via Φ , et de même pour $\Psi(\rho_{1,\frac{\pi}{2}}) =: f_{1,\frac{\pi}{2}}$.

On rappelle que $f_{N,\alpha} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$, et que $f_{1,\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

Trouvons une base orthonormée, relativement à la forme quadratique \det , de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, et appliquons $f_{N,\alpha}$ et $f_{1,\frac{\pi}{2}}$ à cette base.

3. "Foin de vain suspense", dirait notre ministre Thierry Mandon !

La base en question est constituée des matrices $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

• On a alors :

$$\begin{aligned} f_{N,\alpha}(I) &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{N,\alpha}(I) = I.$$

De même :

$$\begin{aligned} f_{N,\alpha}(J) &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\alpha) - i \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) - i \sin(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos(\alpha).J - \sin(\alpha).K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{N,\alpha}(J) = \cos(\alpha).J - \sin(\alpha).K.$$

Et :

$$\begin{aligned} f_{N,\alpha}(K) &= \begin{pmatrix} 0 & i \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \\ i \cos(\alpha) + \sin(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos(\alpha).K + \sin(\alpha).J \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{N,\alpha}(K) = \cos(\alpha).K + \sin(\alpha).J.$$

Finalement, en considérant la base (K, J, I) , on trouve :

$$f_{N,\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_{N,\alpha}$$

• En effectuant le même travail avec $f_{1,\frac{\pi}{2}}$, on trouve :

$$\begin{aligned} f_{1,\frac{\pi}{2}}(I) &= -J; \\ f_{1,\frac{\pi}{2}}(J) &= I; \\ f_{1,\frac{\pi}{2}}(K) &= K \end{aligned}$$

D'où :

$$f_{1, \frac{\pi}{2}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_{1, \frac{\pi}{2}}$$

Ainsi, on a montré que Ψ est bien l'isomorphisme réciproque de Φ . ◇

Remarque I.3.2. On a établi que Φ et Ψ sont des isomorphismes réciproques ; mais en fait, comme on sait que les automorphismes de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont des automorphismes intérieurs, Φ et Ψ^{-1} auraient au pire différé d'un automorphisme intérieur...

I.4 Annexes



I.4.1 La projection stéréographique

Définition de la projection stéréographique

On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 où les coordonnées seront notées (x, y, z) dans la base canonique.

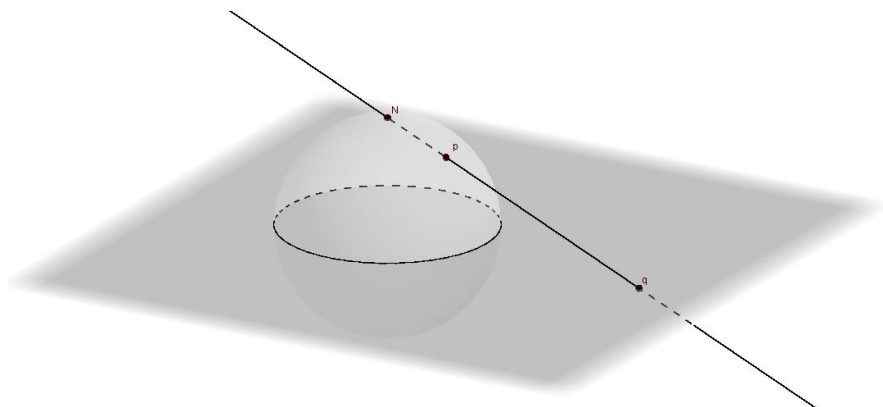
La stéréographie est l'art de projeter un solide sur un plan. Dans notre cas, on considère le plan complexe \mathbb{C} dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire le plan équatorial d'équation $z = 0$. Notre solide sera \mathbb{S}^2 , la sphère centrée à l'origine et de rayon 1. On note N le point $(0, 0, 1)$, le pôle Nord, et S le point $(0, 0, -1)$, le pôle Sud.

On peut maintenant définir la projection stéréographique de pôle N comme étant l'application

$$\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que à un point $p = (p_1, p_2, p_3)$ de la sphère on associe le point $q = (q_1, q_2, 0)$, intersection de la droite (pN) et du plan équatorial ; on note alors : $\pi(p) = q_1 + iq_2$.

On prolonge par continuité π à \mathbb{S}^2 en posant : $\pi(N) = \infty$.

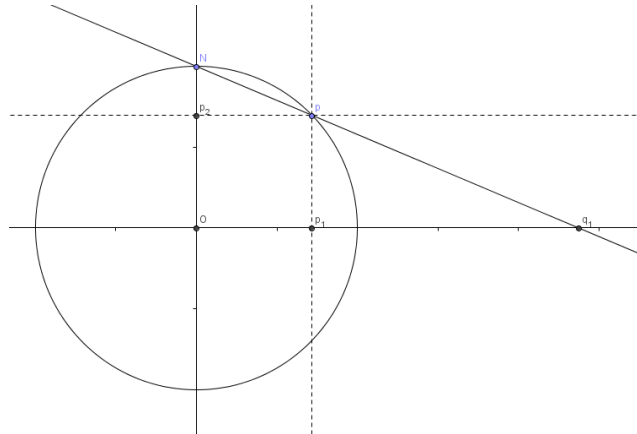


Formules

Soit $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{S}^2$, on a :

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_1}{1 - p_3}, \frac{p_2}{1 - p_3} \right).$$

Cette relation vient de l'application du théorème de Thalès.



Pour l'application inverse, on se donne un point $q = (q_1, q_2, 0)$. On trouve facilement :

$$\pi^{-1}(q_1, q_2) = \left(\frac{2q_1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \frac{2q_2}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} \right).$$

Aparté

Nous allons étudier la continuité de π étendu à S^2 .

- La continuité sur $S^2 \setminus \{N\}$ est évidente grâce à la formule donnée dans la section précédente.
- La continuité en $\{N\}$ vient du principe de translation et de la continuité de π :

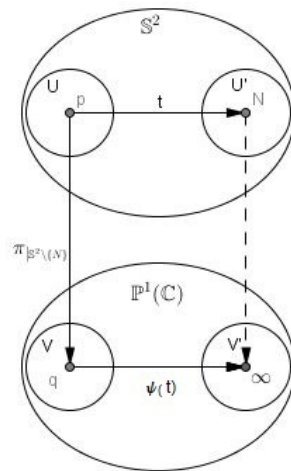
Soit U un ouvert dans S^2 , tel que $p \in U$.

On considère $t \in SO_3(\mathbb{C})$, la rotation telle que $t(p) = N$. On note $U' = t(U)$ qui est un ouvert de S^2 par continuité de t , contenant N .

On note q le projeté de p par π et $V = \pi(U)$. V est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, par continuité de π sur $S^2 \setminus \{N\}$, et il contient q .

Grâce au théorème I.2.1, on peut définir $\Psi(t) : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la rotation continue de $PSU_2(\mathbb{C})$ qui envoie l'ouvert V sur V' un ouvert contenant ∞ .

Ainsi, N est envoyé de façon continue sur ∞ .





I.4.2 Système générateur de rotations de $SO_3(\mathbb{R})$

Lemme I.4.1. $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les rotations $\rho_{N,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\rho_{1,\frac{\pi}{2}}$.

Démonstration. Soit $\rho, \alpha \in SO_3(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut exprimer ρ, α en fonction de rotations de la forme $\rho_{N,\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et de $\rho_{1,\frac{\pi}{2}}$.

Pour ce faire, étudions de près le schéma suivant :

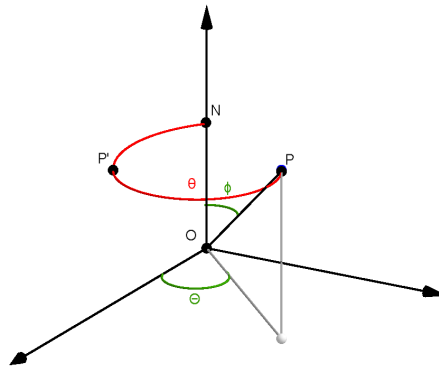


FIGURE I.1 – Rotations génératrices-Passage de N à P

On voit alors que : $N \xrightarrow{\rho_{i,\phi}} P' \xrightarrow{\rho_{N,\theta}} P$.

On en déduit, en utilisant le lemme I.4.2 qui suit cette preuve, que :

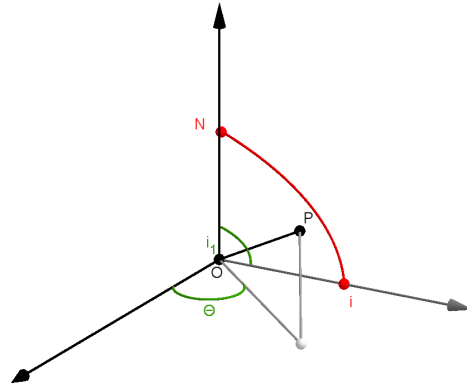
$$\rho_{P,\alpha} \circ (\rho_{N,\theta} \circ \rho_{i,\phi}) = (\rho_{N,\theta} \circ \rho_{i,\phi}) \circ \rho_{N,\alpha}$$

Autrement dit :

$$\rho, \alpha = (\rho_{N,\theta} \circ \rho_{i,\phi}) \circ \rho_{N,\alpha} \circ (\rho_{N,\theta} \circ \rho_{i,\phi})^{-1}$$

A présent, nous allons exprimer $\rho_{i,\phi}$ en fonction de $\rho_{1,\frac{\pi}{2}}$ et de $\rho_{N,\phi}$.

Pour cela, regardons la figure suivante :

FIGURE I.2 – Rotations génératrices-Passage de i à N

On voit alors que : $i \xrightarrow{\rho_{1, \frac{\pi}{2}}} N$

On a donc : $\rho_{i, \phi} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}} = \rho_{1, \frac{\pi}{2}} \circ \rho_{N, \phi}$

$$\implies \rho_{i, \phi} = \rho_{1, \frac{\pi}{2}}^{-1} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}} \circ \rho_{N, \phi}$$

Finalement :

$$\boxed{\rho, \alpha} = (\rho_{N, \theta} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}}^{-1} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}} \circ \rho_{N, \phi}) \circ \rho_{N, \alpha} \circ (\rho_{N, \theta} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}}^{-1} \circ \rho_{1, \frac{\pi}{2}} \circ \rho_{N, \phi})^{-1}$$

◇

Ici encore, nous avons utilisé un lemme qu'il convient d'expliciter, et de démontrer :

Lemme I.4.2. Soit $\rho_{a, \alpha}$, $a \in \mathbb{S}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, la rotation autour de l'axe engendré par a , d'angle α , orientée par a . Soit r une autre rotation. Alors : $r \circ \rho_{a, \alpha} \circ r^{-1}$ est la rotation $\rho_{r(a), \alpha}$.

Démonstration. Posons $r' := r \circ \rho_{a,\alpha} \circ r^{-1}$; r' est clairement dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, puisque celui-ci est un groupe. Reste donc à déterminer les invariants de r' .

• On a $r'(r(a)) = r \circ \rho_{a,\alpha} \circ r^{-1}(r(a)) = r(a)$: r' est bien une rotation d'axe engendré par $r(a)$.

• Il reste à montrer que l'angle de la rotation, mettons α' , est égal à α quand l'axe est orienté par $r(a)$.

Or, on a : $\text{tr}(r') = 1 + 2 \cos(\alpha')$ d'une part, et $\text{tr}(r') = \text{tr}(r) = 1 + 2 \cos(\alpha)$ par invariance de la trace par conjugaison.

On a donc :

$$\cos(\alpha') = \cos(\alpha).$$

Il suffit maintenant de prouver que $\sin(\alpha')$ et $\sin(\alpha)$ ont même signe pour avoir égalité entre les angles.

Or, $\text{sgn}(\sin(\alpha')) = \text{sgn}(\langle a, x \wedge \rho_{a,\alpha}(x) \rangle)$, pour un vecteur quelconque x orthogonal à a .

En effet, supposons que $\sin(\alpha) > 0$. Alors, c'est que l'on effectue moins d'un demi-tour ; et dans ce cas, $x \wedge r(x)$ "pointe vers le haut", voir figure I.3.

A *contrario*, si $\sin(\alpha) < 0$, alors on effectue plus d'un demi-tour, et alors $x \wedge r(x)$ "pointe vers le bas", voir figure I.4.

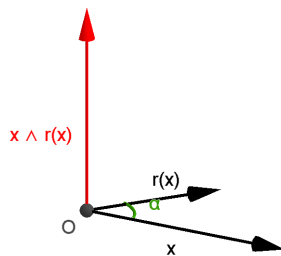
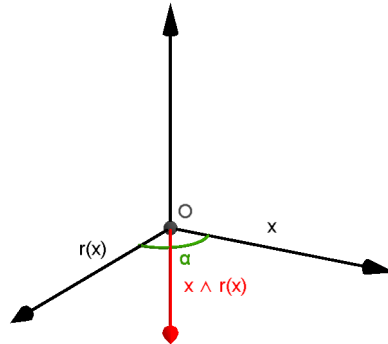


FIGURE I.3 – Produit vectoriel - Cas où $\sin(\alpha) > 0$

FIGURE I.4 – Produit vectoriel - Cas où $\sin(\alpha) < 0$

Comme r , rotation, préserve le produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\langle a, x \wedge \rho_{a,\alpha}(x) \rangle) &= \operatorname{sgn}(\langle r(a), r(x \wedge \rho_{a,\alpha}(x)) \rangle) \\ &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{sgn}(\langle r(a), r(x) \wedge r(\rho_{a,\alpha}(x)) \rangle) \\ &= \operatorname{sgn}(\langle r(a), r(x) \wedge r'(r(x)) \rangle) \\ &\stackrel{(**)}{=} \operatorname{sgn}(\sin(\alpha')) \end{aligned}$$

(*) : On a ici utilisé le fait que r est une rotation.

(**) : Cela provient du fait que $r(x)$ est orthogonal à $r(a)$: on retombe sur la définition de $\operatorname{sgn}(\sin(\alpha'))$.

Ainsi, on a montré que l'angle de rotation de r' est α , comme désiré.

◇

I.4.3 Action par homographies

Nous avons $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui agit naturellement sur \mathbb{C}^2 :

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, v) &\mapsto g(v) \end{aligned}$$

De plus, remarquons que $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est stabilisé par le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, lequel envoie une droite vectorielle sur une droite vectorielle ; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \mathbb{C}^* \\ (g, \mathbb{C}^* v) &\mapsto \mathbb{C}^* g(v) \end{aligned}$$

Rappel 1. L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est en bijection avec l'espace quotient $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \mathbb{C}^*$.

Le noyau de l'action est l'intersection des stabilisateurs des droites vectorielles, c'est donc le groupe des homothéties, noté $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$.

Ainsi nous avons, après avoir quotienté par le noyau, et en notant que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \mathbb{C}^*(z_1, z_2) \right) &\mapsto \mathbb{C}^* \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \mathbb{C}^*(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \end{aligned}$$

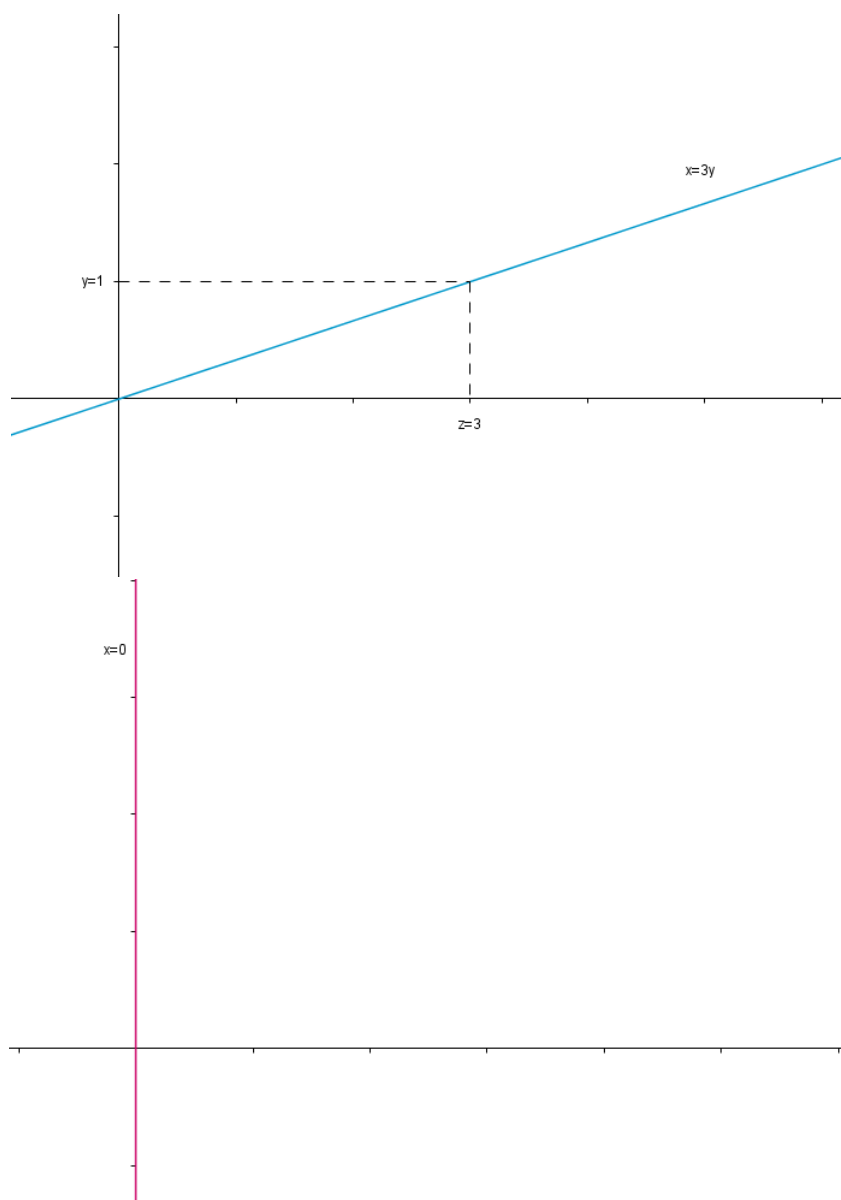
Remarque I.4.3. Les crochets de la matrice de départ se sont bien transformés en des parenthèses car l'action est indépendante du choix du représentant de la classe.

Maintenant, nous voulons repérer un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Pour cela, nous changeons la vision de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en effectuant une division cellulaire : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'union de la droite infinie, vue comme la droite d'équation $x = 0$, et des droites vectorielles, d'équation $x = zy$, où z parcourt les complexes ; autrement dit :

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \underbrace{\{x = zy, z \in \mathbb{C}\}}_{\text{espace affine}} \cup \underbrace{\{x = 0\}}_{\text{point}}$$

Voici une vision géométrique qui nous aidera pour la suite :



Nous voyons qu'il suffit d'un seul point pour caractériser une droite vectorielle ; aussi, la droite d'équation $x = zy$ peut être caractérisée par le point intersection entre cette droite et la droite $y = 1$; autrement dit, une droite peut être définie par la valeur de $z \in \mathbb{C}$.

Sachant cela, nous avons $v = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$; on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$. Ainsi, $(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$ devient $\frac{az_1 + cz_2}{bz_1 + dz_2}$.

Génériquement, nous avons donc : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} (z) = \frac{az + c}{bz + d}$.

Etudions les différents cas qui se présentent à nous :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} (z) = \begin{cases} \frac{az+c}{bz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } bz+d \neq 0 \\ \infty & \text{si } z \neq \infty \text{ et } bz+d = 0 \\ \frac{a}{b} & \text{si } z = \infty \text{ et } b \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = \infty \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Remarque I.4.4. La condition $bz + d = 0$ implique $az + c \neq 0$ car $z \neq 0$ et seul l'élément 0 est envoyé sur 0 par l'action de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

La condition $b = 0$ implique $a \neq 0$ car le déterminant d'une matrice de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ est non nul.

Chapitre II

Les solides platoniciens

II.1 Les solides dans la sphère...



II.1.1 Introduction : premières définitions

Définition II.1.1. [*Solide platonicien*] Un solide platonicien est un polyèdre convexe régulier, c'est-à-dire l'intersection compacte d'un nombre fini de semi-espaces de \mathbb{R}^3 , dont les faces sont des n -gones réguliers, et tel que de chaque sommet part le même nombre d'arêtes.

Cette définition est quelque peu naïve, dans le sens où l'on ne peut pas la généraliser aux cas où l'on manipule des objets non convexes, ou en dimension strictement supérieure à 3 (où la notion de "polyèdre régulier" n'est plus claire du tout).

La définition qu'il convient d'adopter, c'est celle qui fait intervenir le groupe de symétries du polyèdre, qui donne la meilleure description de sa géométrie. Il devient donc naturel d'étudier les groupes de symétries des solides platoniciens.

Définition II.1.2. [*Drapeau*] Un drapeau d'un polyèdre est le triplet (s, a, f) , où s est un sommet, a est une arête contenant s , et f est une face contenant a .

Sous cet angle de vue, on peut alors établir une nouvelle définition pour les solides platoniciens :

Définition II.1.3. [*Solide platonicien-Version drapeau*] Un solide platonicien est un polyèdre dont le groupe de symétries agit transitivement sur ses drapeaux (autrement dit : tout drapeau peut être envoyé sur n'importe quel autre).

Cette définition force immédiatement un solide platonicien à avoir des n -gones réguliers comme faces, congruentes, et le même nombre d'arêtes par sommet ; on retrouve notre définition de départ.

Avant de passer à la suite, nous allons calculer le nombre de solides platoniciens ; cette démonstration est certes bien connue, mais elle mérite toutefois d'être (brièvement) parcourue...

On note m le nombre d'arêtes partant de chaque sommet ; et n le nombre d'arêtes par face. On étudie les valeurs possibles pour le couple (m, n) .

Nous allons montrer que nous avons cinq possibilités pour le couple (m, n) (et chaque valeur correspondra alors à un solide platonicien) :

$$(3, 3); (3, 4); (4, 3); (3, 5); (5, 3).$$

Pour ce faire, on utilise la caractéristique d'Euler, qui affirme que, pour les solides platoniciens ¹ :

$$S - A + F = 2, \quad (*)$$

avec S (resp. A , resp. F) le nombre de sommets (resp. nombre d'arêtes, resp. nombre de faces).

Comptons le nombre d'arêtes d'un solide platonicien.

Pour ce faire, on va étudier l'ensemble

$$X = \{(a, f); a \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{F}; a \subset f\},$$

où \mathcal{A} , resp. \mathcal{F} , désigne l'ensemble des arêtes, resp. des faces, du solide platonicien.

Considérons d'une part l'application projection sur la première coordonnée : $\pi_{\mathcal{A}} : (a, f) \mapsto a$; l'image réciproque d'une arête est de cardinal 2, puisque chaque arête appartient à deux faces. Le cardinal de X est donc dans ce cas égal à $2A$. D'autre part, l'image réciproque d'une face par l'application projection sur la seconde coordonnée : $\pi_{\mathcal{F}} : (a, f) \mapsto f$ est de cardinal n , puisque chaque face contient n arêtes. Le cardinal de X est donc ici égal à $F.n$.

En regroupant ces deux résultats, on en déduit la formule suivante :

$$F.n = 2A.$$

En procédant de la même façon en considérant cette fois l'ensemble

$$X' = \{(s, a); s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}; s \in a\},$$

avec de même \mathcal{S} l'ensemble des sommets, on en déduit la seconde formule :

$$S.m = 2A.$$

Ainsi, en remplaçant dans (*), on trouve : $\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$; on a donc l'égalité :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2} (**).$$

De plus, on a que $n \geq 3$ (c'est le nombre minimal pour construire une face!) et $m \geq 3$.

En outre, si $n \geq 4$ et $m \geq 4$, alors on aura : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$, et donc : $\frac{1}{A} \leq 0$, impossible!

Ainsi : $m < 4$ ou $n < 4$; autrement dit, comme on avait $n \geq 3$ et $m \geq 3$: deux cas se présentent alors à nous.

1. Cette formule se comprend immédiatement dès lors que l'on considère les solides platoniciens comme étant homéomorphes à la sphère \mathbb{S}^2 , élément de référence en topologie, dont on sait que la caractéristique est 2...

- Si $n = 3$: (**) devient : $\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow m < 6 \Rightarrow 3 \leq m \leq 5$.
Dans ce cas, on obtient les couples $(m, n) = (3, 3); (4, 3); (5, 3)$.
- Si $m = 3$:
De même on obtient les couples suivants : $(m, n) = (3, 3); (3, 4); (3, 5)$.

◇

Remarque II.1.4. • [dual] Le dual C^* d'un solide platonicien C est obtenu en plaçant les sommets sur les centres des faces de la figure d'origine, et en reliant les paires de sommets provenant de faces adjacentes.

On remarque que le dual a les mêmes symétries que le solide d'origine, et que les drapeaux de C^* sont en bijection avec ceux de C .

Le dual d'un solide platonicien est donc un solide platonicien ! Il suffit juste de remplacer le couple (m, n) par (n, m) .

- On admet qu'il existe un unique solide pour chaque couple ; c'est une partie pénible à montrer, alors, on va sortir notre joker...Merci Platon !

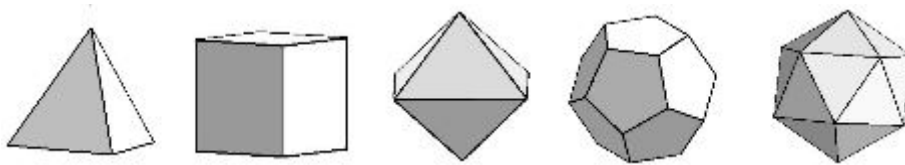


FIGURE II.1 – Solides platoniciens



II.1.2 Présentation des solides, groupes d'isométries positives

Le tétraèdre

Le tétraèdre correspond au couple (3,3). On le notera dorénavant T .

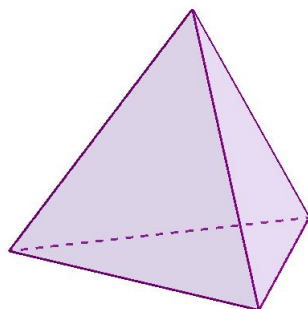


FIGURE II.2 – Le tétraèdre

On note $\Gamma_T = \text{Iso}^+(T)$, le groupe d'isométries positives de T , et $\text{Is}(T)$ le groupe d'isométries de T . Le groupe $\text{Is}(T)$ agit sur les quatre sommets. L'action est fidèle, car si $g \in \text{Is}(T)$ est dans le noyau du morphisme associé à l'action, g stabilise un repère affine (les 4 sommets), donc $g = \text{Id}$. On montre de plus que les transpositions sont atteintes, et donc $\text{Is}(T)$ est en bijection avec \mathfrak{S}_4 . Enfin, $\text{Iso}^+(T) = \Gamma_T$ est d'indice 2 dans $\text{Is}(T) = \mathfrak{S}_4$; comme le seul sous-groupe d'indice 2 dans \mathfrak{S}_4 , on a la bijection :

$$\Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4$$

Décrivons les éléments de Γ_T : il contient l'identité, 8 rotations d'ordre 3 (il y a 2 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de chaque sommet) et 3 rotations d'ordre 2 (rotations autour des 3 médianes joignant les milieux de 2 arêtes opposées).



Le cube

Le cube correspond au couple (3,4). On note C le cube et Γ_C son groupe d'isométries positives.

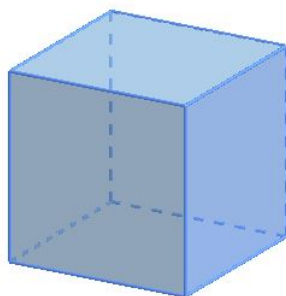


FIGURE II.3 – Le cube

On représente le cube par un graphe bipartite, ceci signifie qu'à chaque sommet on attribue un signe + ou - de façon alternée et qui permet de faire apparaître deux tétraèdres à l'intérieur du cube :

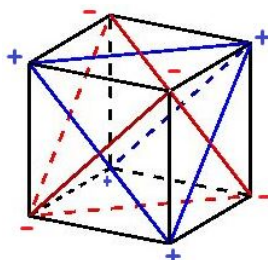


FIGURE II.4 – Cube bipartite

Si $g \in \Gamma_C$ envoie un + sur un + alors tous les + iront sur un + car une isométrie envoie une arête sur une arête.

On a ainsi la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4 \longrightarrow \Gamma_C \xrightarrow{\varepsilon} \{-1, 1\} \longrightarrow 1$$

où $\varepsilon : g \mapsto 1$ si g envoie un + sur un + et $\varepsilon : g \mapsto -1$ si g envoie un + sur un -.

On a donc la bijection : $\Gamma_C \simeq \Gamma_T \times \{\pm 1\} = \mathfrak{A}_4 \times \{\pm 1\} \simeq \mathfrak{S}_4$, par dévissage. Ainsi,

$$\boxed{\Gamma_C \simeq \mathfrak{S}_4}$$

Décrivons maintenant géométriquement ce groupe d'isométries.

On liste d'abord les axes de rotations du cube : 3 passant par les milieux de faces opposées (2 rotations d'ordre 4 et une d'ordre 2 par axe), 4 passant par des sommets opposés (2 rotations d'ordre 3 par axe) et 6 passant par les milieux d'arêtes opposées (1 rotation d'ordre 2 par axe). Ainsi, Γ_C est composé de 24 rotations (l'identité, 6 quarts de tour, 8 tiers de tour, 9 demi-tours).



L'octaèdre

L'octaèdre, qui correspond au couple (4,3), est le dual du cube, il a donc le même groupe d'isométries positives :

$$\boxed{\Gamma_O \simeq \mathfrak{S}_4}$$

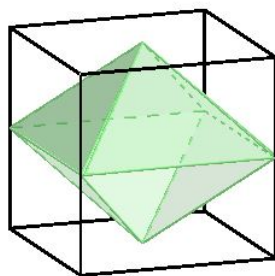


FIGURE II.5 – Un octaèdre dans un cube



L'icosaèdre

L'icosaèdre, que l'on désignera dans la suite par la lettre I , correspond au couple $(m, n) = (5, 3)$.

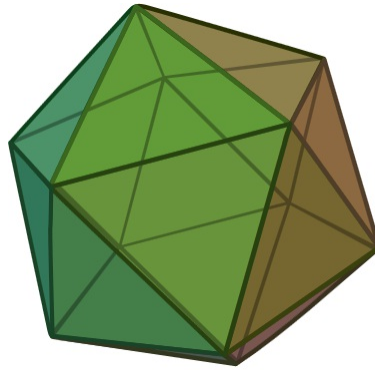


FIGURE II.6 – Icosaèdre

CONSTRUCTION

Sa construction se fait astucieusement à l'aide de trois rectangles, de longueur 1, et de largeur notée g ; où g est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

On configure ces trois rectangles comme suit, et on appellera par la suite cette configuration la *configuration d'or*² :

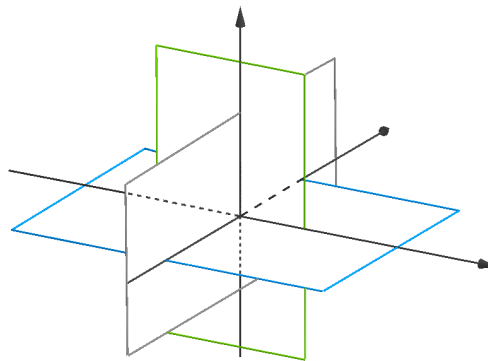


FIGURE II.7 – Configuration d'or

2. L'appellation provenant du fait que la racine g n'est pas loin du nombre d'or.

Calculons la distance d (segment rouge sur la figure II.1.2) entre x et son voisin v ; on voit facilement, en utilisant ce bon vieux théorème de Pythagore, qu'elle est égale à

$$d^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-g}{2}\right)^2$$

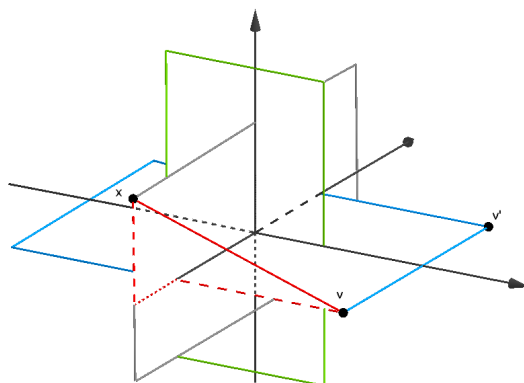


FIGURE II.8 – Configuration d'or - Calcul de la distance $d(x, v)$

Or, comme g est solution (positive) de l'équation $x^2 + x - 1$, en développant l'expression ci-dessus, on trouve que $d^2 = g^2$. Autrement dit, la distance entre x et v d'une part, et entre v et v' d'autre part, sont égales.

De même, si l'on calcule la distance entre x et le point de coordonnée $(g, 0, 1)$, on trouve que cette distance est également g . Ce point, ainsi que x et v forment alors un triangle équilatéral.

En se basant sur ce résultat, on construit alors notre icosaèdre :

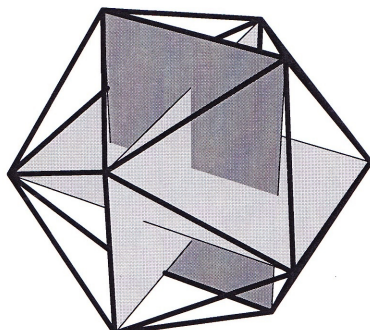


FIGURE II.9 – Construction de l'icosaèdre à partir d'une configuration d'or

Dans toute la suite, pour des raisons de commodité et dans un souci de simplifier les calculs, on choisira de doubler les dimensions des rectangles : leur largeur sera désormais de $2g$ et leur longueur de 2 ; cela ne change rien au raisonnement, et on évite l'apparition de fractions dans les calculs de coordonnées et de distance...

COORDONNÉES DES SOMMETS DE L'ICOSAÈDRE

Dans ce cas, on voit facilement que les sommets de l'icosaèdre ont pour coordonnées :

$$(\pm g, \pm 1, 0); (\pm 1, 0, \pm g), (0, \pm g, \pm 1.)$$

La construction de l'icosaèdre a été effectuée. A présent, calculons le groupe d'isométries de I .

GROUPE D'ISOMÉTRIES

On note $\Gamma_I = \text{Iso}^+(I)$. Montrons que $\text{Iso}^+(I) \simeq \mathfrak{A}_5$.

1. Calcul de cardinaux

- *Première étape : Montrons que \mathfrak{A}_4 agit transitivement sur les sommets de l'icosaèdre.*

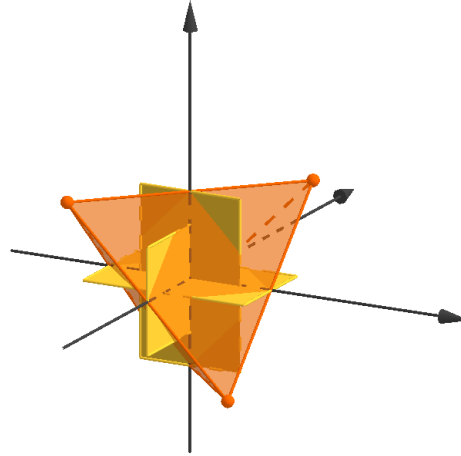
A présent, étudions de plus près le stabilisateur d'une configuration d'or. Une première remarque, utile pour la visualisation : stabiliser une configuration d'or revient à stabiliser les trois axes de \mathbb{R}^3 .

Pour déterminer le stabilisateur d'une configuration d'or, on va associer à celle-ci des points, de coordonnées normalisées, de telle sorte à ce que le produit des coordonnées soit constant, égal à 1 ; autrement dit, à chaque configuration d'or on associe un ensemble de points (x_1, x_2, x_3) , tels que $|x_i| \leq 1$, et $x_1 x_2 x_3 = 1$.

On trouve quatre points candidats :

$$(+1, +1, +1); (+1, -1, -1); (-1, +1, -1); (-1, -1, +1)$$

On place alors ces points sur la figure :



On voit alors apparaître un tétraèdre ! Ainsi, le stabilisateur d'une configuration d'or, qui est un sous-groupe de l'icosaèdre construit par le procédé expliqué ci-dessus, est le groupe d'isométries positives du tétraèdre, soit : \mathfrak{A}_4 . On peut donc dire que :

$$\Gamma_I \text{ contient } \mathfrak{A}_4.$$

On peut rapidement vérifier que l'on peut visualiser facilement les 12 éléments de \mathfrak{A}_4 sur la figure, en cherchant les éléments qui stabilisent les 3 axes : on reconnaît des rotations d'ordre 2, correspondant aux rotations d'angle π et d'axes les trois axes de \mathbb{R}^3 ; il y a donc 3 telles rotations. De même, on a les rotations d'ordre 3, d'axes $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$; il y a $2 \times 4 = 8$ telles rotations. Et bien sûr, on n'oublie pas l'identité.

A présent, considérons le point $v = (1, -g, 0)$ (voir la figure II.1.2).

On sait que Γ_I va agir transitivement sur les sommets (on peut toujours trouver un élément de Γ_I qui envoie un sommet sur un autre). On étudie dès lors l'application $\Phi : \Gamma_I \rightarrow \Gamma_I.v$; $\Gamma_I.v$ désigne alors l'ensemble des sommets.

On remarque que $\text{Stab}(v) \cap \mathfrak{A}_4 = \{\text{Id}\}$. En effet, dans Γ_I , les éléments qui stabilisent v sont soit Id, soit d'ordre 5, et dans \mathfrak{A}_4 , de tels éléments n'existent pas, par le théorème de Lagrange.

Ainsi, on obtient une injection : $\Phi|_{\mathfrak{A}_4} : \mathfrak{A}_4 \hookrightarrow \Gamma_I.v$.

Par égalité des cardinaux ($\#\mathfrak{A}_4 = 12$, et on a 12 sommets), on obtient une bijection :

$$\mathfrak{A}_4 \simeq \Gamma_I.v.$$

Finalement : on a bien que \mathfrak{A}_4 agit simplement transitivement sur les sommets.

Ce premier résultat nous donne une information sur le cardinal de Γ_I . En effet, on a :

$$\mathfrak{A}_4 \simeq \Gamma_I.v \simeq \Gamma_I/\text{Stab}(v).$$

D'où :

$$\#\Gamma_I = \#\text{Stab}(v).\#\mathfrak{A}_4.$$

- *Deuxième étape : Action transitive sur les drapeaux*

Rappelons qu'un drapeau désigne le triplet (s, a, f) , où s est un sommet du solide platonicien, a est une arête, et f une face, avec $s \subset a \subset f$. On peut aussi l'écrire comme suit : (x, xy, xyz) , où x, y et z désignent trois sommets de l'icosaèdre ; xy est donc l'arête formée des sommets x et y , et xyz la face formée des trois sommets.

Combien y a-t-il de drapeaux dans l'icosaèdre ? Comptons le nombre de possibilités pour choisir un drapeau : pour le premier élément du triplet, le sommet, on a 12 choix possibles ; pour le second, il faut choisir une arête ayant comme sommet celui que l'on a choisi précédemment, cela fait 5 possibilités. Et enfin, il faut choisir une face contenant le sommet et l'arête choisis : 2 possibilités.

Cela fait en tout : $12 \times 5 \times 2 = 120$ drapeaux. Premier résultat.

Le second résultat important, c'est que l'on voit tout de suite que, quand le groupe d'isométries $\text{Iso}(I)$ agit sur I , il agit sur \mathcal{F}_I , l'ensemble des drapeaux ; et de manière simplement transitive : tous les stabilisateurs des drapeaux sont triviaux (il n'y a que l'identité pour fixer à la fois un sommet, une arête contenant ce sommet, et une face contenant cette arête).

Cela nous donne l'injection suivante :

$$\text{Iso}(I) \hookrightarrow \mathcal{F}_I$$

On a donc :

$$\#\text{Iso}(I) \leq 120 \quad (1)$$

Or, on avait que, pour s un sommet de I , $\text{Stab}(s)_{\Gamma_I} \supset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (les éléments stabilisant un sommet sont l'identité, et des éléments d'ordre 5).

Comme on avait vu précédemment que $\#\Gamma_I = \#\text{Stab}(s).\#\mathfrak{A}_4$, alors on en déduit que :

$$\#\Gamma_I \geq \#\mathfrak{A}_4.\#\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = 12 \times 5 = 60,$$

Et donc :

$$\#\text{Iso}(I) = 2.\#\Gamma_I \geq 120. \quad (2)$$

En regroupant (1) et (2), on en déduit alors que :

$$\#\text{Iso}(I) = 120; \#\Gamma_I = 60.$$

On a montré dans la même foulée que $\text{Iso}(I)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux \mathcal{F}_I .

2. Groupe d'isométries positives : $\Gamma_I \simeq \mathfrak{A}_5$

Bon, il est maintenant temps de déterminer le groupe d'isométries positives de cet icosaèdre !

Commençons par décrire les 60 éléments de Γ_I .

- Il y a bien sûr Id ;
- On a également $4 \times \frac{12}{2} = 24$ rotations d'ordre 5 (*il y a 12 sommets, depuis chaque sommet on peut effectuer une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{5}$, $1 \leq k < 5$; et chaque paire de sommets opposés définissent la même rotation*) ;
- Viennent ensuite $2 \times \frac{20}{2} = 20$ rotations d'ordre 3 (*on a 20 faces, et chaque centre de face correspond à un axe de rotation d'angle $\frac{2k\pi}{3}$, $1 \leq k < 3$; et chaque paire de faces opposées engendrent la même rotation*) ;
- Enfin, il y a $\frac{30}{2} = 15$ rotations d'ordre 2 (*ce sont les rotations d'angle $\pm\pi$, et d'axes les droites passant par les milieux des paires d'arêtes opposées ; comme il y a 30 arêtes...*).

Revenons à présent sur notre configuration d'or. La première chose à noter, c'est qu'il y a plusieurs façons de construire ces rectangles de façon à les inscrire dans l'icosaèdre. Combien exactement ? Il suffit d'observer le dessin pour voir que chaque configuration d'or nous fournit 6 arêtes de l'icosaèdre ; comme il y a 30 arêtes, on a alors 5 configurations d'or dans I .

Le but de ce qui va suivre, c'est de montrer que Γ_I s'injecte dans le groupe de permutations \mathfrak{S}_5 ; comme son cardinal est $60 = \frac{\#\mathfrak{S}_5}{2}$, on en déduira que $\Gamma_I \simeq \mathfrak{A}_5$.

Pour cela, il faut montrer que Γ_I agit fidèlement sur 5 "trucs". On comprend aisément que ces "trucs", ce seront les configurations d'or.

L'action de Γ_I sur les configurations d'or est une conséquence immédiate du fait que Γ_I agit sur les arêtes (car il agit sur les drapeaux). Cette action est transitive ; en effet, cela provient du fait que Γ_I agit transitivement sur les drapeaux, comment cela a été prouvé précédemment, donc Γ_I agit transitivement sur les arêtes. Or, une configuration d'or est caractérisée par une de ses arêtes (la donnée d'une arête de sommet s nous permet de reconstruire, en envoyant cette arête sur une autre arête via Γ_I et en respectant la distance entre s et les sommets images, la configuration d'or entière).

On en déduit que Γ_I agit transitivement sur les 5 configurations d'or.

Pour montrer que l'action est fidèle, il faut s'intéresser aux stabilisateurs des configurations d'or, et montrer que leur intersection est triviale.

Tout d'abord, le cardinal du stabilisateur d'une configuration d'or, notée dans la suite G.C., est :

$$\#\text{Stab}(G.C.) = \frac{60}{5} = 12.$$

De plus, on a que

$$\text{Stab}(G.C.) = \{\text{Id}; g_i, 1 \leq i \leq 8; h_j, 1 \leq j \leq 3 \mid \text{ord}(g_i) = 3 \forall i; \text{ord}(h_j) = 2 \forall j\}$$

On va maintenant regarder le nombre d'éléments dans l'intersection des stabilisateurs des 5 configurations d'or (on veut qu'il soit restreint à l'identité).

Pour ce faire, on va prendre chaque élément dans un des stabilisateurs, et étudier le nombre de configurations d'or qu'il stabilise.

Commençons par prendre un élément g d'ordre 2; c'est donc une rotation d'angle π autour d'un des 3 axes de \mathbb{R}^3 . On remarque qu'il existe 3 telles rotations par configuration d'or (puisqu'il y a 3 axes!), 15 telles rotations dans Γ_I , et 5 configurations d'or.

On en déduit donc que g stabilise une et une seule configuration d'or (elle ne peut pas être dans deux stabilisateurs à la fois).

Prenons maintenant une rotation h d'ordre 3. Il y a 8 telles rotations par configuration d'or, 20 telles rotations dans Γ_I , et 5 configurations. En notant k le nombre de configurations que h stabilise, on voit que k vérifie : $8 \times 5 = 20k$; et donc $k = 2$. Donc h stabilise 2 configurations d'or.

Concluons cette partie. L'étude précédente nous permet de dire que le noyau du morphisme induit par l'action, qui est égal à l'intersection des stabilisateurs des configurations d'or, est trivial, et donc l'action est fidèle.

On a ainsi, par l'action de Γ_I sur les 5 configurations d'or, que $\Gamma_I \hookrightarrow \mathfrak{S}_5$, et $\#\Gamma_I = 60$. On en déduit que

$$\boxed{\Gamma_I \simeq \mathfrak{A}_5}$$



Le dodécaèdre

Le dodécaèdre, qui correspond au couple (3,5), est le dual de l'isocaèdre, il a donc le même groupe d'isométries positives :

$$\boxed{\Gamma_D \simeq \mathfrak{A}_5}$$

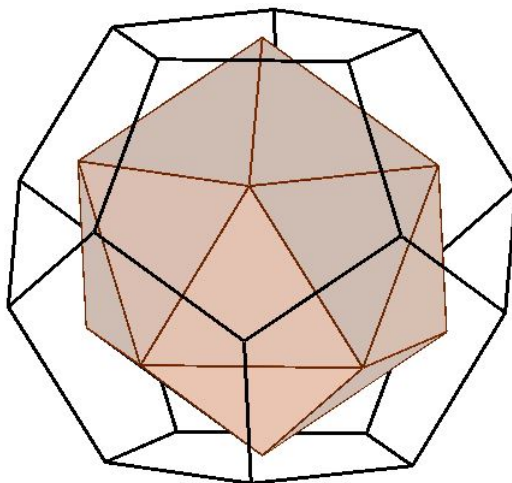


FIGURE II.10 – Un isocaèdre dans un dodécaèdre



II.1.3 Les solides vus dans la sphère

Maintenant que les présentations sont faites, on va pouvoir introduire la notion de *normalisation des solides platoniciens*.

Cette notion décrit le processus de transformation des solides tels qu'on les connaît, dans \mathbb{R}^3 , aux solides dans la sphère \mathbb{S}^2 . Dans ce dernier cas, chaque sommet se retrouve donc sur la sphère (jusque là...), mais, et c'est là que ce processus est quelque peu perturbant, on normalise également les arêtes, et les faces, de sorte à ce que chaque face du solide considéré ait la forme d'un "morceau" de sphère...Et là se pose la question :

Quid des groupes d'isométries des solides platoniciens ?

Eh oui : est-ce qu'en normalisant un solide platonicien, on a modifié son groupe d'isométries ? Heureusement pour nous, non ; et l'argument clef, c'est le résultat suivant :

Proposition II.1.5. *L'action de $SO_3(\mathbb{R})$ sur les points de la sphère commute avec la normalisation.*

Démonstration. $SO_3(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ (r, x) &\longmapsto r(x) \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Posons $y := \frac{x}{\|x\|}$, le normalisé de x .

On a alors d'une part,

$$r(y) = \frac{r(y)}{\|r(y)\|},$$

puisque y est normé, donc son image $r(y)$ l'est aussi.

D'autre part,

$$r(y) = \frac{r(x)}{\|x\|}.$$

On voit donc alors que

$$r\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}r(x) = \frac{1}{\|r(x)\|}r(x),$$

ce qui prouve que l'action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ commute avec la normalisation.

◇

Grâce à ce résultat, on peut voir les solides platoniciens sur la sphère, tout en retrouvant l'action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$; autrement dit, leur groupe d'isométries est inchangé!

Notations. Dorénavant, on affublera d'un signe " \sim " tout solide platonicien normalisé.

On peut résumer le processus décrit par le schéma qui suit, en prenant l'exemple du tétraèdre, noté T (\tilde{T} désigne alors le tétraèdre normalisé).

$$\begin{array}{c} (\text{Iso}^+(T) = \Gamma_T, T) \\ \downarrow \\ (\Gamma_T, \tilde{T}) \end{array}$$

Mais on ne va pas s'arrêter là! Dans la suite, on va passer, *via* la projection stéréographique π , au projectif. On peut donc compléter le schéma :

$$\begin{array}{c} (\text{Iso}^+(T) = \Gamma_T, T) \\ \downarrow \\ (\Gamma_T, \tilde{T}) \longrightarrow (\Psi(\Gamma_T), \pi(\tilde{T})) \end{array}$$

où, on le rappelle, π désigne l'application bijective entre la sphère \mathbb{S}^2 et la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, voir l'annexe I.4.1, et $\Psi : \text{SO}_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{PSU}_2(\mathbb{C})$ vu en I.2.

Notations. Dans toute la suite, par abus de langage, on désignera encore par T l'image par π du tétraèdre normalisé, $\pi(\tilde{T})$. *Idem* pour les autres solides platoniciens.

De même, on parlera toujours de Γ en projectif pour désigner en fait $\Psi(\Gamma)$.

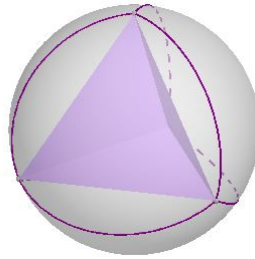
Dans toute la suite, on suppose avoir normalisé tous les solides platoniciens, avant de les projeter sur le plan par la projection stéréographique. On veut étudier alors leur groupe d'isométries en projectif.

II.2 ...Et en projectif

Le tétraèdre



Normalisation du tétraèdre



Construction du tétraèdre projeté

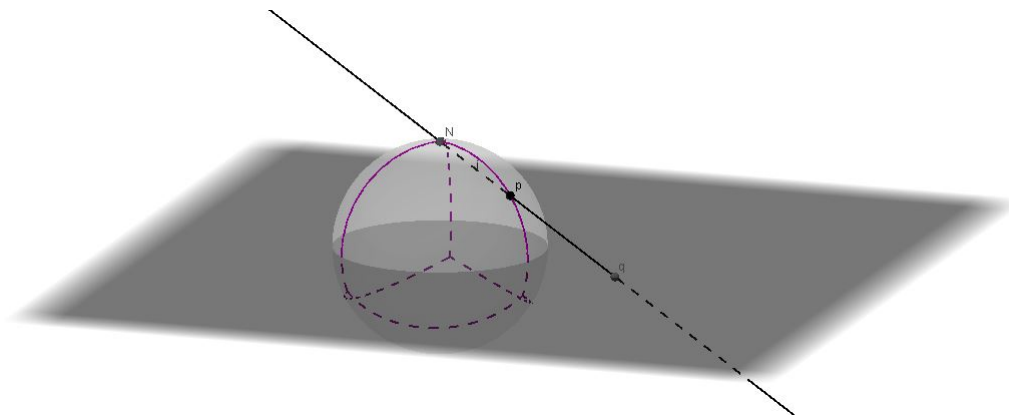


FIGURE II.11 – Projection stéréographique du tétraèdre

Nous obtenons ainsi :

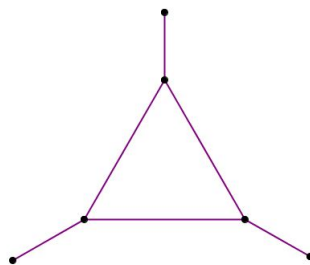


FIGURE II.12 – Tétraèdre en projectif

Description du groupe Γ_T en projectif

On cherche un système de générateurs de Γ_T .

On rappelle que Γ_T contient : l'identité, 8 rotations d'ordre 3 (il y a 2 rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de chaque sommet) et 3 rotations d'ordre 2 (rotations autour des 3 médianes joignant les milieux de 2 arêtes opposées).

L'idée est donc de considérer dans $SO_3(\mathbb{R})$ une rotation d'ordre 3 et une rotation d'ordre 2, les exprimer dans $PSU_2(\mathbb{C})$ grâce au théorème I.2.1 et démontrer qu'elles forment un système générateur de Γ_T .

• *Rotation d'ordre 3 :*

On considère $\rho_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{2\pi}{3}}$ la rotation d'ordre 3 dans $SO_3(\mathbb{R})$.

On note $t_T := \Psi\left(\rho_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{2\pi}{3}}\right)$ cette même rotation dans $PSU_2(\mathbb{C})$.

Grâce au théorème I.2.1, cette rotation s'écrit matriciellement ainsi :

$$\begin{aligned} t_T &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc $t_T : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$.

• *Rotation d'ordre 2 :*

On considère $\rho_{(0,0,1), \pi}$ la rotation d'ordre 2 dans $SO_3(\mathbb{R})$.

On la note $s_T := \Psi(\rho_{(0,0,1), \pi})$ dans $PSU_2(\mathbb{C})$.

Et elle s'écrit matriciellement ainsi :

$$s_T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition II.2.1. s_T et t_T engendrent le groupe Γ_T .

Rappel 2. On a $\mathfrak{A}_4 \simeq V_4 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Démonstration. On a déjà que : $|\Gamma_T| = 12$, $\text{ord}(s_T) = 2$ et $\text{ord}(t_T) = 3$.

De plus on vérifie, par simples calculs de matrices, que $t_T^{-1} s_T t_T \neq s_T$. On a donc aussi

$$t_T^{-2} s_T t_T^2 \neq t_T^{-1} s_T t_T.$$

Nous obtenons ainsi trois symétries différentes : $s_T, t_T^{-1} s_T t_T$ et $t_T^{-2} s_T t_T^2$, donc $4 \mid | \langle s_T, t_T \rangle |$ et $3 \mid | \langle s_T, t_T \rangle |$. Donc $12 \mid | \langle s_T, t_T \rangle |$.

De plus, on en déduit également que l'action par conjugaison de $\langle t_T \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur s_T n'est donc pas triviale. Le stabilisateur de s_T n'est pas $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, c'est donc l'identité.

Ces trois symétries et l'identité forment le groupe de Klein V_4 . Donc $V_4 \subset \langle s_T, t_T \rangle \subset \mathfrak{A}_4$.

On a donc $|\langle s_T, t_T \rangle| = 12$, et alors :

$$\text{Alors } \langle s_T, t_T \rangle \simeq \mathfrak{A}_4.$$

□



Le cube et son dual l'octaèdre

Après avoir normalisé le cube et l'octaèdre et après projection stéréographique, nous obtenons :

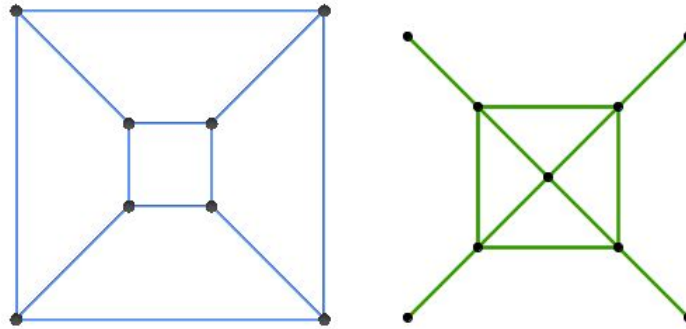


FIGURE II.13 – Cube (en bleu) et octaèdre (en vert) projectivisés

Description du groupe Γ_C en projectif

Pour cela, suivons le raisonnement utilisé pour décrire Γ_T .

Le groupe Γ_C est composé de 24 rotations : l'identité, 6 quarts de tour, 8 tiers de tour, 9 demi-tours. Nous allons donc considérer dans $SO_3(\mathbb{R})$ une rotation d'ordre 4 et une rotation d'ordre 3, les exprimer dans $PSU_2(\mathbb{C})$ grâce au théorème I.2.1 et démontrer qu'elles forment un système générateur de Γ_C .

- *Rotation d'ordre 4 :*

On considère $\rho_{(0,0,1), \frac{\pi}{2}} \in SO_3(\mathbb{R})$.

On note : $s_C := \Psi(\rho_{(0,0,1), \frac{\pi}{2}}) \in PSU_2(\mathbb{C})$ la rotation associée.

Par le théorème I.2.1, on a :

$$s_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

On remarque que $s_C \notin \Gamma_T$.

- *Rotation d'ordre 3 :* Nous avons vu grâce à la figure II.4 que nous pouvons faire apparaître deux tétraèdres dans un cube.

En visualisant les rotations d'ordre 3 sur cette même figure, on voit que, une rotation d'ordre 3 du cube et une rotation d'ordre 3 du tétraèdre, c'est du pareil au même ; on considère donc

$$\begin{aligned} t_C &= t_T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Proposition II.2.2. $\langle s_C, t_C \rangle$ engendre Γ_C .

Démonstration. Nous avons $s_C \notin \Gamma_T$ et $s_C^2 = s_T$.

De plus, $t_C = t_T \in \Gamma_T$. Donc : $\langle s_T, t_T \rangle \subset \langle s_C, t_C \rangle \subset \mathfrak{S}_4$.

Or, d'après la proposition II.2.1, $\Gamma_T \simeq \langle t_T, s_T \rangle$ et nous savons que $\Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4$, donc : $\mathfrak{A}_4 \subset \langle s_C, t_C \rangle \subset \mathfrak{S}_4$.

D'où :

$$\langle s_C, t_C \rangle \simeq \mathfrak{S}_4.$$

□

Puisque le cube et l'octaèdre sont duaux, ce qui est vrai pour le cube est vrai pour l'octaèdre. Ainsi :

$$\Gamma_O \simeq \mathfrak{S}_4.$$



L'icosaèdre

PIVOTER LA CONFIGURATION D'OR

Tout d'abord, notons que, dans le groupe de l'icosaèdre, il y a, entre autres, des rotations d'ordre 5. On les visualise aisément sur le solide, mais une fois effectuée la construction d'origine de l'icosaèdre, avec les rectangles d'or et les axes positionnés comme sur la figure II.1.2, on se rend compte que ces rotations vont être dures à expliciter. Qu'à cela ne tienne ! On va tourner l'icosaèdre, de sorte à simplifier l'expression de ces éléments d'ordre 5 : ramenons l'axe $(1, 1, 1)$ sur le point ∞ (puis on normalisera, pour rester sur la sphère, voir la figure II.2). Pourquoi l'infini ? Parce que l'on voit à travers la preuve du théorème I.2.1 que les matrices aux expressions les plus simples (diagonales !) sont celles de la première étape, où l'on considèrerait les rotations d'axe N .

La situation est la suivante : on se place dans le plan (xOz) , et l'on regarde la rotation que va subir le rectangle d'or présent dans ce plan (on rappelle que l'on a choisi des rectangles d'or de largeur $2g$, et de longueur 2) :

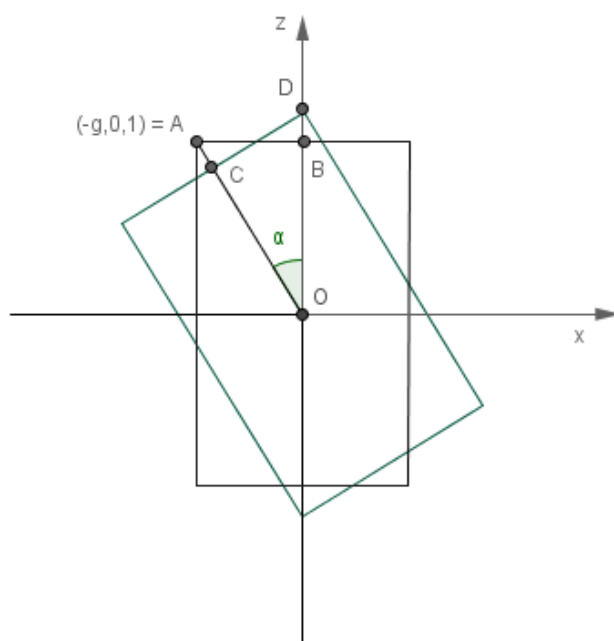


FIGURE II.14 – Et on pivote les rectangles...

Il s'agit à présent de calculer cet angle de rotation, α .

Pour ce faire, les bonnes vieilles relations de trigonométries suffisent à notre bonheur :

D'une part, $\tan(\alpha) = \frac{AB}{OB} = \frac{g}{1} = g$; d'autre part, $\tan(\alpha) = \frac{CD}{CO} = \frac{g}{1} = g$.

Ainsi, en prenant

$$\alpha = \arctan(g),$$

on place le point D sur l'axe des z , et en normalisant, on le place sur le pôle Nord de la sphère, c'est-à-dire le point ∞ : gagné!

Dorénavant, on appellera ρ la rotation que l'on a construite : $\rho := \rho_{(0,-1,0),\alpha}$.

CONSTRUCTION DE L'ICOSAÈDRE ET DU DODÉCAÈDRE PROJÉTÉS

La situation est à présent la suivante :

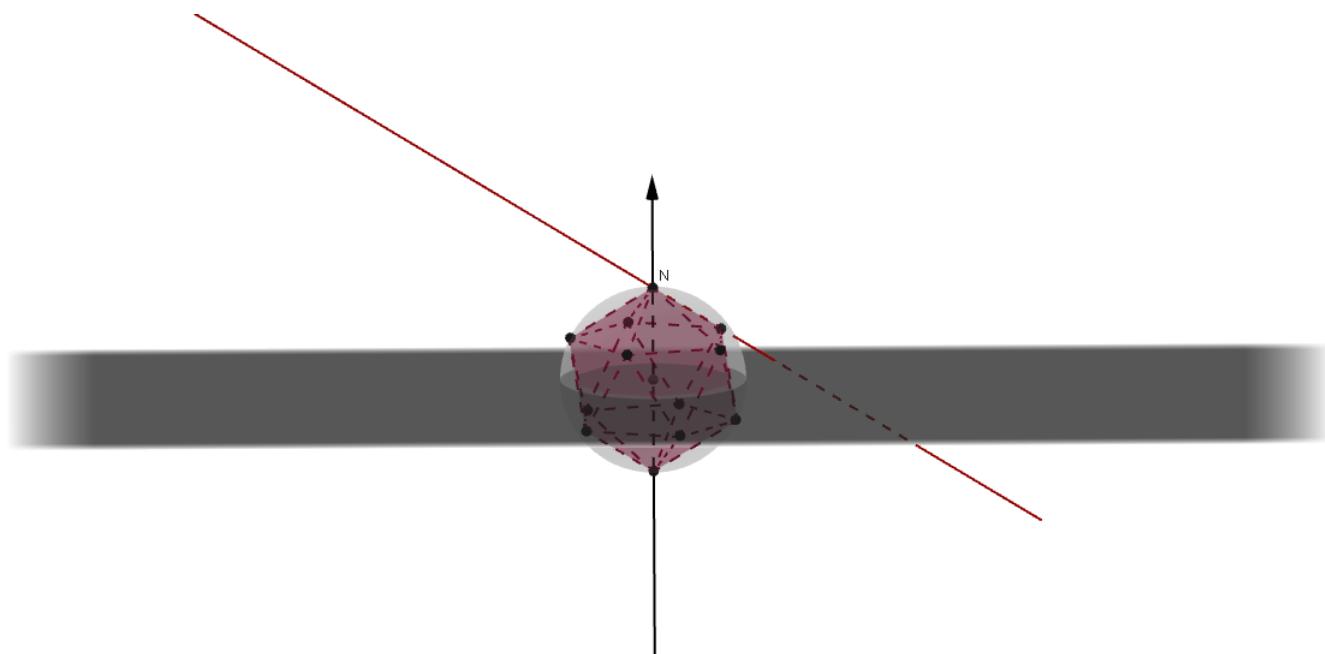


FIGURE II.15 – Icosaèdre pivoté inscrit dans la sphère

Il suffit alors de projeter chaque sommet de l'icosaèdre, comme illustré sur la figure II.15, pour finalement arriver à la projection du solide projectivisé :

Il faut imaginer que les "antennes" se rejoignent en un seul point : le point ∞ , pour former une face.

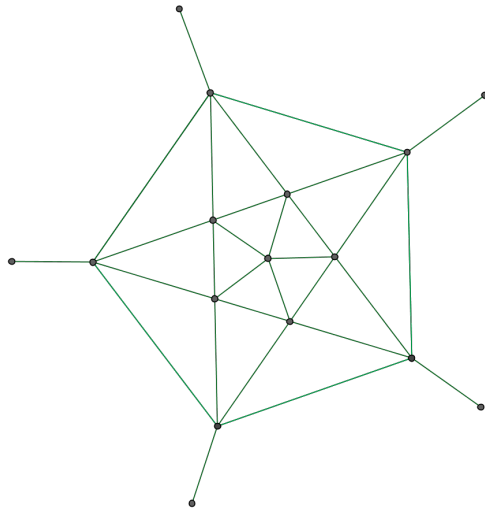


FIGURE II.16 – Icosaèdre projectivisé

Voici, au passage, la projection de son dual, le dodécaèdre (on omet de dessiner la face ∞) :

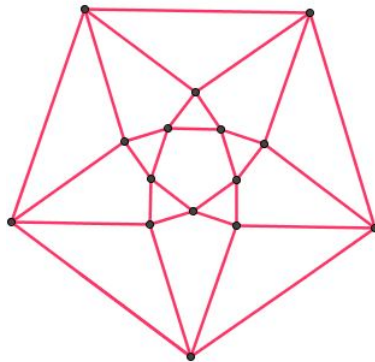


FIGURE II.17 – Dodécaèdre projectivisé

DESCRIPTION DU GROUPE Γ_I EN PROJECTIF

Nous allons ici nous pencher sur l'étude dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ des rotations d'ordre 5 d'une part, puis celles d'ordre 2 d'autre part ; nous verrons par la suite que cette étude suffit à décrire le groupe de l'icosaèdre projectivisé, car de tels éléments sont générateurs de Γ_I , voir II.2.3.

• *Rotation d'ordre 5 :*

Dans \mathbb{R}^3 , la rotation d'ordre 5 est notée $\rho_{\infty, \frac{2\pi}{5}}$. La même rotation en projectif est alors, d'après la proposition I.2.1, et en nommant cette rotation s_I :

$$s_I := f_{\infty, \frac{2\pi}{5}} : z \mapsto \zeta_5 \cdot z$$

Matriciellement, on aura :

$$s_I = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\pi}{5}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{10} & 0 \\ 0 & \zeta_{10}^{-1} \end{bmatrix}.$$

• *Rotation d'ordre 2 :*

Quand nous avons effectué une rotation d'angle α sur les rectangles d'or, nous avons simplifié l'écriture de la rotation d'ordre 5, mais légèrement compliqué celle d'ordre 2 : l'axe de rotation, au lieu d'être vertical, est désormais tourné d'un angle α . Sur la figure II.2, le nouvel axe de rotation est alors (AO) ; on fait donc une rotation selon l'axe porté par le point $(-g, 0, 1)$. Pour rester sur la sphère, on normalise, et on trouve le point

$$p := \frac{1}{\|(-g, 0, 1)\|} \cdot (-g, 0, 1)$$

Or, $\|(-g, 0, 1)\| = \sqrt{g^2 + 1} = \sqrt{2 - g}$, puisque g est solution de l'équation $g^2 + g - 1 = 0$.

On a alors, toujours d'après la formule I.2.1, l'expression de la rotation d'ordre 2 en projectif, que l'on nomme t_I :

$$\begin{aligned} t_I := f_{p, \pi} &= \frac{1}{\sqrt{2 - g}} \begin{pmatrix} i & -ig \\ -ig & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2 - g}} \begin{pmatrix} -1 & g \\ g & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, t_I est la rotation définie par

$$\frac{-i}{\sqrt{2 - g}} \begin{pmatrix} -1 & g \\ g & 1 \end{pmatrix}; z \mapsto \frac{g - z}{gz + 1}$$

Nous allons ici montrer, comme annoncé précédemment, que les deux rotations décrites ci-dessus engendrent le groupe de l'icosaèdre projectivisé, Γ_I .

Proposition II.2.3. s_I et t_I engendrent Γ_I .

Démonstration. On veut montrer que $\langle s_I, t_I \rangle \simeq \mathfrak{A}_5$. On a déjà une inclusion. De plus, comme s_I est d'ordre 5, alors

$$5 \mid |\langle s_I, t_I \rangle|.$$

De même, t_I est d'ordre 2, donc :

$$2 \mid |\langle s_I, t_I \rangle|.$$

Nous allons à présent calculer l'ordre de l'élément $t_I \cdot s_I$. On va montrer qu'il est d'ordre 3. Pour ce faire, on pourrait calculer les puissances de la matrice $t_I \cdot s_I$, et finir par tomber sur l'identité...Mais, on est entre gens raffinés et élégants, alors, on va opter pour une autre méthode. Notons A la matrice $(t_I s_I)$ (on omet le facteur $\frac{-i}{\sqrt{2-g}}$ dans l'expression de t_I , les calculs reviennent au même) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & g \\ g & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{10} & 0 \\ 0 & \zeta_{10}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta_{10} & g\zeta_{10}^{-1} \\ g\zeta_{10} & \zeta_{10}^{-1} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $\lambda := \text{tr}(A) = \zeta_{10}^{-1} - \zeta_{10}$, et que $\det(A) = -1 - g^2 = g - 2$.

Or, il se trouve que l'on peut écrire g en fonction de ζ_5 . On va le voir à travers un calcul pas très funky, mais nécessaire pour arriver à nos fins...

On sait que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; et, par une relation classique de trigonométrie, on a :

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{5})^2 - 1 = 2 \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{g}{2}.$$

Ainsi, on en déduit que :

$$g = 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}.$$

Revenons à nos moutons. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda &:= \text{tr}(A) = \zeta_{10}^{-1} - \zeta_{10} \\ \det(A) &= \zeta_5 + \zeta_5^{-1} - 2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lambda^2 = \det(A).$$

Le polynôme caractéristique de A , de degré 2, est donc de la forme

$$\chi_A = X^2 - \lambda X + \lambda^2.$$

Or, on remarque que ce polynôme divise $X^6 - \lambda^6$.

En effet, pour le voir, on utilise la décomposition en polynômes cyclotomiques de $X^6 - 1$. On a

$$X^6 - 1 = \prod_{d|6} \Phi_d = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

On a donc

$$X^6 - \lambda^6 = (X-\lambda)(X+\lambda)(X^2+\lambda X+\lambda^2)(X^2-\lambda X+\lambda^2)$$

De cette observation, on en déduit que $A^6 = \text{Id}$ dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$. Donc A est d'ordre 1, 2, 3 ou 6.

- A d'ordre 1? On voit bien que non.
- A d'ordre 6? On rappelle que $t_I s_I \in \mathfrak{A}_5$, groupe qui ne contient pas d'élément d'ordre 6, donc l'ordre de $t_I s_I$, qui divise l'ordre de \mathfrak{A}_5 par Lagrange, ne peut pas être 6.
- A d'ordre 2? Dans ce cas, on a $A^2 = 0$, et en reprenant le polynôme caractéristique de A , on a alors

$$\begin{aligned} \chi_A(A) = 0 &\Rightarrow -\lambda A + \lambda^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(-A + \lambda \text{Id}) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0, \text{ car } A \neq \lambda \text{Id} : \text{Absurde} \end{aligned}$$

Finalement, A est bien d'ordre 3 : victoire!

Regroupons tous ces résultats. On avait déjà $5 \mid |\langle s_I, t_I \rangle|$, et $2 \mid |\langle s_I, t_I \rangle|$; l'étude qui précède a mis en évidence un élément d'ordre 3; autrement dit, on a également

$$3 \mid |\langle s_I, t_I \rangle|$$

On en déduit que

$$30 = \text{ppcm}(2, 3, 5) \mid |\langle s_I, t_I \rangle|$$

Or, comme $\langle s_I, t_I \rangle$ est un sous-groupe de \mathfrak{A}_5 , on a que

$$|\langle s_I, t_I \rangle| \mid |\mathfrak{A}_5| = 60$$

En regroupant ces deux relations, on obtient

$$30 \mid |\langle s_I, t_I \rangle| \mid 60$$

Ainsi, $|\langle s_I, t_I \rangle| = 30$ ou 60 .

Or, si $|\langle s_I, t_I \rangle| = 30$, alors cela signifie que $\langle s_I, t_I \rangle$ est distingué (car d'indice 2) dans \mathfrak{A}_5 , qui est simple : absurde!

Finalement, $|\langle s_I, t_I \rangle| = 60$, et alors

$$\boxed{\langle s_I, t_I \rangle \simeq \mathfrak{A}_5}$$

◇

Chapitre III

Recherche d'invariants



III.1 Etude des Γ -orbites sur la sphère

Prenons un sous-groupe Γ de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$; il agit naturellement sur la sphère en dimension 3. C'est cette action que nous allons étudier plus en profondeur ; nous allons voir qu'elle introduit une notion clef pour tout ce qui va suivre : la *dégénérescence des orbites*.

INTRODUCTION DE LA NOTION DE DÉGÉNÉRESCENCE DES ORBITES

On considère le morphisme induit par l'action décrite plus haut :

$$\begin{aligned}\Phi : \Gamma &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{S}^2) \\ g &\longmapsto \Phi_g : p \mapsto g \cdot p = g(p)\end{aligned}$$

On prend un point p sur la sphère, et l'on cherche à déterminer son stabilisateur, Γ_p . On met alors en évidence deux types de points sur la sphère : dans le résultat qui suit, on montre effectivement qu'il existe un nombre fini de points qui sont de stabilisateur trivial ; les stabilisateurs des autres points étant donc de cardinal strictement inférieur à $|\Gamma|$.

Dans le langage des groupes, cela se traduit par le résultat suivant :

Proposition III.1.1. *Il existe un ensemble fini \mathcal{P} de points de la sphère, tel que Γ agit librement sur la sphère \mathbb{S}^2 privée de cet ensemble.*

Démonstration. Soit p un point de \mathbb{S}^2 , pour l'instant quelconque, et soit g dans le stabilisateur de p . On a donc $g \cdot p = p$: p est alors un vecteur propre pour la valeur propre 1 de g (tout point de la sphère peut être vu comme un vecteur, de droite directrice (Op)).

Or, g possède trois valeurs propres, que l'on note λ_1, λ_2 et λ_3 . Comme g est dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, son déterminant est égal à 1, et comme le déterminant d'un endomorphisme est le produit de ses valeurs propres, on a la première égalité :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (1)$$

De plus, g est *a fortiori* dans $O_3(\mathbb{R})$, donc ses valeurs propres sont toutes de module égal à 1, autrement dit :

$$|\lambda_i| = 1 \quad \forall i \quad (2)$$

On sait déjà qu'une des valeurs propres de g est 1, mettons $\lambda_1 = 1$.

Comme g est réel, alors les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 vérifient forcément :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \bar{\lambda}_3 \\ \text{ou } \lambda_2, \lambda_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Étudions les deux cas.

Premier cas : $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$

Dans ce cas, grâce à (1), on en déduit que

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$$

Second cas : $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \pm 1 \\ \lambda_3 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Dans ce cas-là, pour p fixé sur la sphère, et $g \in \Gamma_p$, on a deux choix possibles pour les valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (1, 1, 1) \\ \text{ou } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (1, -1, -1) \end{aligned}$$

Ainsi, que ce soit dans le premier comme dans le second cas, on voit qu'un élément de Γ non trivial ne possède qu'une seule valeur propre égale à 1 ; autrement dit, on a le lemme suivant :

Lemme III.1.2. *Si $g \neq \text{Id}$, alors g ne possède qu'une seule droite fixe : l'axe de rotation.*

Traçons l'axe de rotation d'un certain g dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ dans la sphère :

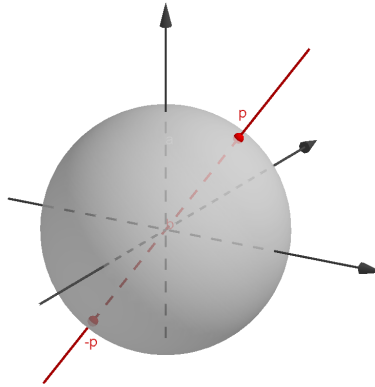


FIGURE III.1 – Axe de rotation dans la sphère : apparition de points antipodaux

On voit alors que le lemme III.1.2 se traduit par : si $g \neq \text{Id}$, alors g fixe deux points sur la sphère, et ces points sont antipodaux.

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans le groupe Γ (hey, c'est un groupe fini!), alors on va pouvoir compter le nombre de points sur la sphère qui sont fixés par une rotation de Γ ; ce nombre est borné par

$$2(|\Gamma| - 1),$$

puisque chaque élément de Γ , exceptée l'identité, fixe deux points.

◇

C'est ici qu'apparaissent les notions d'orbites dégénérées, et non dégénérées. En effet, on sait que l'on a la bijection

$$\mathcal{O}_p \simeq \Gamma/\Gamma_p,$$

où \mathcal{O}_p désigne l'orbite du point p sous l'action du groupe Γ , et Γ_p désigne le stabilisateur de p , comme ci-dessus.

On a donc deux cas qui se présentent à nous :

- Si l'on considère les points appartenant à l'ensemble $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{P}$, alors, on l'a vu, leur stabilisateur est trivial, quelque soit le point choisi, et on a donc :

$$\mathcal{O}_p \simeq \Gamma$$

Autrement dit,

$$|\mathcal{O}_p| = |\Gamma|.$$

Dans ce cas, on parlera d'orbites *non dégénérées*.

- Si l'on se place dans l'ensemble \mathcal{P} , alors dans ce cas, le stabilisateur des points ne sont pas triviaux, et alors on a

$$|\mathcal{O}_p| < |\Gamma|.$$

Ici, on parlera alors d'orbites *dégénérées*.

Remarque III.1.3. On a considéré l'action des sous-groupes de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère, mais l'on rappelle que lors du chapitre II et de l'étude des solides platoniciens, on avait inscrit ces derniers...dans la sphère! Ainsi, on comprend aisément que dans la suite, on ne prendra pas n'importe quel sous-groupe de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ mais des groupes de solides platoniciens, et au lieu de considérer l'action de ce groupe sur la sphère toute entière, on se bornera à l'étudier dans le solide en question, en se rappelant que les groupes d'isométries positives d'un solide et de son normalisé coïncident ; le groupe Γ désignera désormais le groupe d'isométries positives du solide platonicien considéré, mais normalisé, sur la sphère.

Dans ce qui va suivre, on va s'intéresser aux orbites dites dégénérées.

ETUDE D'UN EXEMPLE : LE CUBE

Commençons par détailler un exemple illustrant la notion d'orbites dégénérées, celui du cube.

Exemple III.1.4. Le cube

Rappelons que, dans le cas du cube, on a $\Gamma = \mathfrak{S}_4$, d'après la section II.1.2.

Orbites non dégénérées : Un point générique de la sphère a une Γ -orbite de cardinal $|\mathfrak{S}_4| = 24$.

Orbites non dégénérées : Pour décrire les orbites dégénérées, il faut repérer les points qui sont sur un axe de rotation d'éléments non triviaux du groupe Γ .

Commençons donc par décrire les éléments du groupe d'isométries positives du cube, \mathfrak{S}_4 .

- Il y a les rotations d'ordre 3, qui ont pour axe les grandes diagonales du cube :

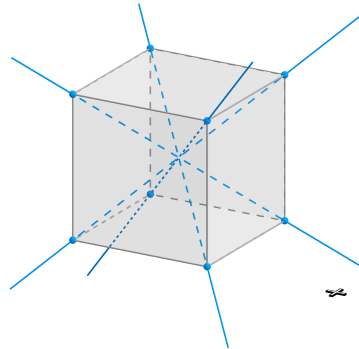


FIGURE III.2 – Axes des rotations d'ordre 3 du cube

- On a les rotations d'ordre 4, qui ont pour axe les droites passant par les faces du cube :

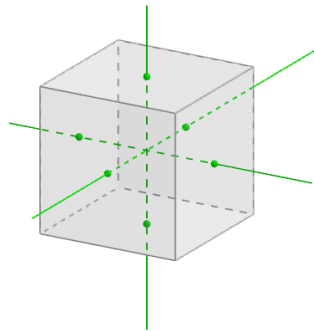


FIGURE III.3 – Axes des rotations d'ordre 4 du cube

- Enfin, il y a les rotations d'ordre 2, qui ont pour axe les droites passant par les milieux des arêtes opposées :

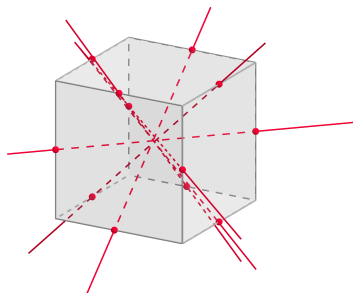


FIGURE III.4 – Axes des rotations d'ordre 2 du cube

Finalement, en regroupant tous ces résultats, on voit que l'on peut classer les orbites dégénérées en trois types :

- L'orbite des sommets ; elle est d'ordre 8, et tous les stabilisateurs des points sont d'ordre 3 ;
- L'orbite des centres de faces ; elle est d'ordre 6, et tous les stabilisateurs des points sont d'ordre 4 ;
- L'orbite des milieux des arêtes ; elle est d'ordre 12, et tous les stabilisateurs des points sont d'ordre 2.

NOMBRE D'ORBITES DÉGÉNÉRÉES DES SOLIDES PLATONICIENS

L'exemple III.1.4 a montré que l'action de \mathfrak{S}_4 sur le cube nous donnait trois orbites dégénérées. Qu'en est-il des autres solides platoniciens ?

Théorème III.1.5. *Soit $\Gamma \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$ un groupe fini. Alors Γ agit sur la sphère avec deux ou trois orbites dégénérées.*

Démonstration. On rappelle que \mathcal{P} désigne l'ensemble des points de la sphère qui sont fixés par une rotation du groupe Γ ; autrement dit, \mathcal{P} est l'ensemble des points sur la sphère \mathbb{S}^2 qui sont sur l'axe de rotation d'un élément non trivial de Γ .

La démonstration va s'effectuer en plusieurs étapes.

- Γ agit naturellement sur \mathcal{P} :

Prenons $p \in \mathcal{P}$, et $g \in \Gamma$. Montrons que $g.p := g(p) \in \mathcal{P}$.

Comme p est dans \mathcal{P} , alors p est sur l'axe de rotation d'un certain $h_p \neq e$, $h_p \in \Gamma$.

Montrons que, dans ce cas, $g(p)$ est sur l'axe de rotation de l'élément $gh_p g^{-1}$ de Γ , non trivial puisque $h_p \neq e$.

On a l'égalité $(gh_p g^{-1})(g(p)) = g(h_p(p)) = g(p)$.

Ainsi, on a bien que $g(p)$ est fixé par $gh_p g^{-1} \in \Gamma$, $gh_p g^{-1} \neq e$; donc $g(p)$ appartient bien à \mathcal{P} ; autrement dit :

Γ agit bien sur \mathcal{P} .

- A présent, on va considérer l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ g &\longmapsto \text{axe de } g \cap \mathbb{S}^2 \quad (\text{modulo antipodie}) \end{aligned}$$

Prenons alors $\{p, -p\}$ une paire de points antipodaux de \mathbb{S}^2 , et regardons son antécédent par l'application φ : tous les éléments dans Γ qui fixent une paire de points fixes $\{p, -p\}$ sont les éléments appartenant au stabilisateur de ladite paire sous l'action naturelle du groupe Γ sur \mathcal{P} ; on a donc $\Gamma_p = \varphi^{-1}(\{p, -p\})$.

Or, un point et son antipodal ont même stabilisateur, donc $\Gamma_p = \Gamma_{-p}$.

Résumons les dernières observations effectuées : on prend un point p de la sphère. On considère son stabilisateur $\Gamma_p \setminus \{e\}$ (on enlève l'identité, puisqu'on a vu qu'il correspondait au seul élément de Γ qui possède plus d'un axe fixe) ; les stabilisateurs de p et de $-p$ coïncident. Si l'on somme sur tout l'ensemble \mathcal{P} , on voit que l'on peut recouvrir l'ensemble $\Gamma \setminus \{e\}$, pour aboutir à la formule suivante :

$$|\Gamma| - 1 = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} (|\Gamma_p| - 1)$$

Maintenant, on va jouer un peu avec cette formule. On sait que l'on a la bijection

$$\mathcal{O}_p \simeq \Gamma / \Gamma_p.$$

Autrement dit, on peut remplacer $|\Gamma_p|$ par $\frac{|\Gamma|}{|\mathcal{O}_p|}$ dans la formule précédente ; on obtient

$$|\Gamma| - 1 = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{|\Gamma|}{|\mathcal{O}_p|} - 1 \right)$$

Maintenant, au lieu de sommer sur tous les $p \in \mathcal{P}$ en vrac, on va sommer "par paquets" sur tous les $p \in \mathcal{P}$ par orbites ; par définition de \mathcal{P} , cela revient à sommer sur toutes les orbites *dégénérées*, celles qui sont de cardinal strictement inférieur à celui de Γ . Cela donne

$$|\Gamma| - 1 = \frac{1}{2} \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} \sum_{p \in \mathcal{O}} \left(\frac{|\Gamma|}{|\mathcal{O}|} - 1 \right)$$

La formule ne dépendant pas de p , la seconde somme nous donne

$$2(|\Gamma| - 1) = \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} |\mathcal{O}| \left(\frac{|\Gamma|}{|\mathcal{O}|} - 1 \right),$$

c'est-à-dire

$$2(|\Gamma| - 1) = \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} (|\Gamma| - |\mathcal{O}|), \quad (\star)$$

A présent, notons pour simplifier $n_{\mathcal{O}} := |\Gamma_p| (= \frac{|\Gamma|}{|\mathcal{O}|})$, pour $p \in \mathcal{O}$; $n_{\mathcal{O}}$ ne dépend pas du p pris dans l'orbite \mathcal{O} .

Comme on considère des orbites *dégénérées*, le stabilisateur est de cardinal strictement supérieur à 1; on a donc

$$2 \leq n_{\mathcal{O}} \leq |\Gamma| \quad (**)$$

En notant enfin k le nombre d'orbites dégénérées, et en divisant de chaque côté par $|\Gamma|$, on obtient l'égalité, pour $(*)$:

$$2(1 - \frac{1}{|\Gamma|}) = k - \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} \frac{1}{n_{\mathcal{O}}} \quad (***)$$

Et maintenant, on utilise la suite d'inégalités $(**)$, on effectue les opérations nécessaires pour faire apparaître le terme $k - \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} \frac{1}{n_{\mathcal{O}}}$, et l'on trouve l'encadrement suivant

$$k - \frac{k}{2} \leq k - \sum_{|\mathcal{O}| < |\Gamma|} \frac{1}{n_{\mathcal{O}}} \leq k - k \cdot \frac{1}{|\Gamma|}$$

On modifie cet encadrement, en utilisant notamment l'égalité $(***)$

$$\frac{k}{2} \leq 2(1 - \frac{1}{|\Gamma|}) \leq k(1 - \frac{1}{|\Gamma|})$$

On a alors

$$2 \leq k,$$

et $k \leq 4(1 - \frac{1}{|\Gamma|}) < 4$

Autrement dit,

$$\boxed{k = 2, \text{ ou } k = 3.}$$

◇

Remarque III.1.6. Avant de continuer, et en parlant de dégénérescence, rappelons un fait important, et qui glorifie encore l'étude des solides platoniciens : les groupes de rotations des polyèdres réguliers fournissent tous les sous-groupes finis non dégénérés de $SO_3(\mathbb{R})$.

Illustrons ce beau théorème III.1.5 par quelques exemples simples.

Exemples III.1.7.

1. **Cas cyclique**

Prenons un n -gone, que l'on considère dans la sphère :

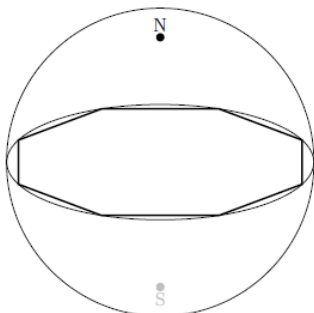


FIGURE III.5 – n -gone inscrit dans la sphère

On voit alors que les deux seules orbites dégénérées sont les singletons $\{N\}$ et $\{S\}$.

On a donc

$$k = 2$$

2. Cas diédral

Prenons maintenant l'exemple du groupe diédral, D_n . On considère que c'est le groupe d'isométrie du "diamant", c'est-à-dire du solide que l'on pourrait décrire comme étant deux pyramides dont les bases sont des n -gones que l'on aurait collés ensemble...un diamant, quoi.

On a

$$D_n = C_n \cup sC_n,$$

où s désigne l'inversion des pôles dans la sphère ; $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- On a déjà une première orbite dégénérée : $\{N, S\}$.
- Pour observer les autres orbites dégénérées, penchons-nous sur ce dessin, situé dans le plan équatorial de la sphère :

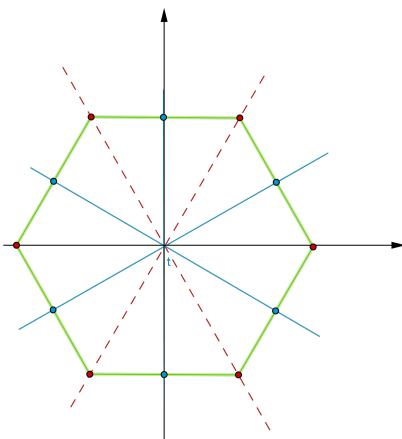


FIGURE III.6 – Orbites dégénérées-Cas diédral

On voit que l'on a deux types de rotations : celles dont l'axe de rotation passent par les sommets diamétralement opposés, et celles dont l'axe coupent les arêtes opposées en leur milieu. Cela définit deux autres orbites dégénérées : l'orbite des sommets, et l'orbites des milieux d'arêtes.

Par conséquent :

$$\boxed{k = 3}$$

Finalement, on voit à travers ces exemples que les trois orbites dégénérées vont correspondre à l'ensemble des sommets, l'ensemble des milieux d'arêtes, et l'ensemble des milieux de faces ¹ !

On va pouvoir décrire les orbites dégénérées de tous les solides platoniciens.

• En effet, en dimension 2, on a $k = 2$, donc deux orbites dégénérées : \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 ; n_1 et n_2 désignent donc, on le rappelle, le cardinal du stabilisateur d'un point de l'orbite \mathcal{O}_1 , resp. \mathcal{O}_2 . De l'égalité (**), on tire alors :

$$2\left(1 - \frac{1}{|\Gamma|}\right) = 2 - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{2}{|\Gamma|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

1. Orbite qui n'existe pas en dimension 2...

- De même, pour $k = 3$, on a trois orbites dégénérées, et l'on obtient :

$$1 + \frac{2}{|\Gamma|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

De ces deux égalités, on tire un nombre fini de valeurs possibles pour n_1 , n_2 et n_3 ; on ne se lancera pas dans cette étude, jugée trop longue, mais l'on va résumer les résultats dans le tableau suivant :

	n_1	n_2	n_3	$ \Gamma $	$ \mathcal{O}_1 $	$ \mathcal{O}_2 $	$ \mathcal{O}_3 $
D_n	n	2	2	$2n$	2	n	n
Tétraèdre	3	3	2	12	4	4	6
Octaèdre	4	3	2	24	6	8	12
Icosaèdre	5	3	2	60	12	20	30

où \mathcal{O}_1 désigne l'orbite des sommets, \mathcal{O}_2 celle des centres de faces, et \mathcal{O}_3 celle des arêtes.

III.2 Fonctions invariantes



III.2.1 Présentation du problème

Faisons le point sur ce que l'on a découvert dans la partie précédente : on a $\Gamma \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$ qui agit sur la sphère \mathbb{S}^2 et qui crée des orbites non dégénérées ($|\mathcal{O}_p| = |\Gamma|$) et dégénérées ($|\mathcal{O}_p| < |\Gamma|$).

Le but de la première partie de ce mémoire était de montrer que chaque sous-groupe de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ qui agit sur \mathbb{S}^2 peut être vu comme un sous-groupe de $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ qui agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Ainsi, nous avons maintenant $\Gamma \subset \text{PSU}_2(\mathbb{C})$ qui construit des orbites dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Idée. Le groupe Γ construit des orbites dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, il faut maintenant :

1. Trouver de bonnes étiquettes pour ces orbites ;
2. A partir d'une étiquette, retrouver l'orbite associée.

Qu'est ce qui se cache sous ce concept d'« étiquette » ?

Illustrons cela par un exemple dans \mathbb{R}^2 : soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) un repère orthonormé et \vec{v} un vecteur. Etiqueter ce vecteur consiste à donner ses coordonnées en utilisant les fonctions coordonnées $e_1^* : (x, y) \mapsto x$ et $e_2^* : (x, y) \mapsto y$ comme suit : $\vec{v} \mapsto (e_1^*(\vec{v}), e_2^*(\vec{v}))$.

Dans le sens inverse, à chaque couple (x, y) on associe un seul vecteur dans \mathbb{R}^2 .

Ainsi, les fonctions coordonnées donnent une étiquettes aux vecteurs.

Revenons à notre problème, nous avons une Γ -orbite qui forme une famille de points et on veut trouver des fonctions rationnelles en z "aussi bonnes que possible" pour étiqueter cette famille. Inversement, à partir de l'étiquette, on veut retrouver la famille. Pour cela, nous allons étudier les fonctions dites Γ -invariantes.

Définition III.2.1. Soit $f \in \mathbb{C}(z)$. La fonction f est dite Γ -invariante si, $\forall \gamma \in \Gamma, f \circ \gamma = f$.

On note : $\mathbb{C}(z)^\Gamma = \{f \in \mathbb{C}(z) \text{ telle que } : \forall \gamma \in \Gamma, f \circ \gamma = f\}$

Remarque III.2.2. $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ est un corps.

Exemple III.2.3. **Fonctions Γ -invariantes dans le cas \mathcal{C}_n :**

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \zeta_{2n}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-k} \end{bmatrix}, \text{ où } \zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} \right\}.$$

Soit $\gamma_k : z \mapsto \zeta_n^k z \in \Gamma$.

La fonction $f : z \mapsto z^n$ est Γ -invariante, car : $(f \circ \gamma_k)(z) = f(\zeta_n^k z)$
 $= (\zeta_n^k z)^n$
 $= z^n$
 $= f(z)$.

Ainsi, nous avons trouvé toute une famille de fonctions Γ -invariantes : le sous-corps de $\mathbb{C}(z)$ engendré par z^n et \mathbb{C} , c'est-à-dire les fonctions de la forme $\frac{P(z^n)}{Q(z^n)}$.

Nous verrons dans la partie III.3 que cela suffit à obtenir toutes les fonctions Γ -invariantes.

Lien entre f et les Γ -orbites

On considère l'orbite du point $0 : \Gamma.0 = \{0, \dots, 0\}$ et on remarque que : $(z - 0)\dots(z - 0) = z^n$; ainsi « enlever » l'orbite dégénérée donne la fonction trouvée.

Si l'on avait pris une autre orbite d'un point dans \mathbb{C} , on aurait obtenu :

$$(z - 1)(z - \zeta_n)\dots(z - \zeta_n^{n-1}) = z^n - 1$$

$$(z - a)(z - \zeta_n a)\dots(z - \zeta_n^{n-1}a) = z^n - a^n, \text{ pour } a \in \mathbb{C}$$

Mais nous voilà confrontés à un problème : on ne peut pas appliquer cette méthode avec le point ∞ . Nous avons donc besoin de relever le problème dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Voyons comment passer de l'un à l'autre.

Relèvement dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On rappelle que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_1 : z_2]; (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ et que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, [\lambda z_1, \lambda z_2] = [z_1, z_2]$.

On définit alors : $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \infty & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$(z, 1) \longleftarrow z$$

Et on note : $p : \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \gamma = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

On a : $\text{Ker}(p) = \{\lambda \text{Id}, \lambda \text{Id} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})\} = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

On pose alors :

$$\Gamma' = p^{-1}(\Gamma), |\Gamma'| = 2|\Gamma|.$$

Nous pouvons maintenant relever le problème dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Relèvement de f

Maintenant que nous avons relevé notre problème dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que devient f ?

Nous allons lui associer deux polynômes homogènes G et H . Traduisons cela par un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{(G,H)} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

Rappel 3. Un polynôme $G \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ est homogène si tous ses termes sont de même degré, autrement dit, G s'écrit sous la forme :

$$G(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^d a_i Z_1^i Z_2^{d-i}.$$

Définition III.2.4. Soit $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, Γ -invariante.

On lui associe deux polynôme G et H homogènes, de même degré, premiers entre eux (ils n'ont pas de racine commune) et qui vérifient : $\frac{G(Z_1, Z_2)}{H(Z_1, Z_2)} = f\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$.

Proposition III.2.5. *A chaque $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspond un unique couple (G, H) à un scalaire près ; autrement dit :*

Si (G, H) et (G_1, H_1) sont associés à la même fonction f alors $\exists \lambda \in \mathbb{C} ; G_1 = \lambda G$ et $H_1 = \lambda H$.

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ est factoriel, on applique le lemme de Gauss :

$$\begin{aligned} \frac{G}{H} = \frac{G_1}{H_1} &\Rightarrow GH_1 = G_1H \\ &\Rightarrow H_1|H \text{ et } G_1|G \\ &\Rightarrow H|H_1 \text{ et } G|G_1 \\ &\Rightarrow H = \lambda H_1 \text{ et } G = \mu G_1 \\ &\Rightarrow \lambda = \mu \end{aligned}$$

□

Remarque III.2.6. On peut en réalité voir qu'à f on associe la droite $[G : H]$ qui est unique.

Relèvement des orbites

Nous avons l'application : $z \mapsto [z : 1]$ et $\infty \mapsto [1 : 0]$.

De cette façon, à un élément p d'une orbite on associe une droite D_i de \mathbb{C}^2 et ainsi, à une orbite \mathcal{O} on associe une union de droites $\cup_i D_i$.

Lien entre les polynômes et les droites

Maintenant qu'on sait associer à f un couple de polynômes (G, H) et à une orbite une union de droites, comment tout relier ensemble ?

Voyons pour cela, quelques propriétés.

Proposition III.2.7. *Tout polynôme homogène dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ se factorise en produit de formes linéaires.*

Démonstration. Soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$.

$$\begin{aligned} P(Z_1, Z_2) &= \sum_{(n_1, n_2)} a_{n_1, n_2} Z_1^{n_1} Z_2^{n_2}, \quad \text{avec } n_1 + n_2 = n \\ &= Z_2^n \sum_{(n_1, n_2)} a_{n_1, n_2} Z_1^{n_1} Z_2^{-n_1} \\ &= Z_2^n \sum_{(n_1, n-n_1)} a_{n_1, n-n_1} \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{n_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Z_2^n \sum_{(n_1, n-n_1)} a_{n_1, n-n_1} z^{n_1} \\
 &= Z_2^n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i z + \mu_i \right), \text{ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss }^2, \text{ avec} \\
 &\forall i, (\lambda_i, \mu_i) \neq (0, 0) \\
 &= \prod_{i=1}^n (\lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2)
 \end{aligned}$$

□

Grâce à cette expression, la recherche des zéros du polynôme est plus facile.

Notations. Soit $P \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$. On note $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des zéros de P avec leur multiplicité.

Proposition III.2.8. Si $P \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ est un polynôme homogène, $\mathcal{Z}(P)$ est une union de droites avec multiplicités.

Réciproquement, si l'on se donne une union de droites $\cup_i D_i = \cup_i [\lambda_i : \mu_i]$, de multiplicités n_i , il existe un polynôme, unique à un scalaire près, tel que $\mathcal{Z}(P) = \cup_i D_i$.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, homogène. Par la proposition III.2.7 précédente, P s'écrit comme un produit de polynômes homogènes de degré 1 :

$$P(Z_1, Z_2) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2).$$

On considère alors l'application Φ , qui à P associe l'ensemble des $[\mu_i : -\lambda_i]$; cette application est la composée de φ , qui à P associe la famille des $[\lambda_i : \mu_i]$, et de $\iota : [\lambda_i : \mu_i] \mapsto [\mu_i : -\lambda_i]$.

La fonction φ est bien définie puisque, dans la décomposition de P en polynômes homogènes de degré 1, de la forme $(\lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2)$, les coefficients λ_i et μ_i sont uniques à scalaire multiplicatif près, par factorialité de l'anneau $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$. La fonction ι est, de même, clairement bien définie.

On a donc défini une application Φ qui va de $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]/\mathbb{C}^*$ dans l'ensemble des droites de \mathbb{C}^2 , comptées avec multiplicités; c'est la fonction qui à un polynôme P associe l'ensemble de ses zéros, $\mathcal{Z}(P)$, et on a vu que cet ensemble s'écrit comme une union de droites : $([\mu_i : -\lambda_i])_i$. La première assertion de la proposition est démontrée.

Pour la réciproque, considérons l'application ψ , qui à une union de droites de \mathbb{C}^2 , notée $([\mu_i : -\lambda_i])_i$, associe le polynôme $P := k \prod (\lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2)$, pour $k \in \mathbb{C}^*$.

La fonction ψ est la réciproque de ϕ , et par définition, elle associe, à une famille de droites, un polynôme, unique à scalaire près, qui possède pour zéros exactement cette union de droites.

□

Remarque III.2.9. On déduit le résultat suivant : soit $Q \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ un autre polynôme homogène. Si $\mathcal{Z}(P) = \mathcal{Z}(Q)$ alors $\exists \lambda \mid P = \lambda Q$.

2. En effet, d'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme non constant à coefficients dans \mathbb{C} admet une racine dans \mathbb{C} ; *a fortiori*, toutes ses racines sont dans \mathbb{C} . On peut donc factoriser ledit polynôme en produit de polynômes de degré 1.

Lien entre étiquette et orbite

Nous voilà prêts à mettre des étiquettes sur nos orbites et à les retrouver en partant de l'étiquette !

$$\begin{aligned} \text{orbite} = \cup_i D_i &\mapsto P \text{ le polynôme qui admet } \cup_i D_i \text{ comme zéros} \\ \text{orbite} = \cup_i D'_i \text{ correspondant aux zéros de } Q &\leftarrow Q \end{aligned}$$

Exemples III.2.10. Cas C_n

On a deux orbites dégénérées $\{\infty\}$ et $\{0\}$, toutes les deux de multiplicité n .

Étiquette de $\{\infty\}$:

$$\infty \mapsto [1 : 0] \mapsto P_\infty(Z_1, Z_2) = 0 \times Z_1 + 1 \times Z_2 = Z_2.$$

$$\text{Donc } \Gamma.\infty \mapsto Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2 = Z_2^n.$$

Étiquette de $\{0\}$:

$$0 \mapsto [0 : 1] \mapsto P_0(Z_1, Z_2) = 1 \times Z_1 + 0 \times Z_2 = Z_1.$$

$$\text{Donc } \Gamma.0 = Z_1^n.$$

Cas D_n

On a trois orbites dégénérées : $\{0, \infty\}$, d'ordre 2 et de multiplicité n , $\{\text{sommets}\}$ d'ordre n et de multiplicité 2 et $\{\text{milieux d'arêtes}\}$ d'ordre n et de multiplicité n .

Étiquette de $\{0, \infty\}$: D'après ce qui a été fait précédemment :

$$\Gamma.0 = Z_1^n Z_2^n.$$

Étiquette des sommets : $\{\text{sommets}\} = \{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$.

$$1 \mapsto [1 : 1] \mapsto Z_1 - Z_2$$

$$\zeta_n \mapsto [\zeta_n : 1] \mapsto Z_1 - \zeta_n Z_2$$

⋮

$$\zeta_n^{n-1} \mapsto [\zeta_n^{n-1} : 1] \mapsto Z_1 - \zeta_n^{n-1} Z_2$$

$$\text{Donc } \Gamma.1 \mapsto \left((Z_1 - Z_2)(Z_1 - \zeta_n Z_2) \dots (Z_1 - \zeta_n^{n-1} Z_2) \right)^2 = (Z_1^n - Z_2^n)^2.$$

Maintenant que nous avons la technique pour créer des fonctions qui étiquettent correctement les orbites, voyons comment, à partir de ces fonctions, obtenir des fonctions Γ -invariantes.



III.2.2 Construction de fonctions Γ -invariantes

Semi-invariance et caractères

INTRODUCTION DES NOTIONS

Résumons la situation : ce que l'on veut, c'est construire des fonctions Γ -invariantes, c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall \gamma \in \Gamma, f \circ \gamma = f,$$

avec $\Gamma \subset \text{PSU}_2(\mathbb{C})$.

$$\forall \gamma' \in \Gamma', \frac{G}{H} \circ \gamma' = \frac{G}{H}. \quad (\star)$$

Cependant, on voit que cette égalité ne revient pas à résoudre

$$\begin{aligned} G \circ \gamma' &= G \\ H \circ \gamma' &= H \end{aligned}$$

En effet, il suffit que G et H vérifient

$$\begin{aligned} G \circ \gamma' &= \lambda_{\gamma'} G \\ H \circ \gamma' &= \lambda_{\gamma'} H \end{aligned}$$

pour un certain $\lambda_{\gamma'}$ dépendant de γ' pour vérifier l'égalité (\star) ³.

Ainsi apparaît la notion de fonctions *semi-invariantes*.

Définition III.2.11. On dit qu'une fonction $F \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ est *semi-invariante* si

$$\forall \gamma' \in \Gamma', \exists \lambda_{\gamma'} \in \mathbb{C}; F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F.$$

CONSTRUCTION DE FONCTIONS SEMI-INVARIANTES. EXEMPLES

Notre but, dès lors, est de construire des fonctions semi-invariantes.

Commençons par un lemme.

Lemme III.2.12. *L'application*

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto \lambda_{\gamma'} \end{aligned}$$

3. Nous verrons grâce au théorème III.2.22 que c'est une condition nécessaire, c'est-à-dire que la construction des fonctions invariantes se fait à partir de fonctions que l'on qualifie dans la suite de semi-invariantes, et uniquement à l'aide de telles fonctions.

est un morphisme de groupes. L'application ρ est donc une représentation de degré 1 de Γ' , autrement dit, un caractère.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tous $\gamma', \gamma'' \in \Gamma'$, $\rho(\gamma'\gamma'') = \rho(\gamma') \cdot \rho(\gamma'')$.

D'une part, on a $\rho(\gamma'\gamma'') = \lambda_{\gamma'\gamma''}$, qui vérifie

$$F \circ \gamma'\gamma'' = \lambda_{\gamma'\gamma''} F,$$

pour F une fonction Γ' -semi-invariante.

D'autre part, $\rho(\gamma') \cdot \rho(\gamma'') = \lambda_{\gamma'} \cdot \lambda_{\gamma''}$ vérifie

$$\lambda_{\gamma'} \cdot \lambda_{\gamma''} F = \lambda_{\gamma''} \cdot (\lambda_{\gamma'} F) = (F \circ \gamma') \circ \gamma'' = F \circ (\gamma'\gamma'')$$

D'où l'égalité recherchée :

$$\lambda_{\gamma'\gamma''} = \lambda_{\gamma'} \cdot \lambda_{\gamma''}$$

◇

A présent, donnons une condition nécessaire et suffisante pour construire une fonction Γ' -semi-invariante.

Proposition III.2.13. *F est Γ' -semi-invariante si et seulement si $Z(F)$ est une union de Γ' -orbites, avec multiplicités.*

Remarque III.2.14. On rappelle que $Z(F)$, voir III.2.1, désigne l'ensemble des zéros de la fonction F .

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si F est Γ' -semi-invariante, alors, par définition, pour tous $\gamma' \in \Gamma'$, il existe un complexe $\lambda_{\gamma'}$ vérifiant

$$F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F.$$

Donc, $z \in Z(F) \Leftrightarrow \gamma'(z) \in Z(F)$. Ainsi, $Z(F)$ est stable sous l'action de Γ' . Cela signifie que, pour tout $z \in Z(F)$, l'orbite de z sera également dans $Z(F)$.

Ainsi,

$$Z(F) \text{ est une union de } \Gamma'\text{-orbites.}$$

De plus, on a vu qu'à $z := [\lambda : \mu] \in Z(F)$, on associait la forme linéaire dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$: $\varphi = \mu Z_1 - \lambda Z_2$.

Ainsi, si z est de multiplicité m , c'est-à-dire φ^m divise F , et $\gamma' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors

$$\varphi^m \circ \gamma' = (\mu(aZ_1 + cZ_2) - \lambda(bZ_1 + dZ_2))^m \mid F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F$$

On en déduit que

L'orbite de z est dans $Z(F)$, et avec multiplicité.

⊞ Réciproquement, si $Z(F)$ est une union de Γ' -orbites avec multiplicités, alors on a

$$Z(F \circ \gamma') = Z(F).$$

Ainsi, F et $F \circ \gamma'$ ont les mêmes racines. D'après la remarque III.2.9, on en déduit que

$$\exists \lambda_{\gamma'} \in \mathbb{C}; F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F.$$

◇

On va illustrer cette construction de fonctions semi-invariantes sur une série d'exemples simples.

Exemple III.2.15. **Le cas cyclique**

On a vu, dans l'exemple III.2.3, que le groupe Γ_{C_n} vu dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ est engendré par l'élément

$$\begin{bmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{bmatrix}$$

Pour établir cette formule, il suffit d'exprimer, d'abord dans \mathbb{S}^2 , une rotation d'axe N , et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, puis, grâce à la proposition I.2.1, de l'exprimer dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$.

On rappelle également que tout élément $\gamma \in \Gamma_{C_n}$ va agir sur un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme suit :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \zeta_{2n}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-k} \end{bmatrix} : z \mapsto \frac{\zeta_{2n}^k \cdot z}{\zeta_{2n}^{-k}} = \zeta_n^k \cdot z$$

Le groupe Γ_{C_n} relevé dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, Γ'_{C_n} , aura pour générateur

$$\begin{pmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix}$$

Description des orbites : (cas cyclique)

- On avait trouvé dans l'exemple III.1.7, deux orbites dégénérées :

$$\mathcal{O}_1 : \{\infty\} = \{[1 : 0]\}$$

$$\mathcal{O}_2 : \{0\} = \{[0 : 1]\}$$

- Mais ce n'est pas tout, il reste à définir les orbites non dégénérées.

Prenons $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un point quelconque, autre que ∞ et 0 , et calculons son orbite.

On sait que, par définition de l'action Γ_{C_n} rappelée ci-dessus, les points de l'orbite de z sont de la forme $\zeta_n^k \cdot z$. En relevant dans \mathbb{C}^2 , puis en homogénéisant, comme expliqué dans la partie III.2.1, on trouve que les points de l'orbite de $z := (z_1, z_2)$ sont de la forme :

$$[\zeta_{2n}^k \cdot z_1 : \zeta_{2n}^{-k} \cdot z_2].$$

Ainsi, les orbites non dégénérées sont du type :

$$\mathcal{O}_k : \{[\zeta_{2n}^k z_1 : \zeta_{2n}^{-k} z_2], (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

Calcul des fonctions semi-invariantes : (cas cyclique)

Ces calculs ont déjà été effectués dans l'exemple III.2.10, mais il est peut-être bon de rappeler le principe. Pour construire les fonctions semi-invariantes associées aux orbites décrites précédemment, on utilise la proposition III.2.8 : pour une union de droites $\bigcup_i D_i := [\lambda_i : \mu_i]$; la fonction semi-invariante associée est celle qui admet pour zéros cette union de droites : c'est le polynôme de $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, $\prod_i (\mu_i Z_1 - \lambda_i Z_2)$. On remarque en passant que le lien entre l'union de droites et le polynôme est la dualité donnée par l'orthogonalité. En effet, on passe de \mathbb{C}^2 à son dual $(\mathbb{C}^2)^*$ par orthogonalité, et ce dernier espace s'identifie à l'espace des formes linéaires en deux variables.

Ici, on en déduit que :

- Pour l'orbite \mathcal{O}_1 , on dualise la droite infinie, identifiée à la droite $[1 : 0] = [-1 : 0]$; la fonction semi-invariante associée est alors :

$$(Z_1, Z_2) \mapsto 0 \cdot Z_1 - 1 \cdot (-Z_2) = Z_2$$

- Pour \mathcal{O}_2 , de la même manière, on trouve la fonction :

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_1$$

- Enfin, pour les orbites de type non dégénérées, on trouve les fonctions

$$(Z_1, Z_2) \mapsto \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_{2n}^{-k} z_2 \cdot Z_1 - \zeta_{2n}^k z_1 \cdot Z_2) = z_2^n \cdot Z_1^n - z_1^n \cdot Z_2^n,$$

pour (z_1, z_2) variant parmi les points non dégénérés dans \mathbb{C}^2 .

Calcul des caractères : (cas cyclique)

On cherche à présent à calculer les caractères associés à chaque fonction semi-invariante, c'est-à-dire le complexe $\lambda_{\gamma'}$ tel que $F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F$, pour F fonction semi-invariante associée à chacune des orbites. On remarque que, comme Γ'_{C_n} est engendré par l'élément $\begin{pmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix}$, il suffit, dans les calculs, de prendre pour $\gamma'_{C_n} \in \Gamma'_{C_n}$ cet élément générateur. C'est ce que l'on fera dans toute la suite.

- Pour \mathcal{O}_1 , on a, pour tout $\gamma'_{C_n} \in \Gamma'_{C_n}$:

$$(Z_1, Z_2) \xrightarrow{\gamma'} (\zeta_{2n} Z_1, \zeta_{2n}^{-1} Z_2) \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_1}} \zeta_{2n}^{-1} Z_2$$

Ainsi, le caractère associé à l'orbite \mathcal{O}_1 est

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{O}_1} : \Gamma' &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto \zeta_{2n}^{-1} \end{aligned}$$

- Un travail similaire nous donne pour l'orbite \mathcal{O}_2 le caractère :

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{O}_2} : \Gamma' &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto \zeta_{2n} \end{aligned}$$

- Détaillons enfin le calcul du caractère associé à \mathcal{O}_3 . Pour $\gamma'_{C_n} \in \Gamma'_{C_n}$, et $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} (F_{\mathcal{O}_3} \circ \gamma')(Z_1, Z_2) &= (z_2^n \cdot Z_1^n - z_1^n \cdot Z_2^n) \circ \gamma' \\ &= z_2^n \zeta_{2n}^n \cdot Z_1^n - z_1^n \zeta_{2n}^n \cdot Z_2^n \\ &= -(z_2^n \cdot Z_1^n - z_1^n \cdot Z_2^n) \\ &= -F_{\mathcal{O}_3}(Z_1, Z_2) \end{aligned}$$

Ainsi, le caractère de cette orbite est

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{O}_3} : \Gamma' &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

Exemple III.2.16. **Le cas diédral**

Effectuons le même calcul pour le cas du groupe D_n .

Description des orbites : (cas diédral)

On a vu dans l'exemple III.1.7 que, dans ce cas, on avait trois orbites dégénérées ; tout d'abord,

$$\mathcal{O}_1 : \{0, \infty\},$$

On a de plus une orbite \mathcal{O}_2 , resp. \mathcal{O}_3 , correspondant aux sommets, resp. aux milieux d'arêtes, du n -gone dessiné dans le plan équatorial, voir la figure III.6.

En se basant sur ce dessin, \mathcal{O}_2 va donc correspondre à l'orbite du point 1 ; autrement dit

$$\mathcal{O}_2 : \{\zeta_n^k, 0 \leq k \leq n-1\},$$

tandis que \mathcal{O}_3 va correspondre à l'orbite du point ζ_{2n} ; autrement dit

$$\mathcal{O}_3 : \{\zeta_{2n}^{2k+1}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

On a encore les orbites non dégénérées, que nous ne détaillerons pas ici.

Calcul des fonctions semi-invariantes : (cas diédral)

Encore une fois, l'exemple III.2.10 traitait déjà ce cas...

- La fonction semi-invariante associée à la première orbite, \mathcal{O}_1 , est celle dont les zéros sont les points 0 et ∞ : il s'agit donc de la fonction

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_1 \cdot Z_2$$

- Quant à \mathcal{O}_2 , on sait qu'il s'agit de l'orbite du point 1. En appliquant le même raisonnement que dans l'exemple précédent, avec cette fois $z = 1$, on trouve la fonction

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_1^n - Z_2^n$$

- Le raisonnement pour \mathcal{O}_3 est similaire à l'exemple III.2.15, avec cette fois $z = \zeta_{2n}$. Par principe de relèvement et d'homogénéisation, on voit que l'orbite que l'on considère est formée des points de la forme $[\zeta_{4n} : \zeta_{4n}^{-1}]$. La fonction semi-invariante associée est alors

$$(Z_1, Z_2) \mapsto \prod_{k=1}^{2n-1} (\zeta_{4n}^{-k} Z_1 - \zeta_{4n}^k Z_2) = Z_1^n + Z_2^n$$

Calcul des caractères : (cas diédral)

La différence avec l'exemple du cas cyclique, c'est qu'il ne suffit pas d'effectuer les calculs avec l'élément $\gamma' = \begin{pmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix}$; le groupe diédral possède en effet un second générateur, qui est l'inversion $\iota = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. On va donc devoir effectuer les calculs pour ces deux valeurs.

- Pour la première orbite, on a

$$(Z_1, Z_2) \xrightarrow{\gamma'} (\zeta_{2n} Z_1, \zeta_{2n}^{-1} Z_2) \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_1}} \zeta_{2n} \zeta_{2n}^{-1} Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2$$

Ensuite,

$$(Z_1, Z_2) \xrightarrow{\iota} (iZ_1, iZ_2) \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_1}} -Z_1 Z_2$$

Ainsi, le caractère correspondant est

$$\begin{aligned} \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto 1 \\ \iota &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

- Pour \mathcal{O}_2 ,

$$(Z_1, Z_2) \xrightarrow{\gamma'} (\zeta_{2n} Z_1, \zeta_{2n}^{-1} Z_2) \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_2}} (\zeta_{2n} Z_1)^n - (\zeta_{2n}^{-1} Z_2)^n = -(Z_1^n - Z_2^n)$$

Et

$$(Z_1, Z_2) \xrightarrow{\iota} (iZ_1, iZ_2) \xrightarrow{F_{\mathcal{O}_2}} (iZ_1)^n - (iZ_2)^n = i^n (Z_1^n - Z_2^n)$$

Ainsi, le caractère associé est

$$\begin{aligned}\Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto -1 \\ \iota &\longmapsto i^n\end{aligned}$$

- De même, on trouve dans le cas de l'orbite \mathcal{O}_3 que le caractère est

$$\begin{aligned}\Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto -1 \\ \iota &\longmapsto i^n\end{aligned}$$

FORMES PLEINES ORBITALES. DÉFINITION, EXEMPLES

A ce stade, on sait calculer des fonctions Γ' -semi-invariantes. Rappelons que, ce que l'on veut obtenir à la fin, ce sont des fonctions Γ -invariantes dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ces fonctions, on l'a vu dans la proposition III.2.5, et rappelé en début de cette partie, peuvent s'écrire comme quotient de deux fonctions homogènes de $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$:

$$\forall f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \exists G, H \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]; f = \frac{G}{H}.$$

On a commencé par chercher des fonctions G et H qui sont Γ' -semi-invariantes. Mais, est-ce que cela suffit pour retomber sur des fonctions f qui sont Γ -invariantes ? Non ! En effet, reprenons l'exemple III.2.15 précédent, et prenons

$$\begin{aligned}G &: (Z_1, Z_2) \longmapsto Z_1 \\ H &: (Z_1, Z_2) \longmapsto Z_2\end{aligned}$$

Alors, la fonction f associée à G et H vérifie, pour tous $\gamma' \in \Gamma'$:

$$f \circ \gamma'(Z_1, Z_2) = \frac{G \circ \gamma'}{H \circ \gamma'}(Z_1, Z_2) = \frac{\zeta_{2n} Z_1}{\zeta_{2n}^{-1} Z_2} = \zeta_n \frac{G}{H}(Z_1, Z_2) = \zeta_n f(Z_1, Z_2) !!$$

On a un problème ! Et pourquoi ? Parce que G et H n'avaient pas le même caractère pour pouvoir simplifier en quotientant.

Ainsi, on voit qu'il ne suffit pas juste de calculer des polynômes homogènes G, H semi-invariants : il faut aussi qu'ils aient le même caractère.

C'est là qu'apparaît la notion de *formes pleines orbitales*.

Définition III.2.17. Une *forme orbitale pleine* F est une forme de degré $|\Gamma|^4$ telle que $Z(F)$ est une unique orbite avec multiplicités.

4. Attention, $|\Gamma|$, et pas $|\Gamma'|$!

Continuons les exemples III.2.15 et III.2.16 :

Exemples III.2.18.

1. **Le cas cyclique**

Calcul des formes pleines orbitales, et calcul des caractères : (cas cyclique)

En fait, il suffit de compter chacun des zéros des fonctions semi-invariantes associées avec leur multiplicité : la forme orbitale pleine est tout simplement la fonction semi-invariante mise à la puissance de ces multiplicités⁵.

- Dans le cas de l'orbite \mathcal{O}_1 par exemple, la multiplicité de ∞ était n , puisqu'il appartient à l'axe de rotation de chacun des n éléments de C_n , et la fonction semi-invariante associée était

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_2$$

On en déduit alors que la forme orbitale pleine correspondante est

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_2^n.$$

Dans ce cas, on peut calculer le caractère associée à cette forme orbitale pleine . Comme on avait $\lambda_{\mathcal{O}_1} = \zeta_{2n}^{-1}$, alors le nouveau caractère est

$$\begin{aligned} \Gamma' &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\mapsto (\zeta_{2n}^{-1})^n = -1 \end{aligned}$$

- De même pour la deuxième orbite : 0 a également pour multiplicité n , donc la forme orbitale pleine est

$$(Z_1, Z_2) \mapsto Z_1^n,$$

Et le caractère associé

$$\begin{aligned} \Gamma' &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\mapsto \zeta_{2n}^n = -1 \end{aligned}$$

- Enfin, on voit que, pour chaque orbite non dégénérée, tout point de ladite orbite a pour multiplicité 1 : il n'appartient qu'à une seule rotation de C_n ; la forme orbitale pleine correspondante est donc inchangée :

$$(Z_1, Z_2) \mapsto \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_{2n}^{-k} z_2 \cdot Z_1 - \zeta_{2n}^k z_1 \cdot Z_2) = z_2^n \cdot Z_1^n - z_1^n \cdot Z_2^n,$$

pour (z_1, z_2) variant parmi les points non dégénérés dans \mathbb{C}^2 .

5. Cette remarque étant d'ailleurs valable en toute généralité.

Vous ne remarquez rien ? Eh si ! Cette fois, les caractères sont tous égaux !! Est-ce qu'on a eu de la chance parce qu'on est dans C_n , et que dans C_n , tout va bien en général ? Ok, regardons le cas diédral.

2. Le cas diédral

Calcul des formes pleines orbitales, et calcul des caractères : (cas diédral)

- On l'a dit, 0 et ∞ sont de multiplicité n , donc la forme orbitale pleine est

$$(Z_1, Z_2) \mapsto (Z_1 Z_2)^n$$

On calcule ensuite les caractères, pour γ' et ι définis dans l'exemple III.2.16, et on trouve :

$$\begin{aligned} \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto 1^n = 1 \\ \iota &\longmapsto (-1)^n \end{aligned}$$

- De même pour \mathcal{O}_2 : chaque sommet va appartenir à deux rotations (d'angle opposé), on a donc pour forme orbitale pleine la fonction

$$(Z_1, Z_2) \mapsto (Z_1^n - Z_2^n)^2$$

On calcule les caractères :

$$\begin{aligned} \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto (-1)^2 = 1 \\ \iota &\longmapsto (i^n)^2 = (-1)^n \end{aligned}$$

- Enfin, comme les milieux d'arêtes sont également de multiplicité 2, on aura

$$(Z_1, Z_2) \mapsto (Z_1^n + Z_2^n)^2$$

Et le caractère

$$\begin{aligned} \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto (-1)^2 = 1 \\ \iota &\longmapsto (i^n)^2 = (-1)^n \end{aligned}$$

Remarque III.2.19. On remarque à travers notre exemple que les fonctions pleines orbitales associées aux orbites se retrouvent avec le même degré (homogène).

LIEN ENTRE FORMES ORBITALES PLEINES ET FONCTIONS INVARIANTES

Résumons un peu la situation.

Soit $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $\gamma' \in \Gamma'$, avec $\gamma'(p_1, p_2) = (\gamma'_1(p_1), \gamma'_2(p_2)) \in \mathbb{C}^2$. Pour ce p , et donc pour l'orbite de p , on sait construire des fonctions Γ' -semi-invariantes, en construisant des polynômes homogènes dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ de la forme

$$F_p = \prod_{\gamma' \in \Gamma' / \{\pm \text{Id}\} \simeq \Gamma} (\gamma'_2(p)Z_1 - \gamma'_1(p)Z_2)$$

(on considère le produit sur $\Gamma' / \{\pm \text{Id}\} = \Gamma$ car sinon, chaque facteur est compté deux fois).

F_p est donc une fonction Γ' -semi-invariante, de degré $|\Gamma|$.

Réciproquement, on a vu que toute fonction Γ' -semi-invariante de degré $|\Gamma|$ est de cette forme.

Autrement dit : il existe une constante telle que : $\forall \gamma', F_p \circ \gamma' = \lambda_{\gamma', p} F_p$.

De plus,

$$\begin{aligned} \chi_{\Gamma, p} : \Gamma' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \gamma' &\longmapsto \lambda_{\gamma', p} \end{aligned}$$

est un caractère.

A ce stade, une question qui vient naturellement est la suivante : le caractère dépend-il vraiment du point p considéré ? Suspense...

Proposition III.2.20. *Le caractère $\gamma' \longmapsto \chi_{\Gamma', p}$ ne dépend pas du choix de $p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*

Démonstration. On sait que Γ' est un groupe *fini*. Donc, pour γ' fixé, on a, pour tout p , comme χ est un caractère :

$$\chi_{\Gamma, p}(\gamma')^{|\Gamma'|} = \chi_{\Gamma, p}(\gamma'^{|\Gamma'|}) = \chi_{\Gamma, p}(e) = 1.$$

Ainsi, $\chi_{\Gamma, p}(\gamma')$ est une racine $|\Gamma'|$ -ième de l'unité.

On appelle $U_{|\Gamma'|}$ l'ensemble de ces racines.

On va montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow U_{|\Gamma'|} \\ p &\longmapsto \chi_{\Gamma, p}(\gamma') \end{aligned}$$

est continue. Cela prouvera la proposition, puisque $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe, et $U_{|\Gamma'|}$ est discret ; or, une application continue d'un connexe sur un discret est nécessairement constante ; on aura alors montré que $\chi_{\Gamma, p}(\gamma')$ ne dépend pas du choix de p .

Montrons donc cette continuité. On fixe $p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On veut montrer que $p \mapsto \chi_{\Gamma, p}(\gamma')$ est continue en p .

Soit K un voisinage compact de p . On pose $K' := \Gamma'(K)$.

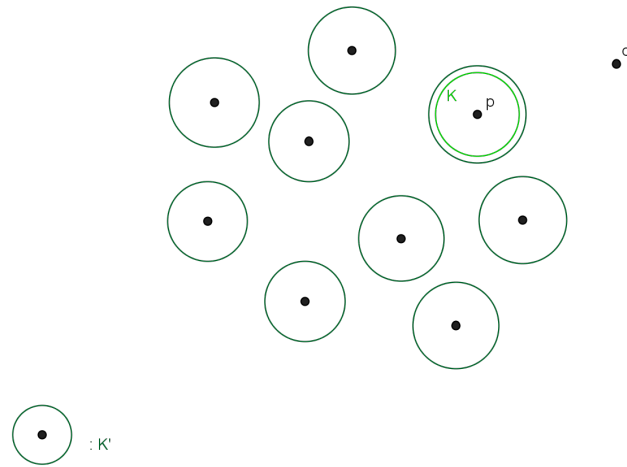


FIGURE III.7 – Point p et son orbite-Voisinage $K-K'$

On choisit un $q \in \mathbb{C}^2$, $q \neq (0,0)$ et q pris en dehors de l'orbite $\Gamma' \cdot K$ (cf figure ci-dessus), et pour tout $p' \in K$, on écrit $\chi_{\Gamma,p'}$ comme le quotient :

$$\chi_{\Gamma,p'} = \frac{(F_{p'} \circ \gamma')(q)}{F_{p'}(q)}.$$

C'est bien défini, puisque l'on sait que les zéros de la fonction $F_{p'}$ est l'orbite de p' , c'est-à-dire l'orbite de p ; et nous avons justement pris q en dehors de $\Gamma' \cdot K$, pour K voisinage compact de p ; donc $F_{p'}(q) \neq 0$.

Ainsi, on voit que l'on peut exprimer, pour tout p , $\chi_{\Gamma,p}$ comme fraction rationnelle de fonctions continues. C'est ce que l'on désirait.

◇

Remarque III.2.21. On avait bien noté dans l'exemple III.2.18 que les caractères des formes orbitales pleines dégénérées sont effectivement égaux.

Ainsi, toute forme orbitale pleine est semi-invariante, avec un caractère fixé qui ne dépend que de Γ .

Observons à présent le théorème fondamental suivant :

Théorème III.2.22. *L'ensemble des fonctions Γ -invariantes est*

$$I := \{f = [G : H]; G \text{ et } H : \text{produits disjoints de formes pleines orbitales}\}$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que la proposition III.2.20, ainsi que la remarque qui précède le théorème III.2.22, prouvent que tout élément dans l'ensemble I est une fonction Γ -invariante. On a donc une première inclusion.

Pour l'inclusion directe, prenons f une fonction Γ -invariante, non constante. On considère un point $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, qui n'est pas dans une orbite dégénérée pour l'action de Γ . Sa préimage par f est alors une union d'orbites de cardinal $|\Gamma|$. En effet, comme f est Γ -invariante, alors : $\omega \in f^{-1}(z) \implies \gamma(\omega) \in f^{-1}(z), \forall \gamma \in \Gamma$.

On a alors, sur un ouvert dense (puisque l'on considère tous les éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sauf un nombre fini de points) :

$$|f^{-1}(z)| = k|\Gamma|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ce nombre de préimages de z sur un dense correspond également au degré de la fonction f (sur \mathbb{C}). A présent, on utilise la proposition IV.2.8, qui nous donne une expression pour la fonction F , l'homogénéisée de f :

$$F = F_1^{e_1} F_2^{e_2} F_3^{e_3} \prod_{\lambda=[\lambda_1:\lambda_2]} (\lambda_1 F_1^{n_1} + \lambda_2 F_2^{n_2})^{e_\lambda},$$

où $0 \leq e_i \leq n_i$ pour $i = 1, 2, 3$, et $e_\lambda = 0$ sauf pour un nombre fini de λ , où les n_i sont les multiplicités des zéros associés aux fonctions F_i .

Tout d'abord, si, pour tout $1 \leq i \leq 3$, $e_i = n_i$, alors, la fonction F s'écrit comme un produit de fonctions pleines orbitales, par définition des $F_i^{n_i}$, et c'est gagné.

Éliminons dès lors les cas dits de *formes exceptionnelles*, c'est-à-dire les cas où la fonction F est du type $F_1^{e_1} F_2^{e_2} F_3^{e_3}$, avec, pour tout i , $0 \leq e_i < n_i$. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme III.2.23. *Chaque forme exceptionnelle est de degré $|\Gamma|$. De plus, aucune forme exceptionnelle ne possède le même caractère.*

La preuve de ce résultat se fait au cas par cas, en considérant le cas cyclique, le cas diédral, tétraédrique...Penchons-nous sur le cas cyclique, en guise d'exemple. On regroupe les valeurs des cardinaux des orbites dégénérées, ainsi que des caractères associés, dans le tableau suivant (on pourra se référer à l'exemple III.2.15) :

	$ \mathcal{O}_1 $	$ \mathcal{O}_2 $	$ \mathcal{O}_3 $	$ \Gamma $	χ_1	χ_2	χ_3	χ_Γ
C_n	1	1	0	n	ζ_{2n}	ζ_{2n}^{-1}	1	-1

Ce résultat nous permet alors d'exclure les cas exceptionnels : si f , la déshomogénéisée de F , est un quotient de produits de formes exceptionnelles (et éventuellement de fonctions pleines orbitales), alors, comme on voit de voir que les caractères au numérateur et au dénominateur, f ne saurait être une Γ -invariante. Cela termine la preuve. ◇

Ainsi pour obtenir une fonction invariante, il faut prendre pour formes homogènes dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ associées des formes pleines orbitales.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS ORBITALES PLEINES : LES SYZYGIES

Une petite observation avant de passer à la suite : on est en dimension 2 sur \mathbb{C} , et pourtant, on a trois fonctions pleines orbitales : $F_1^{n_1}, F_2^{n_2}$ et $F_3^{n_3}$; où F_1, F_2 et F_3 désignent les fonctions semi-invariantes associées aux orbites \mathcal{O}_1 , resp. \mathcal{O}_2 , resp. \mathcal{O}_3 , et les n_i désignent les multiplicités des points des orbites \mathcal{O}_i .

Il est donc naturel de se demander s'il n'y a pas un lien entre ces trois fonctions ; et la réponse est oui ! Ces relations sont appelées les *SYZYGIES*⁶.

Le résultat est le suivant :

Proposition III.2.24. *Toute forme orbitale pleine F se décompose en*

$$F = \lambda_1 F_1^{n_1} + \lambda_2 F_2^{n_2}.$$

Remarque III.2.25. On a choisi de garder F_1 et F_2 , mais on n'aurait pu prendre F_1 et F_3 , ou F_2 et F_3

Démonstration. On pose $F = F_p$, avec F_p défini comme précédemment :

$$F_p = \prod_{\gamma' \in \Gamma' / \{\text{Id}\} \simeq \Gamma} (\gamma'_2(p)Z_1 - \gamma'_1(p)Z_2).$$

On considère $G := F_2^{n_2}(p) \cdot F_1^{n_1} - F_1^{n_1}(p) \cdot F_2^{n_2}$.

On va montrer que $F = F_p$ et G sont proportionnelles.

- Tout d'abord, G est par construction Γ' -semi-invariante, comme produit et somme de fonctions Γ' -semi-invariantes : $F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$, et l'on a vu de plus que les caractères associés à $F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$ sont les mêmes.
- G s'annule sur p . Effectivement,

$$G(p) = F_2^{n_2}(p) \cdot F_1^{n_1}(p) - F_1^{n_1}(p) \cdot F_2^{n_2}(p) = 0.$$

- G est de degré $|\Gamma|$.
- G est non nulle, car $F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$ sont non proportionnelles, puisque $Z(F_1^{n_1}) \neq Z(F_2^{n_2})$.

De toutes ces observations, on en déduit que

$$Z(G) = Z(F_p).$$

Donc, d'après la proposition III.2.9, on a bien que $F = F_p$ est proportionnelle à G comme souhaité, et donc F est bien de la forme voulue.

◇

6. 53 points au Scrabble.

Revenons à nos deux exemples préférés, les exemples III.2.15 et III.2.16, et essayons d'exprimer une des formes pleines orbitales en fonction des deux autres.

Exemples III.2.26.

1. Cas cyclique : Pour le cas cyclique, pas de problème : on a immédiatement

$$F_3^{n_3} = F_3^1 = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_{2n}^{-k} z_2 \cdot Z_1 - \zeta_{2n}^k z_1 \cdot Z_2) = z_2^n \cdot Z_1^n - z_1^n \cdot Z_2^n = z_2^n \cdot F_2^n - z_1^n \cdot F_1^n.$$

2. Cas diédral : Pour le cas diédral, on a

$$F_3^2 = (Z_1^n + Z_2^n)^2 = (Z_1^n)^2 + (Z_2^n)^2 + 2(Z_1 Z_2)^n = (Z_1^n - Z_2^n)^2 + 4(Z_1 Z_2)^n = F_2^2 + 4F_1^n.$$

Autre façon de calculer, en exprimant cette fois F_2^2 en fonction des deux autres : on sait que F_2^2 a pour zéros les sommets (par construction) ; en particulier, le point $(1, 1)$ de \mathbb{C}^2 annule F_2^2 . On écrit la relation

$$F_2^2 = F_1^n(1, 1)F_3^2 - F_3^2(1, 1)F_1^n$$

vue dans la démonstration de la proposition III.2.24, et on l'évalue en $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} F_2^2(1, 1) &= 0 \\ F_1^n(1, 1) &= 1 \\ F_3^2(1, 1) &= 4 \end{aligned}$$

On trouve alors

$$F_2^2 = F_3^2 - 4F_1^n.$$

On va changer légèrement les notations pour la suite.

Notations. Pour tout groupe Γ considéré, on va adopter les conventions suivantes :

- F_1 désignera la forme orbitale (*non pleine*) associée à l'orbite dégénérée des sommets ;
- F_2 désignera la forme orbitale (*non pleine*) associée à l'orbite dégénérée des centres des faces ;
- F_3 désignera la forme orbitale (*non pleine*) associée à l'orbite dégénérée des milieux d'arêtes.

Quand cela sera nécessaire, on précisera le solide platonicien considéré en indiquant les fonctions orbitales par $F_{i,\mathcal{S}}$, où $i = 1, 2$ ou 3 et \mathcal{S} désigne le solide (typiquement, T pour le tétraèdre, O pour l'octaèdre, et I pour l'icosaèdre).

Remarque III.2.27. On voit bien que, pour deux solides platoniciens duaux, l'étude des formes pleines orbitales d'un seul des deux suffira à notre bonheur⁷. Comment choisir entre les deux ? En suivant ce principe : on va s'arranger pour que le nombre de sommets soit minimal, de sorte à ce que F_1 soit de degré le plus petit possible. Par exemple, à choisir entre le cube, qui a 8 sommets, et l'octaèdre, qui en a 6, c'est ce dernier qui gagne (pour une fois).

Dès lors, notre étude va se consacrer au calcul de ces fonctions orbitales⁸.

D'après la remarque III.2.27, F_1 sera donc la fonction la plus facile à calculer. Mais, comment retrouver F_2 et F_3 sans que la difficulté n'augmente ? C'est ce que nous allons voir !

Outils de calculs des formes orbitales : le jacobien et le hessien sont nos amis

Eh oui, surprise ! On va montrer dans cette partie que, à partir de la fonction F_1 , les autres fonctions orbitales F_2 et F_3 vont être données par le jacobien JF_1 et le hessien HF_1 de F_1 ... Pas mal non ?

ETUDE DU HESSIEN ET DU JACOBIEN : SEMI-INVARIANCE, DEGRÉS

La première étape, à présent, c'est de vérifier que JF_1 et HF_1 sont bien Γ' -semi-invariantes, quand même.

Proposition III.2.28. *Soit $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Γ' -semi-invariante, c'est-à-dire*

$$\forall \gamma' \in \Gamma', \exists \lambda_{\gamma'} \in \mathbb{C}; F \circ \gamma' = \lambda_{\gamma'} F.$$

Alors : la hessienne de F , notée HF , et la jacobienne de F , notée JF , sont également Γ' -semi-invariantes. On a donc

$$\forall \gamma' \in \Gamma', \exists \lambda_{J,\gamma'} \in \mathbb{C}; JF \circ \gamma' = \lambda_{J,\gamma'} JF$$

et

$$\forall \gamma' \in \Gamma', \exists \lambda_{H,\gamma'} \in \mathbb{C}; HF \circ \gamma' = \lambda_{H,\gamma'} HF$$

De plus, on a $\lambda_{J,\gamma'} = \lambda_{\gamma'}^3$, et $\lambda_{H,\gamma'} = \lambda_{\gamma'}^2$.

Démonstration.

1. Le hessien

On va écrire le développement de Taylor de F , et se servir de l'unicité de celui-ci.

Soit donc $u_0, h \in \mathbb{C}^2$, et $\gamma \in \Gamma' \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ (γ est donc linéaire...).

7. Comme l'a dit notre ours hédoniste préféré : il en faut peu pour être heureux.

8. Attention, non pleines ! Mais il suffira d'étudier la multiplicité de leurs zéros pour les élever à la puissance adéquate ; en fait, comme la fonction orbitale doit avoir pour degré le cardinal du groupe Γ considéré, il est aisé de voir que la puissance n_i en question vérifie : $n_i = \frac{|\Gamma|}{\deg(F_i)}$.

On a d'une part

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + dF_{u_0}(h) + q_{u_0}(h) + \|h\|^2 o(h), \quad (1)$$

avec dF_{u_0} qui est la partie linéaire en h du développement de Taylor, et q_{u_0} la partie quadratique en h .

D'autre part, comme γ est linéaire, on a

$$\begin{aligned} F(\gamma(u_0 + h)) &= F(\gamma(u_0) + \gamma(h)) \\ &= F(\gamma(u_0)) + dF_{\gamma(u_0)}(\gamma(h)) + q_{\gamma(u_0)}(\gamma(h)) + \|h\|^2 o(h) \end{aligned} \quad (2)$$

De plus, F est Γ' -semi-invariante, donc $F \circ \gamma = \lambda_\gamma F$; ce qui se traduit ici par l'égalité

$$\lambda_\gamma F(u_0 + h) = F(\gamma(u_0) + \gamma(h))$$

En utilisant les égalités (1) et (2) ci-dessus, on obtient, par unicité du développement de Taylor,

$$q_{\gamma(u_0)}(\gamma(h)) = \lambda_\gamma q_{u_0}(h). \quad (\star)$$

Or, on a

$$\begin{aligned} HF(u_0) &= \det(q_{u_0}) \\ \text{et } HF \circ \gamma(u_0) &= \det(q_{\gamma(u_0)}) \end{aligned}$$

En passant en notations matricielles, $\text{Mat}(q_{u_0}) =: Q_{u_0}$, $\text{Mat}(q_{\gamma(u_0)}) =: Q_{\gamma(u_0)}$, $\text{Mat}(\gamma) =: P$ et $\text{Mat}(h) =: H$; l'égalité (\star) s'écrit alors

$$\forall H, \quad {}^t(PH)Q_{\gamma(u_0)}PH = \lambda_\gamma {}^tHQ_{u_0}H,$$

et comme cette égalité est valable pour tout H , elle l'est en particulier pour H une matrice élémentaire, et on obtient l'égalité

$${}^tPQ_{\gamma(u_0)}P = \lambda_\gamma Q_{u_0}.$$

On a alors égalité des déterminants des matrices, et comme le déterminant est un morphisme, on a

$$\det({}^tP) \det(Q_{\gamma(u_0)}) \det(P) = \lambda_\gamma^2 \det(Q_{u_0})$$

De plus, comme $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, alors $\det(P) = 1$, ce qui fait que finalement, on obtient bien

$$\boxed{HF \circ \gamma = \lambda_\gamma^2 HF}$$

2. Le jacobien

En utilisant la même méthode que précédemment, on trouve l'égalité

$$dF_{\gamma(u_0)}(\gamma(h)) = \lambda_\gamma dF_{u_0}(h)$$

De plus, on a le schéma

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{C},$$

et alors

$$d_u(F \circ \gamma) = d_{\gamma(u)}F \circ d_{u_0}\gamma \quad (*)$$

A ce stade, si l'on veut passer en écriture matricielle tout de suite, pour appliquer le même raisonnement que pour le hessien, alors on se retrouve face à un problème, car dF est une matrice 2×1 !

Pour pallier ce problème, on va faire en sorte de considérer le déterminant d'une matrice 2×2 ; cette matrice, c'est la suivante :

$$\mathcal{J}F(u) := \det(d_u F, d_u HF)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(F \circ \gamma)(u) &= \det(d_u F \circ \gamma, d_u H(F \circ \gamma)) \stackrel{(1)}{=} \det(d_{\gamma(u)}F \circ d_u \gamma, d_u H(F \circ \gamma)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \det(d_{\gamma(u)}F \circ \gamma, d_u H(F \circ \gamma)) \\ &= \det(\lambda_\gamma d_u F, \lambda_\gamma^2 d_u HF) \\ &= \lambda_\gamma^3 \det(d_u F, d_u HF) \end{aligned}$$

(1) : cela provient de (*).

(2) : γ est linéaire, donc sa différentielle est égale à elle-même !

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{J}(F \circ \gamma)(u) = \lambda_\gamma^3 \mathcal{J}F(u)}$$

◇

On a déjà que JF_1 et HF_1 sont semi-invariantes. Good start. Maintenant, pour voir qu'elles coïncident avec F_2 , resp. F_3 , il faut voir que les zéros des fonctions HF_1 et F_2 , resp. JF_1 et F_3 , sont les mêmes. Pour ce faire, on va étudier les degrés de chacune de ces fonctions.

Commençons par étudier les degrés des fonctions hessien et jacobien.

Corollaire III.2.29. *Soit $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ homogène, de degré d , et Γ' -semi-invariante. Alors HF est de degré $2(d-2)$, et JF est de degré $3(d-2)$.*

Démonstration.

1. *Le hessien*

On rappelle que, pour $u_0 \in \mathbb{C}^2$, $\text{HF}(u_0) = \det(q_{u_0})$, q_{u_0} désignant la partie quadratique dans le développement de Taylor de la fonction F .

On écrit $\text{Mat}(q_{u_0})$ dans la base canonique de \mathbb{C}^2 ; comme on a affaire à une forme quadratique, c'est une matrice 2×2 , et chacun des coefficients est une dérivée seconde de F , donc ils sont tous de degré $d-2$.

Ainsi, en prenant le déterminant, on obtient une fonction de degré au plus $(d-2) + (d-2) = 2(d-2)$, comme désiré.

2. *Le jacobien*

On avait $\text{JF}(u) = \det(d_u F, d_u \text{HF})$; la première colonne de cette matrice 2×2 est un vecteur dont les coefficients sont de degré $d-1$ (on a dérivé une fois F), le second est un vecteur dont les coefficients sont de degré $2(d-2)-1$ (on a dérivé une fois HF).

Donc, en prenant le déterminant, on obtient une fonction de degré au plus $(d-1) + 2(d-2) - 1 = 3(d-2)$.

◇

LIEN ENTRE HESSIEN/JACOBIEN ET FONCTIONS ORBITALES D'UN SOLIDE PLATONICIEN

Le résultat qui suit va nous permettre d'établir le lien fondamental entre les degrés du hessien et du jacobien d'une part, et le nombre de faces et d'arêtes d'autre part.

On sait qu'une fonction Γ' -semi-invariante est associée à une orbite \mathcal{O} dans le solide platonicien que l'on considère. On a alors $\deg F = |\mathcal{O}|$.

Ici, on choisit de prendre $F = F_1$, la fonction associée à l'orbite (dégénérée) des sommets du solide platonicien.

On a alors le résultat suivant :

Proposition III.2.30. *Le degré de HF_1 ($= 2(d-2)$) est égal au nombre de faces du solide platonicien; et le degré de JF_1 ($= 3(d-2)$) est égal au nombre d'arêtes du solide platonicien.*

Il suffit de vérifier ce résultat au cas par cas (on se passera d'étudier le cube et le dodécaèdre, d'ailleurs de l'octaèdre, resp. de l'icosaèdre...). On rappelle que \mathcal{S} , resp. \mathcal{F} , resp. \mathcal{A} , désigne l'ensemble des sommets, resp. milieux de faces, resp. milieux d'arêtes.

	$\#\mathcal{S}$	$\#\mathcal{F}$	$\#\mathcal{A}$	Degré de F_1	Degré de JF_1	Degré de HF_1
Tétraèdre	4	4	6	4	4	6
Octaèdre	6	8	12	6	8	12
Icosaèdre	12	20	30	12	20	30

TABLE III.1 – Tableau donnant le nombre de sommets, de faces, et d'arêtes de chaque solide platonicien

Remarque III.2.31. Si l'on veut rester général, et prendre en compte tous les solides platoniciens, le cas par cas est inévitable. Cependant, si l'on ne considère que les trois solides présentés dans le tableau ci-dessus, le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre, on peut trouver une méthode élégante pour établir les formules : $A = 3(S - 2)$, et $F = 2(S - 2)$. Effectivement, si l'on observe ces solides, on remarque que leurs faces sont toutes triangulaires. Reprenons alors les notations de la partie II.1.1, où l'on avait posé p , le nombre d'arêtes partant de chaque sommet : dans les trois cas qui nous intéressent, on a $p = 3$; toujours en se servant des formules utilisées en II.1.1, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} 3F = 2A \\ S - A + F = 2. \end{cases}$$

La résolution est immédiate ; on trouve $F = 2(S - 2)$, puis : $A = 3(S - 2)$.

Ainsi : Pour F_1 la forme orbitale associée aux sommets du solide platonicien, HF_1 , resp. JF_1 , est bien une forme Γ' -semi-invariante, dont les zéros sont des réunions d'orbitales avec multiplicité, et la réunion totale est de degré égal au nombre de faces du solide, resp. nombre d'arêtes.

Ainsi,

- F_1 est la forme orbitale associée aux sommets du solide platonicien ;
- HF_1 est la forme orbitale associée aux centres des faces ;
- JF_1 est la forme orbitale associée aux milieux d'arêtes.

Remarque III.2.32. Attention, pour le tétraèdre, comme on a le même nombre de sommets et de faces, on pourrait avoir que HF_1 est proportionnelle à F_1 , et non égale à F_2 ...Il faudra vérifier que, une fois calculées explicitement F_1 et HF_1 , que ce ne sont pas les mêmes fonctions à constante multiplicative près.

Que pouvons-nous espérer de mieux ? Cela veut dire que le plus gros du travail consistera à calculer F_1 pour chacun des solides platoniciens, et ensuite, le reste tombera tout seul.

Feuille de route :

On considère le tétraèdre T , l'octaèdre O et l'icosaèdre I .

1. On place ces solides dans la sphère, comme expliqué dans la partie II.1.3 ;

2. On calcule $F_{1,T}$, $F_{1,O}$ et $F_{1,I}$;
3. On calcule $HF_{1,T}$, $HF_{1,O}$ et $HF_{1,I}$, puis $JF_{1,T}$, $JF_{1,O}$ et $JF_{1,I}$.
4. On s'autofélicite.

Calcul effectif des fonctions orbitales des solides

Dans toute cette partie, les calculs vont s'effectuer à l'aide du logiciel SAGE. On pourra voir la trace des exécutions des programmes dans l'annexe III.4.1.

Une fois les fonctions orbitales calculées, les fonctions orbitales pleines s'en déduisent immédiatement, on donnera quelques exemples.

TÉTRAÈDRE

1. Reprenons la figure 1, qui réalisait la construction du tétraèdre à partir d'une configuration d'or, et donc de positionner le tétraèdre correspondant dans un repère de \mathbb{R}^3 . En reprenant l'étude de cette figure, les sommets du tétraèdre considéré ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. On normalise ensuite le tétraèdre, pour trouver l'ensemble de points :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \right\}.$$

On projette ces points dans le plan *via* π , voir proposition I.4.1, puis on passe en écriture complexe; on trouve finalement que l'ensemble des sommets est

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ \pm \frac{1+i}{\sqrt{3}-1}; \pm \frac{1-i}{\sqrt{3}+1} \right\}.$$

Ensuite, par le principe de relèvement étudié dans la partie III.2.1, l'orbite des sommets se décrit maintenant de la sorte :

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ \left[\pm \frac{1+i}{\sqrt{3}-1} : 1 \right]; \left[\pm \frac{1-i}{\sqrt{3}+1} : 1 \right] \right\}.$$

2. Ainsi, on voit que la fonction $F_{1,T}$ dont les zéros sont les $[\pm \frac{1+i}{\sqrt{3}-1} : 1]; [\pm \frac{1-i}{\sqrt{3}+1} : 1]$ est le produit

$$\left(Z_1 - \frac{1+i}{\sqrt{3}-1} Z_2 \right) \cdot \left(Z_1 + \frac{1+i}{\sqrt{3}-1} Z_2 \right) \cdot \left(Z_1 - \frac{1-i}{\sqrt{3}+1} Z_2 \right) \cdot \left(Z_1 + \frac{1-i}{\sqrt{3}+1} Z_2 \right),$$

qui, simplifiée, donne

$$\boxed{F_{1,T} = Z_1^4 - 2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4}$$

Remarque III.2.33. De plus, comme chaque sommet du tétraèdre est fixé par des éléments d'ordre 3 du groupe d'isométries, chaque zéro de cette fonction est de multiplicité 3 ; la fonction orbitale pleine associée au tétraèdre est alors

$$F_{1,T}^3 = (Z_1^4 - 2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4)^3$$

3. On calcule⁹ les fonctions $F_{2,T} = HF_{1,T}$ et $F_{3,T} = JF_{1,T}$; et on trouve

$$F_{2,T} = Z_1^4 + 2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4,$$

et

$$F_{3,T} = Z_1Z_2(Z_1^4 - Z_2^4)$$

Remarque III.2.34. De même, comme les centres de faces sont de multiplicité 3, et les milieux d'arêtes de multiplicité 2, les fonctions orbitales pleines associées sont donc

$$F_{2,T}^3 = (Z_1^4 + 2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4)^3,$$

et

$$F_{3,T}^2 = (Z_1Z_2(Z_1^4 - Z_2^4))^2$$

Remarque III.2.35. On remarque bien que $HF_{1,T}$ et $F_{1,T}$ ne sont pas proportionnelles, donc $HF_{1,T}$ correspond bien à $F_{2,T}$...

OCTAÈDRE

1. De même que pour le tétraèdre, on ramène l'octaèdre dans la sphère ; on trouve que les sommets sont

$$\{\infty; 0; \pm 1; \pm i\}.$$

En projetant, puis en relevant dans \mathbb{C}^2 , on obtient l'orbite

$$\mathcal{O}_1 = \{[1 : 0]; [0 : 1]; [\pm 1 : 1]; [\pm i : 1]\}.$$

On voit alors que $F_{1,O}$ va être le produit

$$F_{1,O} = Z_1Z_2(Z_1 - Z_2)(Z_1 + Z_2)(Z_1 - iZ_2)(Z_1 + iZ_2);$$

qui, simplifié, donne

$$F_{1,O} = Z_1Z_2(Z_1^4 - Z_2^4).$$

9. D'aucuns diraient avec Sagitude...

2. On calcule de même $F_{2,O} = HF_{1,O}$ et $F_{3,O} = JF_{1,O}$; et on trouve

$$F_{2,O} = Z_1^8 + 14Z_1^4Z_2^4 + Z_2^8,$$

et

$$F_{3,O} = Z_1^{12} - 33Z_1^8Z_2^4 - 33Z_1^4Z_2^8 + Z_2^{12}.$$

ICOSAÈDRE

1. Il faut calculer les coordonnées des sommets de l'icosaèdre inscrit dans la sphère. Ce calcul mérite de s'y attarder un peu.

En effet, rappelons-nous ce qui a été effectué dans la partie II.2 : on avait fait pivoter l'icosaèdre, de sorte à ce que l'un de ses sommets se retrouve en l'infini. On a donc déjà deux points de l'orbite des sommets : ∞ , et 0.

Pour les autres, regardons le dessin 1 :

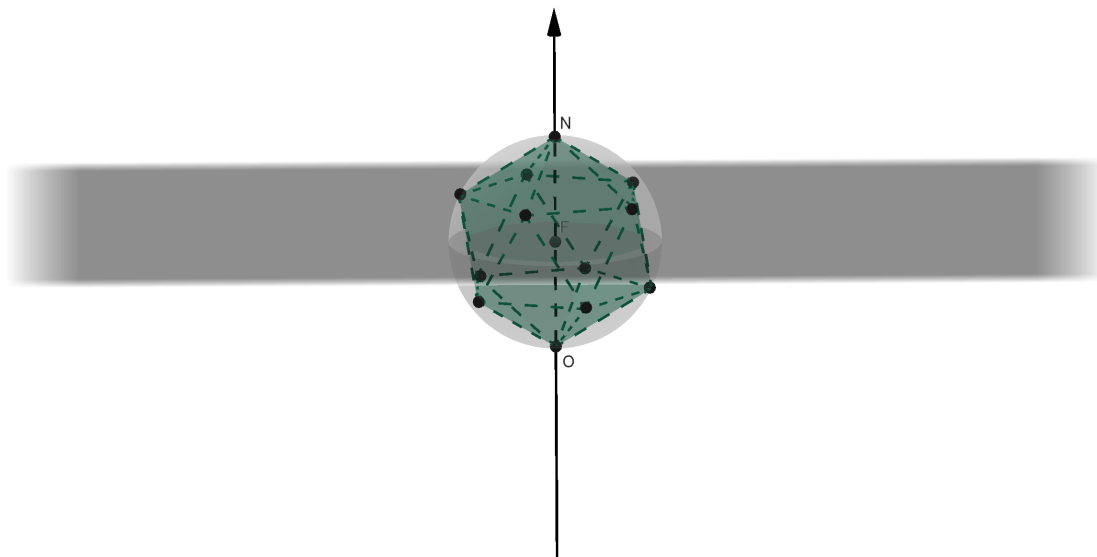


FIGURE III.8 – Icosaèdre inscrit dans la sphère

On voit alors que les 10 autres points peuvent être décrits comme formant deux cercles contenant chacun 5 sommets, dont les centres seraient sur l'axe (0∞) .

De plus, on avait décrit dans la partie II.2 la rotation d'angle π et d'axe porté par $p = (-g, 0, 1)$ (qui correspondait à l'axe $(1, 1, 1)$ que l'on a pivoté d'un angle $\alpha = \arctan(g)$).

On remarque alors que, si l'on calcule $t_I(0)$, on tombe sur l'un des points du cercle "d'en bas", voir 1 ; il suffit alors d'appliquer s_I , la rotation d'ordre 5 de l'icosaèdre, au point $t_I(0)$, pour obtenir les autres points du cercle.

Même chose pour l'autre cercle, en considérant cette fois $t_I(\infty)$.

On applique les formules vues dans la partie II.2 ; on avait $t_I : z \mapsto \frac{g-z}{gz+1}$; d'où : $t_I(0) = g$, et $t_I(\infty) = -g^{-1} =: \tilde{g}$.

Finalement, l'ensemble des sommets est

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ 0; \zeta_5^j g; \infty; \zeta_5^j \tilde{g}; \quad 0 \leq j \leq 4 \right\},$$

qui donne, en relevant dans \mathbb{C}^2 ,

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ [0 : 1]; [\zeta_5^j g : 1]; [1 : 0]; [\zeta_5^j \tilde{g} : 1]; \quad 0 \leq j \leq 4 \right\}.$$

La fonction $F_{1,I}$ ayant pour zéros ces points est alors

$$F_{1,I} = Z_1 Z_2 \prod_{j=0}^4 (Z_1 - \zeta_5^j g Z_2)(Z_1 - \zeta_5^j \tilde{g} Z_2),$$

qui, simplifié, donne

$$F_{1,I} = Z_1 Z_2 (Z_1^{10} - (g^5 + \tilde{g}^5) Z_1^5 Z_2^5 + (g\tilde{g})^5 Z_2^{10}).$$

Et ce n'est pas fini ! En effet, g et \tilde{g} sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$; on a donc

$$\begin{aligned} g + \tilde{g} &= -1 \\ g\tilde{g} &= -1. \end{aligned}$$

Avec ces deux égalités, on peut alors simplifier les expressions de g^5 et \tilde{g}^5 : $g^5 = g^2 \cdot g^2 \cdot g = (1-g)(1-g)g = 5g - 3$, et $\tilde{g}^5 = 5\tilde{g} - 3$ de même.

Finalement, on trouve que $g^5 + \tilde{g}^5 = 5(g + \tilde{g}) - 6 = -11$, et donc

$$\boxed{F_{1,I} = Z_1 Z_2 (Z_1^{10} + 11 Z_1^5 Z_2^5 - Z_2^{10})}.$$

2. On calcule de même $F_{2,I} = \mathbf{H}F_{1,I}$ et $F_{3,I} = \mathbf{J}F_{1,I}$; et on trouve

$$\boxed{F_{2,I} = -(Z_1^{20} + Z_2^{20}) + 228(Z_1^{15} Z_2^5 - Z_1^5 Z_2^{15}) - 494 Z_1^{10} Z_2^{10}},$$

et

$$\boxed{F_{3,I} = Z_1^{30} + Z_2^{30} + 522(Z_1^{25} Z_2^5 - Z_1^5 Z_2^{25}) - 10005(Z_1^{20} Z_2^{10} + Z_1^{10} Z_2^{20})}.$$

Relations entre les fonctions orbitales : tous les chemins mènent à $F_{1,T}$

On a trouvé, avec le jacobien et le hessien, deux outils très utiles pour réduire le nombre de calculs à effectuer ; cependant, jusque là, on a étudié séparément chacun des solides platoniciens : le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre. Mais, en y réfléchissant bien, on sait par exemple que dans l'icosaèdre, on peut inscrire 5 tétraèdres, dont les sommets sont les milieux de faces de l'icosaèdre ; et dans le tétraèdre, on peut inscrire un octaèdre dont les sommets seront les milieux d'arêtes du tétraèdre... Toutes ces constructions doivent forcément se traduire par des relations entre les fonctions orbitales. C'est ce que nous allons étudier par la suite.

PREMIERS RÉSULTATS : RELATIONS "INTRA-SOLIDES"

Tout d'abord, on va chercher tous les liens possibles entre $F_{1,T}$, $F_{2,T}$ et $F_{3,T}$, resp. $F_{1,O}$, $F_{2,O}$ et $F_{3,O}$, resp. $F_{1,I}$, $F_{2,I}$ et $F_{3,I}$. Certains liens, pour illustrer à quel point les solides platoniciens, c'est fun, d'autres, parce qu'ils nous seront grandement utiles dans la suite.

Pour ce faire, la stratégie va être la suivante : soit \mathcal{S} un solide platonicien, et soit $F_{i,\mathcal{S}}$, pour $1 \leq i \leq 3$, une des fonctions orbitales associées à ce solide. On étudie l'ensemble des zéros de $F_{i,\mathcal{S}}$: on cherche à découper le cardinal de cet ensemble en une somme de cardinaux des zéros des fonctions $F_{j,\mathcal{S}}$, $\mathbf{H}F_{j,\mathcal{S}}$, et $\mathbf{J}F_{j,\mathcal{S}}$ (où j peut éventuellement être égal à i) ; autrement dit, on cherche à découper le cardinal de l'ensemble des zéros de $F_{i,\mathcal{S}}$ en somme de nombre d'arêtes, de sommets, de faces, du solide \mathcal{S} . Cela nous donne une hypothétique égalité entre la fonction de départ, $F_{i,\mathcal{S}}$, et le produit des fonctions correspondant à cette décomposition du cardinal de l'ensemble des zéros de $F_{i,\mathcal{S}}$ en une somme. Il suffit alors de faire appel à SAGE pour vérifier les calculs, voir annexe III.4.2. Dans toute la suite, pour connaître les degrés de chaque fonction, il suffit de se référer au tableau III.1, ainsi qu'au corollaire III.2.29.

Le tétraèdre

- Par exemple, on sait déjà que

$$\begin{aligned} F_{2,T} &= \mathbf{H}F_{1,T} \\ F_{3,T} &= \mathbf{J}F_{1,T}. \end{aligned}$$

- De plus, considérons $\mathbf{H}F_{2,T}$: c'est une fonction Γ' -semi-invariante, car $F_{2,T}$ l'est, elle est de degré $2(4 - 2) = 4$; on peut décomposer ce chiffre, d'après le tableau III.1, uniquement avec des 4 ou des 6 : seule possibilité, c'est bien sûr 1×4 , soit le même cardinal des zéros de $F_{1,T}$. Ainsi, la théorie nous donne à croire que, à scalaire près,

$$\mathbf{H}F_{2,T} = F_{1,T}.$$

Un calcul avec SAGE confirme ce résultat.

- De même, on trouve

$$\mathbf{J}F_{2,T} = F_{3,T}.$$

L'octaèdre (et l'icosaèdre)

On effectue le même travail pour l'octaèdre. Voyons juste un dernier exemple : le lien entre $HF_{2,O}$ et $F_{1,O}$: $HF_{2,O}$ est de degré $2(8 - 2) = 12 = 2 \times 6$, ou 1×12 ; ainsi, au niveau des degrés, on peut avoir $HF_{2,T} = F_{1,O}^2$ ou $HF_{2,T} = F_{3,O}$. Un calcul *via* SAGE nous montre que c'est la première égalité qui gagne :

$$HF_{2,O} = F_{1,O}^2.$$

Bref! Regroupons tous ces résultats ludiques dans un tableau :

Solide	Relations entre les fonctions		
Tétraèdre	$HF_{1,T} = F_{2,T}$	$HF_{2,T} = F_{1,T}$	$HF_{3,T} = F_{1,T} \cdot F_{2,T}$
	$JF_{1,T} = F_{3,T}$	$JF_{2,T} = F_{3,T}$	
Octaèdre	$HF_{1,O} = F_{2,O}$	$HF_{2,O} = F_{1,O}^2$	
Icosaèdre	$HF_{1,I} = F_{2,I}$	$HF_{2,I} = F_{1,I}^3$	
		$JF_{2,I} = F_{3,I} \cdot F_{1,I}^2$	

TABLE III.2 – Liens entre les fonctions orbitales de chaque solide platonicien

AUTRES RÉSULTATS : RELATIONS ENTRE LES SOLIDES

Maintenant, on va attaquer la partie vraiment intéressante (mais pas moins ludique pour autant), où l'on va traduire des observations géométriques faisant intervenir différents solides platoniciens en des relations entre les fonctions correspondantes.

Lien tétraèdre/octaèdre

Ce lien se voit immédiatement sur la figure III.9 : comme annoncé dans le début de cette section, on peut construire un octaèdre dans le tétraèdre, de sorte à ce que chaque milieu d'arête du tétraèdre soit un sommet de l'octaèdre.

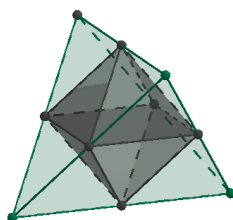


FIGURE III.9 – Octaèdre inscrit dans le tétraèdre

Cela se traduit par une égalité (que l'on vérifie encore une fois avec SAGE) entre la fonction associée aux sommets de l'octaèdre, et celle associée aux milieux d'arêtes du tétraèdre, soit :

$$F_{1,O} = F_{3,T}.$$

Cette égalité nous permet déjà d'exprimer toutes les fonctions du tétraèdre et de l'octaèdre en fonction de $F_{1,T}$.

Solide	$F_{1,S}$	$F_{2,S}$	$F_{3,S}$
Tétraèdre	$F_{1,T}$	$\mathbb{H}F_{1,T}$	$\mathbb{J}F_{1,T}$
Octaèdre	$F_{3,T} = \mathbb{J}F_{1,T}$	$\mathbb{H}F_{1,O} = \mathbb{H}(\mathbb{J}F_{1,T}) \stackrel{(\star)}{=} F_{1,T} \cdot \mathbb{H}F_{1,T}$	$\mathbb{J}(\mathbb{J}F_{1,T})$

TABLE III.3 – Fonctions orbitales des solides platoniciens exprimées en fonction de $F_{1,T}$

(\star) : cette égalité se faisant de même, en étudiant les degrés des fonctions considérées.

A présent, pour que tout soit parfait, il faudrait réussir à récupérer également les $F_{k,I}$ en fonction de $F_{1,T}$; autrement dit, il nous faut trouver un lien entre l'icosaèdre et le tétraèdre.

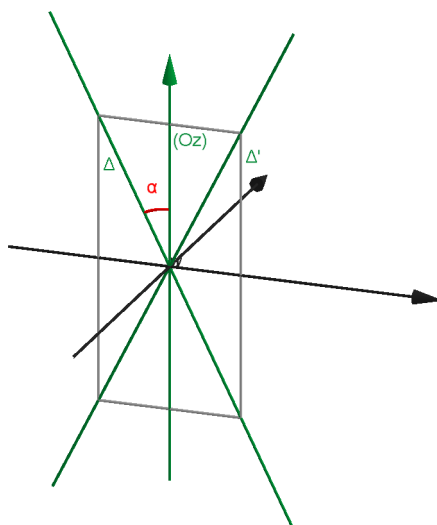
Lien tétraèdre/icosaèdre

Ce lien, nous l'avons déjà annoncé : dans l'icosaèdre peuvent s'inscrire 5 tétraèdres, chacun ayant pour sommets des milieux de faces de l'icosaèdre. On va donc expliciter un lien entre $F_{2,I}$ et $F_{1,T}$.

On appelle I_0 l'icosaèdre construit à l'aide d'une configuration d'or, comme sur la figure II.9. On sait que T , notre tétraèdre, celui pour lequel on avait calculé $F_{1,T}$, est inscrit dans I_0 .

Or, l'icosaèdre pour lequel on avait calculé les $F_{1,I}$, $F_{2,I}$ et $F_{3,I}$ n'était pas I_0 , mais I , l'icosaèdre obtenu par rotation ρ de I_0 , d'angle $\alpha = \arctan(g)$, avec g racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$; et d'axe $(0, -1, 0)$, voir partie II.2.

La situation est la suivante :

FIGURE III.10 – Visualisation de la rotation $\rho := \rho_{(0,-1,0),\alpha}$

On a

$$\begin{aligned}\rho : (Oz) &\longmapsto \Delta \\ \Delta' &\longmapsto (Oz) \\ I_0 &\longmapsto I\end{aligned}$$

Comme $T \subset I_0$, alors $\rho(T) \subset \rho(I_0) = I$.

On exprime ρ en projectif, *via* la proposition I.2.1. On notera encore ρ la rotation projetée dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$.

$$f(\rho) =: \rho = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & \sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -\sin(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix}.$$

On va simplifier cette écriture. En effet, on rappelle que $\alpha = \arctan(g)$, c'est-à-dire $g = \tan(\alpha)$. On note $\gamma := \tan(\frac{\alpha}{2})$; par des relations de trigonométrie, on trouve que γ est solution positive de l'équation

$$\frac{2\gamma}{1-\gamma^2} = g$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+1}}, \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}}.\end{aligned}$$

D'où une nouvelle expression pour ρ :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix} : \in \text{PSU}_2(\mathbb{C}).$$

Seulement voilà, nous, ce que l'on veut, ce n'est pas une rotation qui nous fait passer de I_0 à I , puisque dans ce dernier, on ne retrouve pas le tétraèdre T . Il faut donc effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire à partir de l'icosaèdre I , revenir sur I_0 , qui lui contient T , dont les sommets vont être les centres de faces de I_0 .

Autrement dit, ce qui nous intéresse, c'est ρ^{-1} :

$$\begin{aligned} \rho^{-1} : I &\longmapsto I_0 \\ \Delta &\longmapsto (Oz) \end{aligned}$$

Cette rotation a pour expression, comme elle est dans $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$:

$$\rho^{-1} = {}^t\rho = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} : \in \text{PSU}_2(\mathbb{C}).$$

Étudions $\rho(T)$, et en particulier, la fonction $F_{1,\rho(T)}$ associée à ses sommets. L'égalité clef pour obtenir le lien que l'on cherche est la suivante :

$$F_{1,\rho(T)} = F_{1,T} \circ \rho^{-1}. \quad (\star)$$

Pourquoi une telle égalité ? Soit on peut voir que les deux fonctions ont les mêmes zéros, à savoir, les sommets de $\rho(T)$, et qu'elles sont de même degré ; soit, un peu plus subtil, on se rend compte que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow \rho & \nearrow F \circ \rho^{-1} & \\ \rho(T) & & \end{array}$$

Reste à voir qu'en ayant le tétraèdre T dans $I_0 = \rho^{-1}(I)$, on arrive bien à retrouver les 5 tétraèdres inscrits dans l'icosaèdre.

Pour ce faire, considérons s_I , la rotation d'ordre 5 de l'icosaèdre, définie en II.2, $s_I : z \mapsto \zeta_5 \cdot z$. Le groupe engendré par cet élément est égal, par une inclusion et égalité des cardinaux, au groupe cyclique $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Dans I_0 , on comprend aisément que le stabilisateur du tétraèdre T va être inclus dans l'intersection $\Gamma_T \cap \langle s_I \rangle$, laquelle est triviale, puisque $\Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4$, qui ne possède aucun élément d'ordre 5, par le théorème de Lagrange.

On a donc

$$\text{Stab}(T) = \{e\}.$$

Ainsi, on a bien une bijection entre l'orbite de T sous l'action du groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; autrement dit, l'orbite est de cardinal 5, on retombe donc bien sur les 5 tétraèdres inscrits comme prévu dans l'icosaèdre I_0 , et donc 5 tétraèdres inscrits dans I .

A présent, on va noter C_I l'ensemble des centres de faces de l'icosaèdre. Le résultat précédent nous permet de dire que

$$C_I = \bigcup_{k=0}^4 S_{s_I^k(\rho(T))},$$

avec on le rappelle, \mathcal{S}_A l'ensemble des sommets du solide platonicien A .

Traduit en fonctions orbitales pleines, cela nous conduit à l'égalité

$$F_{2,I} = \prod_{k=0}^4 F_{1,s_I^k(\rho(T))},$$

soit, d'après la relation (\star) :

$$F_{2,I} = \prod_{k=0}^4 F_{1,T} \circ (\rho^{-1} \circ s_I^{-k}).$$

Et ça y est ! On a notre lien entre $F_{2,I}$ et $F_{1,T}$, ouf.

Solide	$F_{1,\mathcal{S}}$	$F_{2,\mathcal{S}}$	$F_{3,\mathcal{S}}$
Tétraèdre	$F_{1,T}$	$\mathbb{H}F_{1,T}$	$\mathbb{J}F_{1,T}$
Octaèdre	$F_{3,T} = \mathbb{J}F_{1,T}$	$\mathbb{H}F_{1,O} = \mathbb{H}(\mathbb{J}F_{1,T}) \stackrel{(\star)}{=} F_{1,T} \cdot \mathbb{H}F_{1,T}$	$\mathbb{J}(\mathbb{J}F_{1,T})$
Icosaèdre		$\prod_{k=0}^4 F_{1,T} \circ (\rho^{-1} \circ s_I^{-k})$	

TABLE III.4 – Fonctions orbitales des solides platoniciens exprimées en fonction de $F_{1,T}$

Remarque III.2.36. Il manque deux cases dans le tableau, remboursez !

Pour déterminer $F_{1,I}$ et $F_{3,I}$, on va utiliser les relations établies dans le tableau III.2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}F_{2,I} &= F_{1,I}^3 \\ \mathbb{J}F_{2,I} &= F_{3,I} \cdot F_{1,I}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{\mathbb{H}F_{2,I}}{\mathbb{J}F_{2,I}} = \frac{F_{1,I}^2}{F_{3,I}},$$

qui est une forme irréductible, puisque $F_{1,I}$ et $F_{3,I}$ n'ont, de par leur définition, aucun zéro en commun.

Or, on sait que la fonction $F_{3,I}$ est le jacobien de la fonction $F_{1,I}$; on a donc

$$\frac{HF_{2,I}}{JF_{2,I}} = \frac{F_{1,I}^2}{JF_{1,I}}.$$

La fonction étant elle-même le jacobien de $F_{1,I}$ on obtient tout d'abord une équation en $F_{1,I}$, qui nous donne l'expression de celle-ci en fonction de $F_{1,T}$; le jacobien nous permet d'exprimer enfin $F_{2,I}$ en fonction de $F_{1,T}$.



III.3 Générateurs de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$

D'après ce qui vient d'être fait dans la partie précédente, on peut trouver une fonction f à une variable (après déshomogénéisation) et qui est Γ -invariante par construction : $f \in \mathbb{C}(z)^\Gamma$. Maintenant, notre but est de chercher les générateurs de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$.

Cette partie est une succession de propositions qui permettront au fur et à mesure d'aboutir à des théorèmes importants. Nous ne présentons ici que les preuves les plus essentielles pour la suite du raisonnement, les autres preuves peuvent être trouvées en annexe III.4.3.

Proposition III.3.1. *Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ non constante telle que $f = \frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ premiers entre eux.*

Alors

$$[\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(f)(z)] = \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

Proposition III.3.2.

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X))$$

Proposition III.3.3. *Les générateurs α (ou éléments primitifs) de $\mathbb{C}(Y)$ sont de la forme :*

$$\alpha = \frac{aY + b}{cY + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Raisonnons par double équivalence.

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ Soit } \alpha = \frac{aY + b}{cY + d}.$$

$$\text{On en déduit : } Y = \frac{a'\alpha + b'}{c'\alpha + d'}, \text{ où } \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Donc

$$\mathbb{C}(\alpha) = \mathbb{C}(Y).$$

$$\boxed{\Rightarrow} \text{ On suppose que } \mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(\alpha).$$

Alors, d'après la propriété universelle des fractions rationnelles : $\exists \phi$ un morphisme de corps tel que :

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}(Y) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\alpha) \\ Y & \mapsto & \alpha \end{array}$$

Le morphisme ϕ est surjectif par définition et injectif car son domaine de départ est un corps, où il n'y a pas d'idéal non trivial.

Puisque $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(\alpha)$, on a $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(Y))$. D'après la proposition III.3.2, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(Y)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, donc

$$\alpha = \phi(Y) = \frac{aY + b}{cY + d}.$$

□

Proposition III.3.4. Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Alors :

$$\exists ! g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}); \begin{cases} g(z_1) = \infty \\ g(z_2) = 0 \\ g(z_3) = 1 \end{cases}$$

Proposition III.3.5. Soit $\bar{f} \in \mathbb{C}(z)$ non constante.

On fixe $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $\bar{f}(z_1), \bar{f}(z_2), \bar{f}(z_3)$ soient deux à deux distincts.

Alors :

$$\exists ! f; \mathbb{C}(f) = \mathbb{C}(\bar{f}) \text{ et } \begin{cases} f(z_1) = \infty \\ f(z_2) = 0 \\ f(z_3) = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Appliquons la proposition III.3.4 à $\bar{f}(z_1), \bar{f}(z_2), \bar{f}(z_3)$:

$$\exists ! g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}); \begin{cases} g(\bar{f}(z_1)) = \infty \\ g(\bar{f}(z_2)) = 0 \\ g(\bar{f}(z_3)) = 1 \end{cases}$$

On pose alors : $f = g \circ \bar{f} = \frac{a\bar{f} + b}{c\bar{f} + d}$.

Ainsi, on a bien $\mathbb{C}(\bar{f}) = \mathbb{C}(f)$ et puisque g est unique, f l'est aussi. □

Théorème III.3.6. Soit $f = (G : H)$, avec G et H des produits de formes pleines orbitales de même degré.

Alors :

$$\mathbb{C}(z)^\Gamma = \mathbb{C}(f)$$

Démonstration. Raisonnons par double inclusion.

□ Commençons par l'inclusion évidente.

On a $f \in \mathbb{C}(z)^\Gamma$ d'après le théorème III.2.22 et $\mathbb{C}(f)$ est engendré par f donc :

$$\mathbb{C}(f) \subset \mathbb{C}(z)^\Gamma.$$

□ On considère deux orbites dégénérées, ce qui nous donne deux polynômes $G_{\mathcal{O}_1}$ et $H_{\mathcal{O}_2}$ de degré $< |\Gamma|$.

On met chacun des deux polynômes à la puissance l'ordre du stabilisateur n_i d'un élément p_i de l'orbite correspondante, $i = 1, 2$. Nous obtenons ainsi :

- $G_{\mathcal{O}_1}^{n_1}$ de degré $|\mathcal{O}_1|.n_1 = |\Gamma|$
- $H_{\mathcal{O}_2}^{n_2}$ de degré $|\mathcal{O}_2|.n_2 = |\Gamma|$

On a :

$$\left. \begin{array}{c} \mathbb{C}(z) \\ | \\ \mathbb{C}(f) \\ | \\ \mathbb{C}(z)^\Gamma \end{array} \right] |\Gamma|$$

D'après la proposition III.3.1, $[\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(f)(z)] = |\Gamma|$, donc $[\mathbb{C}(f) : \mathbb{C}(z)^\Gamma] = 1$, ce qui nous donne

$$\mathbb{C}(f)(z) = \mathbb{C}(z)^\Gamma.$$

□

Unicité de f

Nous savons maintenant qu'on peut trouver un générateur de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$, mais avons-nous l'unicité de ce générateur ? Nous avons besoin de la proposition suivante pour répondre.

Proposition III.3.7. *Soit α un élément primitif de $\mathbb{C}(X)$.*

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\alpha) \iff \alpha \text{ est de la forme } \alpha = \frac{aX + b}{cX + d} \text{ avec } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Raisonnons par double équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nous supposons que $\alpha = \frac{aX + b}{cX + d}$.

Puisque $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit par homographies sur $\mathbb{C}(X)$, nous avons : $X = \frac{a'\alpha + b'}{c'\alpha + d'}$, où

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\alpha)$.

D'après la propriété universelle des fractions rationnelles, il existe un morphisme de corps ϕ :

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\alpha) \\ X & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

Le morphisme ϕ est surjectif par définition et injectif car nous partons d'un corps où il n'y a pas d'idéal non trivial.

Ainsi, puisque $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\alpha)$, ϕ est un automorphisme de corps : $\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X))$.

D'après la proposition III.4.4, $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)) = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$, donc il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ tel que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi(X) \\ &= \frac{aX + b}{cX + d} \end{aligned}$$

□

Nous déduisons de cette proposition que si nous avons deux générateurs de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$, il existe une homographie qui permet de passer de l'un à l'autre ; autrement dit : un générateur de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ est unique à homographie près.

Calcul de f pour les solides platoniciens

On considère $\Gamma \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Dans la partie précédente (voir III.2.2), nous avons défini $F_{1,\Gamma}$, $F_{2,\Gamma}$ et $F_{3,\Gamma}$.

Nous avons : $\deg(F_{1,\Gamma}) = |\mathcal{S}_\Gamma|$, $\deg(F_{2,\Gamma}) = |\mathcal{F}_\Gamma|$ et $\deg(F_{3,\Gamma}) = |\mathcal{A}_\Gamma|$ et on note

$$n_1 = \frac{|\Gamma|}{|\mathcal{S}_\Gamma|}, n_2 = \frac{|\Gamma|}{|\mathcal{F}_\Gamma|} \text{ et } n_3 = \frac{|\Gamma|}{|\mathcal{A}_\Gamma|} \text{ l'ordre des stabilisateurs.}$$

Pour tout i , $F_{i,\Gamma}^{n_i}$ est une forme orbitale pleine, et toutes les $F_{i,\Gamma}^{n_i}$ ont le même caractère associé, pour Γ fixé.

Posons : $\bar{F}_\Gamma = \frac{F_{2,\Gamma}^{n_2}}{F_{1,\Gamma}^{n_1}}$. Alors :

- \bar{F}_Γ est homogène de degré 0 ;
- \bar{F}_Γ est Γ' -invariante : $\bar{F}_\Gamma(\gamma \cdot (Z_1, Z_2)) = \frac{\chi_\Gamma(\gamma) F_{2,\Gamma}^{n_2}}{\chi_\Gamma(\gamma) F_{1,\Gamma}^{n_1}} = \bar{F}_\Gamma((Z_1, Z_2))$;
- \bar{F}_Γ passe au quotient : $\bar{F}_\Gamma((\lambda Z_1, \lambda Z_2)) = \bar{F}_\Gamma(Z_1, Z_2)$.

Par passage au quotient, \bar{F}_Γ devient alors une fonction Γ -invariante que l'on notera \bar{f}_Γ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{\bar{F}_\Gamma} & \mathbb{C} \\ \pi \uparrow & \nearrow \bar{f}_\Gamma & \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

Puisque $\bar{f}_\Gamma \in \mathbb{C}(z)^\Gamma$, on a :

$$\mathbb{C}(\bar{f}_\Gamma) \subset \mathbb{C}(z)^\Gamma \subset \mathbb{C}(z),$$

avec $[\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(z)^\Gamma] = |\Gamma|$ et $[\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(\bar{f}_\Gamma)] = \deg(\bar{f}_\Gamma)$.

Or, d'après la proposition III.3.1, $\deg(\bar{f}_\Gamma) = |\Gamma|$.

Donc : $[\mathbb{C}(z)^\Gamma : \mathbb{C}(\bar{f}_\Gamma)] = 1$, d'où

$$\mathbb{C}(z)^\Gamma = \mathbb{C}(\bar{f}_\Gamma).$$

La fonction \bar{f}_Γ est donc un élément primitif pour $\mathbb{C}(z)^\Gamma$, mais vérifie-t-elle le critère d'unicité ?
Presque...

Par définition de \bar{F}_Γ on a :

$$\begin{aligned} \bar{f}_\Gamma(s) &= \infty, \quad \forall s \in \{\text{sommets}\} \\ \bar{f}_\Gamma(c) &= 0, \quad \forall c \in \{\text{centres de face}\} \\ \bar{f}_\Gamma(a) &= \alpha, \quad \forall a \in \{\text{milieux d'arêtes}\} \text{ avec } \alpha \neq \infty \text{ et } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\boxed{f_\Gamma = \alpha^{-1} \bar{f}_\Gamma}$$

f_Γ est alors l'unique élément primitif de $\mathbb{C}(z)^\Gamma$ telle que $\begin{cases} f_\Gamma(s) = \infty \\ f_\Gamma(c) = 0 \\ f_\Gamma(a) = 1 \end{cases}$

Exemples III.3.8.

1. Cas cyclique : Nous avons deux orbites dégénérées, donc deux formes pleines orbitales :

- $\mathcal{O}_1 = \{0\}, F_1^n = Z_1^n$;
- $\mathcal{O}_2 = \{\infty\}, F_2^n = Z_2^n$.

$$\text{Donc : } \bar{F}_{C_n} = \frac{Z_1^n}{Z_2^n}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\bar{f}_{C_n} = z^n}.$$

2. Cas diédral : Nous avons trois orbites dégénérées, donc trois formes pleines orbitales :

- $\mathcal{O}_1 = \{0, \infty\}$, $F_1^n = Z_1^n Z_2^n$;
- $\mathcal{O}_2 = \{\zeta_n^k, 0 \leq k \leq n-1\}$, c'est l'orbite des sommets, donc $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(1)$, l'orbite de l'élément $(1, 1)$, et nous avons : $F_2^2 = (Z_1^n - Z_2^n)^2$;
- $\mathcal{O}_3 = \{\zeta_{2n}^{2k+1}, 0 \leq k \leq n-1\}$, c'est l'orbite des milieux d'arêtes et nous avons : $F_3^2 = (Z_1^n + Z_2^n)^2$.

Donc on pose :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{D_n} &= \frac{F_3^2}{F_1^n} \\ &= \frac{(Z_1^n + Z_2^n)^2}{Z_1^n Z_2^n} \\ &= Z_2^n \frac{\left(\frac{Z_1^n}{Z_2^n} + 1\right)^2}{Z_1^n} \end{aligned}$$

Il reste à calculer \bar{F}_{D_n} sur $\mathcal{O}(1)$. On calcule : $\bar{F}_{D_n}(1, 1) = 4$.

On en déduit :

$$\boxed{f_{D_n} = \frac{(z^n + 1)^2}{4z^n}}$$

3. Cas du tétraèdre : Nous avons trois orbites dégénérées, donc trois formes orbitales pleines dont les calculs ont été effectués dans la partie III.2.2 :

- L'orbite des sommets, associée à la forme pleine $F_{1,T}^3 = (Z_1^4 - 2i\sqrt{3}Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^4)^3$;
- L'orbite des centres de faces, associée à la forme pleine $F_{2,T}^3 = (Z_1^4 + 2i\sqrt{3}Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^4)^3$;
- L'orbite des milieux d'arêtes, associée à la forme pleine $F_{3,T}^2 = (Z_1 Z_2 (Z_1^4 - Z_2^4))^2$.

Donc on pose :

$$\begin{aligned} \bar{F}_T &= \frac{F_{2,T}^3}{F_{1,T}^3} \\ &= \left(\frac{Z_1^4 + 2i\sqrt{3}Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^4}{Z_1^4 - 2i\sqrt{3}Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^4} \right)^3 \end{aligned}$$

Il reste à évaluer \bar{F}_T sur un milieu d'arête : le point $(0, 0, 0)$ est le milieu du segment joignant le sommet $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ au sommet $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$; le point $(0, 0, 0)$ correspond à la droite $[1 : 0]$, et l'on a $\bar{F}_T(1, 0) = 1$.

D'où : $F_T = \frac{F_{2,T}^3}{F_{1,T}^3}$, et on en déduit :

$$\boxed{f_T = \left(\frac{z^4 + 2i\sqrt{3}z^2 + 1}{z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 + 1} \right)^3}$$

4. Cas de l'octaèdre : Rappelons comme pour le tétraèdre les formes pleines orbitales associées à leur orbite :

- L'orbite des sommets, associée à la forme pleine $F_{1,O}^4 = Z_1^4 Z_2^4 (Z_1^4 - Z_2^4)^4$;
- L'orbite des centres de faces, associée à la forme pleine $F_{2,O}^3 = (Z_1^8 + 14Z_1^4 Z_2^4 + Z_2^8)^3$;
- L'orbite des milieux d'arêtes, associée à la forme pleine $F_{3,O}^2 = (Z_1^{12} - 33Z_1^8 Z_2^4 - 33Z_1^4 Z_2^8 + Z_2^{12})^2$.

Donc on pose :

$$\begin{aligned} \bar{F}_O &= \frac{F_{2,O}^3}{F_{1,O}^4} \\ &= \frac{(Z_1^8 + 14Z_1^4 Z_2^4 + Z_2^8)^3}{Z_1^4 Z_2^4 (Z_1^4 - Z_2^4)^4} \\ &= \frac{Z_2^{24} \left(\frac{Z_1^8}{Z_2^8} + 14 \frac{Z_1^4}{Z_2^4} + 1 \right)^3}{Z_2^{24} \left(\frac{Z_1^5}{Z_2^5} - \frac{Z_1}{Z_2} \right)} \\ &= \frac{\left(\frac{Z_1^8}{Z_2^8} + 14 \frac{Z_1^4}{Z_2^4} + 1 \right)^3}{\frac{Z_1^5}{Z_2^5} - \frac{Z_1}{Z_2}} \end{aligned}$$

On trouve ensuite $\bar{F}_O(a) = 108$ avec a un milieu d'arête.

D'où : $F_O = \frac{F_{2,O}^3}{108 F_{1,O}^4}$.

Nous obtenons alors :

$$f_O = \frac{(z^8 + 14z^4 + 1)^3}{108(z^5 - z)}$$

5. Cas de l'icosaèdre : Procédons de la même façon pour l'icosaèdre grâce à la partie III.2.2.

On a :

- L'orbite des sommets, associée à la forme pleine $F_{1,I}^5 = Z_1^5 Z_2^5 (Z_1^{10} + 11Z_1^5 Z_2^5 - Z_2^{10})^5$;
- L'orbite des centres de faces, associée à la forme pleine $F_{2,I}^3 = (- (Z_1^{20} + Z_2^{20}) + 228(Z_1^{15} Z_2^5 - Z_1^5 Z_2^{15}) - 494Z_1^{10} Z_2^{10})^3$;
- l'orbite des milieux d'arêtes, associée à la forme pleine $F_{3,I}^2 = (Z_1^{30} + Z_2^{30} + 522(Z_1^{25} Z_2^5 - Z_1^5 Z_2^{25}) - 10005(Z_1^{20} Z_2^{10} + Z_1^{10} Z_2^{20}))^2$.

Nous posons :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_I &= \frac{F_{2,I}^3}{F_{1,I}^5} \\
&= \frac{-(Z_1^{20} + Z_2^{20}) + 228(Z_1^{15}Z_2^5 - Z_1^5Z_2^{15}) - 494Z_1^{10}Z_2^{10}}{Z_1^5Z_2^5(Z_1^{10} + 11Z_1^5Z_2^5 - Z_2^{10})^5} \\
&= \frac{Z_2^{60} \left(-\left(\frac{Z_1^{20}}{Z_2^{20}} + 1\right) + 228\left(\frac{Z_1^{15}}{Z_2^{15}} - \frac{Z_1^5}{Z_2^5}\right) - 494\frac{Z_1^{10}}{Z_2^{10}} \right)^3}{Z_1^5Z_2^5Z_2^{50} \left(\frac{Z_1^{10}}{Z_2^{10}} + 11\frac{Z_1^5}{Z_2^5} - 1 \right)^5} \\
&= \frac{Z_2^5 \left(-\left(\frac{Z_1^{20}}{Z_2^{20}} + 1\right) + 228\left(\frac{Z_1^{15}}{Z_2^{15}} - \frac{Z_1^5}{Z_2^5}\right) - 494\frac{Z_1^{10}}{Z_2^{10}} \right)^3}{Z_1^5 \left(\frac{Z_1^{10}}{Z_2^{10}} + 11\frac{Z_1^5}{Z_2^5} - 1 \right)^5}
\end{aligned}$$

Nous trouvons ensuite $\bar{F}_I(a) = 1728$ avec a un milieu d'arête.

Nous avons donc :

$$f_I = \frac{(-z^{20} + 228z^{15} - 494z^{10} - 228z^5 - 1)^3}{1728z(z^{10} + 11z^5 - 1)^5}$$

III.4 Annexes



III.4.1 Calcul des fonctions orbitales associées pour T , O et I

Dans cette annexe, on décrit la programmation des calculs des fonctions orbitales associées aux tétraèdre, octaèdre et icosaèdre.

Pour ce faire, il nous faut créer un programme permettant de calculer, pour une fonction donnée, son hessien et son jacobien. Le voici.

```
def Hf_Jf(F) :
D11 = (F.diff(Z1)).diff(Z1)
D22 = (F.diff(Z2)).diff(Z2)
D12 = (F.diff(Z1)).diff(Z2)
D11 = (F.diff(Z2)).diff(Z1)
H = matrix(2, 2, [D11, D12, D21, D22])
HF=det(H)
D1 = F.diff(Z1)
D2 = F.diff(Z2)
D3 = HF.diff(Z1)
D4 = HF.diff(Z2)
J = matrix(2, 2, [D1, D2, D3, D4])
JF=det(J)
return (HF.simplify_full(), JF.simplify_full())
```

Il ne nous reste plus qu'à appliquer ce programme à chacun des solides platoniciens, en commençant toutefois par calculer "à la main" la fonction F_1 associée aux sommets...

TÉTRAÈDRE

- Calcul de $F_{1,T}$:

```
var('Z1, Z2')
```

$$F_1 = (Z1 - ((1 + I)/(sqrt(3) - 1)) * Z2) * (Z1 + ((1 + I)/(sqrt(3) - 1)) * Z2) * \\ (Z1 - ((1 - I)/(sqrt(3) + 1)) * Z2) * (Z1 + ((1 - I)/(sqrt(3) + 1)) * Z2).simplify_full()$$

```
show(F_1)
```

$$-2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4 + Z_2^4.$$

- Calcul de $HF_{1,T} = F_{2,T}$ et de $JF_{1,T} = F_{3,T}$:

```
show(Hf_Jf(F_1))
```

$$(48i\sqrt{3}Z_1^4 - 48i\sqrt{3}Z_2^4 + 288Z_1^2Z_2^2, 4608Z_1^5Z_2 - 4608Z_1Z_2^5)$$

$$F_2 = ((Hf_Jf(F_1)[0])/(-48 * I - sqrt(3))).expand()$$

show(F_2.simplify_full())

$$2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2^2 + Z_1^4 + Z_2^4$$

F_3 = ((Hf_Jf(F_1)[1])/4608).expand()

show(F_3.simplify_full())

$$Z_1^5Z_2 - Z_1Z_2^5$$

OCTAÈDRE

- Calcul de $F_{1,O}$:

F_1 = (Z2 * Z1 * (Z1 - Z2) * (Z1 + Z2) * (Z1 + I * Z2) * (Z1 - I * Z2)).simplify_full()

show(F_1)

$$Z_1^5Z_2 - Z_1Z_2^5$$

- Calcul de $HF_{1,O} = F_{2,O}$ et de $JF_{1,O} = F_{3,O}$:

show(Hf_Jf(F_1))

$$(-25Z_1^8 - 350Z_1^4Z_2^4 - 25Z_2^8, 200Z_1^{12} - 6600Z_1^8Z_2^4 - 6600Z_1^4Z_2^8 + 200Z_2^{12})$$

F_2 = ((Hf_Jf(F_1)[0])/(-25)).expand()

show(F_2.simplify_full())

$$Z_1^8 + 14Z_1^4Z_2^4 + Z_2^8$$

F_3 = ((Hf_Jf(F_1)[1])/200).expand()

show(F_3.simplify_full())

$$Z_1^{12} - 33Z_1^8Z_2^4 - 33Z_1^4Z_2^8 + Z_2^{12}$$

ICOSAÈDRE

- Calcul de $F_{1,I}$:

$$g = 1/2 * \text{sqrt}(5) - 1/2$$

$$h = -1/2 * \text{sqrt}(5) - 1/2$$

$$L = [(Z1 - \exp((2 * \text{pi} * i * j)/5)) * g * Z2 \text{ for } j \text{ in range } (5)]$$

$$M = \text{prod}(L).simplify_full()$$

show(M)

$$K = [(Z1 - \exp((2 * \text{pi} * i * j)/5)) * h * Z2 \text{ for } j \text{ in range } (5)]$$

$$N = \text{prod}(K).simplify_full()$$

show(N)

$$-\frac{1}{2}(5\sqrt{5} - 11)Z_2^5 + Z_1^5$$

$$\frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 11)Z_2^5 + Z_1^5$$

F_1 = (Z1 * Z2 * M * N).simplify_full()
show(F_1)

$$Z_1^{11}Z_2 + 11Z_1^6Z_2^6 - Z_1Z_2^{11}$$

- Calcul de $\text{HF}_{1,I} = F_{2,I}$ et de $\text{JF}_{1,I} = F_{3,I}$:

show(Hf_Jf(F_1))

$$(-121Z_1^{20} + 27588Z_1^{15}Z_2^5 - 59774Z_1^{10}Z_2^{10} - 27588Z_1^5Z_2^{15} - 121Z_2^{20}, 2420Z_1^{30} + 1263240Z_1^{25}Z_2^5 - 24212100Z_1^{20}Z_2^{10} - 24212100Z_1^{10}Z_2^{20} - 1263240Z_1^5Z_2^{25} + 2420Z_2^{30})$$

F_2 = ((Hf_Jf(F_1)[0])/(-121)).expand()
show(F_2.simplify_full())

$$Z_1^{20} - 228Z_1^{15}Z_2^5 + 494Z_1^{10}Z_2^{10} + 228Z_1^5Z_2^{15} + Z_2^{20}$$

F_3 = ((Hf_Jf(F_1)[1])/2420).expand()
show(F_3.simplify_full())

$$Z_1^{30} + 522Z_1^{25}Z_2^5 - 10005Z_1^{20}Z_2^{10} - 10005Z_1^{10}Z_2^{20} - 522Z_1^5Z_2^{25} + Z_2^{30}$$



III.4.2 Relations entre les fonctions orbitales associées à T , O et I -Exemples de calculs

Dans cette annexe, on donne quelques exemples de calculs de liens que l'on peut établir entre les différentes fonctions orbitales.

- Lien $F_{3,T}/F_{1,T}$ et $F_{2,T}$:

$$F1T = Z1^4 - 2 * I * \text{sqrt}(3) * Z1^2 * Z2^2 + Z2^4$$

$$F2T = Z1^4 + 2 * I * \text{sqrt}(3) * Z1^2 * Z2^2 + Z2^4$$

$$(F1T * F2T).\text{expand}().\text{show}()$$

$$Z_1^8 + 14Z_1^4Z_2^4 + Z_2^8$$

$$(H(F3T)/(-25)).\text{expand}().\text{show}()$$

$$Z_1^8 + 14Z_1^4Z_2^4 + Z_2^8$$

On a donc bien : $\boxed{HF_{3,T} = F_{1,T}.F_{2,T}.}$

- Lien $HF_{2,T}/F_{1,T}$:

$$(H(F2T)/(48 * I * \text{sqrt}(3))).\text{expand}().\text{show}()$$

$$-2i\sqrt{3}Z_1^2Z_2 + Z_1^4 + Z_2^4$$

On a donc bien $\boxed{HF_{2,T} = F_{1,T}.}$

- Lien $JF_{2,T}/F_{3,T}$:

$$(J(F2T)/4608).\text{expand}().\text{show}()$$

$$Z_1^5Z_2 - Z_1Z_2^5$$

$$F3T = (Z1 * Z2 * (Z1^4 - Z2^4)).\text{show}()$$

$$(Z_1^4 - Z_2^4)Z_1Z_2$$

On a donc bien $\boxed{JF_{2,T} = F_{3,T}.}$

- Lien $HF_{2,O}/F_{1,O}$:

$$F2O = Z1^8 + 14 * Z1^4 * Z2^4 + Z2^8$$

$$(H(F2O)/9408).\text{expand}().\text{show}()$$

$$Z_1^{10}Z_2^2 - 2Z_1^6Z_2^6 + Z_1^2Z_2^{10}$$

```
(F3T2).expand().show()
Z110Z22 - 2Z16Z26 + Z12Z210
```

On a donc bien $\boxed{\text{HF}_{2,O} = F_{1,O}^2}$.

- Lien $\text{HF}_{2,I}/F_{1,I}$:

```
var('Z1 Z2')
```

```
(Z1, Z2)
```

```
def H(F) :
```

```
D11=(F.diff(Z1)).diff(Z1)
```

```
D22=(F.diff(Z2)).diff(Z2)
```

```
D12=(F.diff(Z1)).diff(Z2)
```

```
D21=(F.diff(Z2)).diff(Z1)
```

```
H=matrix(2,2,[D11,D12,D21,D22])
```

```
HF=det(H)
```

```
return HF
```

```
F2I=Z120 - 228 * Z115 * Z25 + 494 * Z110 * Z210 + 228 * Z15 * Z215 + Z220
```

```
(H(F2I)3).expand().show()
```

```
Z133Z23 + 33Z128Z28 + 360Z123Z213 + 1265Z118Z218 - 360Z113Z223 + 33Z18Z228 - Z13Z233
```

```
F1I=Z111 * Z2 + 11 * *Z16 * Z26 - Z1 * Z211
```

```
((F1I)3).expand().show()
```

```
Z133Z23 + 33Z128Z28 + 360Z123Z213 + 1265Z118Z218 - 360Z113Z223 + 33Z18Z228 - Z13Z233
```

On a donc bien $\boxed{\text{HF}_{2,I} = F_{1,I}^3}$.



III.4.3 Voyage entre trois mondes

Vous l'avez remarqué, depuis le début nous créons des ponts entre des groupes et les ensembles sur lesquels ils agissent. Le but de cette annexe est de lister les avantages qu'il y a à passer d'un groupe à un autre.

$$\boxed{\text{SO}_3(\mathbb{R})}$$

Le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ agit sur la sphère \mathbb{S}^2 .

Le monde de la sphère est celui dans lequel nous sommes le plus à l'aise puisque c'est ici qu'on fait de la géométrie euclidienne. Alors bien sûr, c'est joli, mais aussi pratique puisqu'on exprime facilement nos rotations.

$$\boxed{\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \text{ et } \text{PSU}_2(\mathbb{C})}$$

$\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit sur le plan complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on travaille donc dans le monde projectif. Et puisque PSL_2 s'injecte dans $\mathbb{C}(z)$, nous avons comme outil puissant la théorie de Galois grâce à laquelle nous allons résoudre des équations.

Faisons maintenant quelques rappels sur les corps et donnons des propriétés importantes.

Rappel 4. Soit $K \subset L$ une extension de corps et $\alpha \in L$.

On considère :

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}_\alpha : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \subset L \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$$

et on étudie son noyau.

- 1er cas : $\text{Ker}(\text{ev}_\alpha) = \{\mu_{\alpha, \mathbb{K}}\}$ où $\mu_{\alpha, \mathbb{K}}$ est le polynôme minimal de α .

Alors :

$$[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = \deg(\mu_{\alpha, \mathbb{K}}) < +\infty \implies \mathbb{K}[\alpha] \approx \mathbb{K}(\alpha).$$

On dit que α est **algébrique** sur \mathbb{K} .

- 2eme cas : $\text{Ker}(\text{ev}_\alpha) = \{0\}$.

Alors :

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = +\infty \implies & \mathbb{K}[\alpha] & \subset & \mathbb{K}(\alpha) \\ & \cong & & \cong \\ & \mathbb{K}[X] & \subset & \mathbb{K}(X) \end{array}$$

On dit que α est **transcendant** sur \mathbb{K} .

Voyons des propriétés importantes (ces résultats ont d'ailleurs été déjà annoncés dans la partie III.3 ; ici, nous nous attachons à détailler leur preuve) :

Proposition III.4.1. Soit $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, P et Q premiers entre eux et f non constante sur $\mathbb{C}(X)$. Alors $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)] = \max(\deg(P); \deg(Q))$.

Démonstration. Dans toute la démonstration, $\mathbb{K} = \mathbb{C}(f)$.
On va effectuer plusieurs étapes.

1. Trouver un polynôme qui annule z , afin d'avoir $[\mathbb{K}(z) : \mathbb{K}] < +\infty$.

Trouvons $S \in \mathbb{K}[X]$ qui annule z : compte tenu l'expression de f , posons :

$$S(X) := Q(X)f(z) - P(X).$$

$$\begin{aligned} \text{On aura alors } S \text{ annule } z &\implies z \text{ est algébrique sur } \mathbb{K} \\ &\implies [\mathbb{K}(z) : \mathbb{K}] = [\mathbb{C}(f)(z) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(S) \end{aligned}$$

Etudions le degré de S :

$$\begin{aligned} \text{On note : } Q(X) &= X^q + a_{q-1}X^{q-1} + \dots + a_0, & q &= \deg(Q) \\ P(X) &= X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \dots + b_0, & p &= \deg(P) \end{aligned}$$

$$\text{Donc le terme dominant de } f \text{ est : } \begin{cases} a_q f(z) X^q & , \text{ si } q > p \\ (a_q f(z) - b_p) X^q & , \text{ si } q = p \\ b_p X^p & , \text{ si } p > q \end{cases}$$

On a : $a_q f(z) - b_p \neq 0$ car sinon $f(z) = \frac{b_p}{a_q}$, or f est supposée non constante.

Donc on en déduit que : $\deg(S) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ et donc

$$[\mathbb{C}(f)(z) : \mathbb{C}(f)] \leq \max(p, q).$$

2. Montrer que S est irréductible sur \mathbb{K} .

Montrons que $\mathbb{C}(Y) \simeq \mathbb{C}(f)$:

Pour cela, on étudie :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(Y) & \longrightarrow & \mathbb{C}(f) \\ F & \longmapsto & F \circ f \end{array}$$

Surjectivité : elle est directe, puisque l'on a $\mathbb{C}(f) = \{R(f); R \in \mathbb{C}(Y)\}$. Ainsi, $R(f) \in \mathbb{C}(f)$ est l'image du polynôme $R \in \mathbb{C}(Y)$ (Captain Obvious!).

Injectivité : on note : $F = c_0 + c_1 Y + \dots + c_k Y^k$.

$$\begin{aligned} F \circ f = 0 &\iff c_0 + c_1 f + \dots + c_k f^k = 0 \\ &\implies c_0 Q^k + c_1 Q^{k-1} + \dots + c_k P^k = 0 \\ &\implies Q(c_0 Q^{k-1} + c_1 Q^{k-2} + \dots + c_{k-1}) = -c_k P^k \\ &\implies Q|P \\ &\implies f \in \mathbb{C}[z] \\ &\implies F = 0 \text{ pour des raisons de degré} \end{aligned}$$

Montrons que $Q(X)Y - P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{C}(Y)$:

Rappelons tout d'abord le résultat suivant :

Théorème III.4.2. Soit A un anneau factoriel. Alors, les irréductibles de $A[X]$ sont les irréductibles de $\text{Frac}(A)[X]$ de contenu 1.

Le polynôme $Q(X)Y - P(X)$ est de degré 1 en Y , donc il est irréductible dans $\mathbb{C}(X)[Y]$.

De plus, P et Q sont premiers entre eux donc il n'existe pas de polynôme en X qui divise $Q(X)Y - P(X)$, cela revient à dire que le contenu de $Q(X)Y - P(X)$ dans $\mathbb{C}(X)[Y]$ est égal à 1. Comme $\mathbb{C}(X)$ est factoriel, le théorème III.4.2 s'applique, et on a que $Q(X)Y - P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X][Y]$.

De plus, $\mathbb{C}[X][Y] = \mathbb{C}[Y][X]$; on a donc que $Q(X)Y - P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y][X]$, donc dans $\mathbb{C}(Y)[X]$.

On vient donc de démontrer que $S = \mu_{z, \mathbb{C}}$, donc

$$[\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(f)(z)] = \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

□

Passons à l'étude du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Rappel 5. On a $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/Z(\mathbb{K})$, où $Z(\mathbb{K})$ est le groupe des homothéties.

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \approx \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ car \mathbb{C} est algébriquement clos, voir les remarques V.1.2 et V.1.3.

On va étudier des propriétés de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Proposition III.4.3. *Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit de façon 3-simplement transitive sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Reformulons cela avec des droites :

Soit (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) deux triplets de droites distinctes deux à deux dans \mathbb{C}^2 . Alors, $\exists ! g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; $g(D_i) = D'_i$, $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. On note $D_1 = \mathbb{C}f_1$, $D_2 = \mathbb{C}f_2$, et $D_3 = \mathbb{C}f_3$, avec f_1 , resp. f_2 , resp. f_3 , un vecteur directeur de la droite D_1 , resp. D_2 , resp. D_3 . Comme D_1 et D_2 sont distinctes, (f_1, f_2) forme une base de \mathbb{C}^2 ; le vecteur f_3 se décompose alors dans cette base : $f_3 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, car D_3 est distincte de D_1 et de D_2 .

On pose : $e_1 := \lambda_1 f_1$, et $e_2 := \lambda_2 f_2$; on a alors $D_1 = \mathbb{C}e_1$, $D_2 = \mathbb{C}e_2$ (car $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$), et $D_3 = \mathbb{C}(e_1 + e_2)$.

On considère maintenant $D'_1 = \mathbb{C}u_1$, $D'_2 = \mathbb{C}u_2$ et $D'_3 = \mathbb{C}u_3$. Puisque $D'_1 \neq D'_2$, (u_1, u_2) forme une base de \mathbb{C}^2 dans laquelle on exprime $u_3 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$.

Si g convient, il envoie une base sur une base donc :

$$g(e_i) = \alpha_i u_i, \quad i = 1, 2.$$

On a donc $g(D_3) = D'_3$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } g(e_1) &= \alpha_1 u_1 \\ g(e_2) &= \alpha_2 u_2 \\ g(e_3) &= g(e_1 + e_2) \\ &= g(e_1) + g(e_2) \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \\ &= \alpha \beta_1 u_1 + \alpha \beta_2 u_2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(D_3) = D'_3 \\ g(e_1 + e_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \implies (\alpha_1, \alpha_2) \text{ est proportionnel à } (\beta_1, \beta_2) \\ \implies g \text{ est déterminé de façon unique à une constante près.} \end{array}$$

□

Proposition III.4.4. $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X))$

Démonstration. Considérons :

$$\begin{array}{ccc} \phi : \text{GL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ f(X) & \mapsto & f\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array} \end{array}$$

On étudie ϕ :

Morphisme : ϕ vérifie $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Noyau : Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\phi)$,

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{Id} &\iff \frac{aX+b}{cX+d} = X \\ &\iff \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(\phi) = \text{Hom}(\text{GL}_2(\mathbb{C}))$.

On a alors le diagramme suivant, en quotientant par le noyau :

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi} & \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)) \quad \text{où } \Phi : \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)) \\ \downarrow & \nearrow \Phi & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \left(f(X) \mapsto f\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \right) \\ \text{PGL}_2(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

On étudie maintenant $\Phi_A \in \text{Aut}(\mathbb{C}(X))$:

On a que X est un générateur de $\mathbb{C}(X)$, donc Φ_A est déterminé par $\Phi_A(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Donc $\text{Im}(\Phi_A) = \mathbb{C}\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$. D'après III.4.1, on a : $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)] = 1$ et ainsi Φ est un isomorphisme de groupes donc

$$\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X))$$

□

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$
--

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$.

Dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, ∞ est une droite comme les autres et $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ a l'avantage d'être factoriel.

Chapitre IV

Inversion des fonctions invariantes



Il est toujours bon de faire un point sur ce que l'on vient de faire, et où cela doit nous mener. Alors faisons un petit récapitulatif.

Nous avons Γ sous-groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$. Ce groupe crée des Γ -orbites, et notre motivation de départ était de coller une étiquette sur ces orbites.

Puisque :

$$SO_3(\mathbb{R}) \simeq PSU_2(\mathbb{C}) \subset PGL_2(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(z)),$$

nous avons traduit ce problème en la recherche de fonctions f_{Γ} qui ont la propriété d'être Γ -invariantes.

Le résultat :

$$\mathbb{C}(z)^{\Gamma} = \mathbb{C}(f_{\Gamma}) \subset \mathbb{C}(z)$$

a restreint le problème en la recherche d'une seule fonction Γ -invariante, génératrice du corps des invariants, qui soit constante sur les droites associées aux orbites.

En résumé : à chaque orbite correspond une valeur de f_{Γ} ; c'est l'étiquetage des orbites.

Maintenant, nous voulons, à partir d'une étiquette, retrouver l'orbite ; autrement dit, nous voulons résoudre l'équation suivante :

$$\boxed{f_{\Gamma}(z) = w}$$



IV.1 Cas non-icosaédral

Nous allons, dans cette partie, nous pencher sur le cas non-icosaédral ; on cherche ici à résoudre l'équation associée à l'octaèdre :

$$f_O(z) = w.$$

C'est une équation de degré 24 (c'est l'ordre du groupe du cube, \mathfrak{S}_4). La clef pour résoudre cette équation repose sur le résultat qui suit.

Proposition IV.1.1. *On a*

$$C_2 \triangleleft D_2 \triangleleft \Gamma_T \triangleleft \Gamma_O.$$

Rappel 6. Nous rappelons que le cube et l'octaèdre sont duaux, et donc $\Gamma_C \simeq \Gamma_O$.

Démonstration. Allons-y étape par étape.

$\boxed{\Gamma_T \triangleleft \Gamma_O}$ Puisque $\Gamma_O \simeq \Gamma_C$, nous allons montrer que $\Gamma_T \triangleleft \Gamma_C$.

Pour cela, souvenons-nous de ce qui a été fait dans la partie II.1.2. Nous avons deux tétraèdres T_+ et T_- inscrits dans un cube, et le groupe du cube permute ces deux tétraèdres. Nous avons donc :

$$1 \longrightarrow \Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4 \longrightarrow \Gamma_C \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{S}\{T_+, T_-\} = \mathfrak{S}_2 \longrightarrow 1$$

Donc Γ_T est d'indice 2 dans Γ_C .

D'où :

$$\boxed{\Gamma_T \triangleleft \Gamma_O}$$

$\boxed{D_2 \triangleleft \Gamma_T}$ Considérons le groupe de Klein dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$:

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc V_4 est isomorphe à D_2 . On peut d'ailleurs remarquer que, si l'on considère les axes passant par les milieux d'arêtes opposées dans le tétraèdre, alors D_2 est le stabilisateur de ces axes ; l'écriture des éléments du stabilisateur dans la base formée par les vecteurs directeurs de ces axes permet de retrouver l'ensemble décrit ci-dessus.

De plus, on a que $\Gamma_T \simeq \mathfrak{A}_4$, et $V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$.

Donc :

$$\boxed{D_2 \triangleleft \Gamma_T}.$$

$\boxed{C_2 \triangleleft D_2}$ On sait que C_2 est d'indice 2 dans D_2 .

Donc :

$$\boxed{C_2 \triangleleft D_2}.$$

□

De cette chaîne nous déduisons :

$$\begin{array}{c}
\mathbb{C}(z) \\
\left| \begin{array}{c} 2 \\ \mathbb{C}(z)^{C_2} = \mathbb{C}(f_{C_2}) \\ 2 \\ \mathbb{C}(z)^{D_2} = \mathbb{C}(f_{D_2}) \\ 3 \\ \mathbb{C}(z)^{\Gamma_T} = \mathbb{C}(f_T) \\ 2 \\ \mathbb{C}(z)^{\Gamma_O} = \mathbb{C}(f_O) \end{array} \right.
\end{array}$$

On veut résoudre $f_O(z) = w$, autrement dit, on veut trouver z . En regardant la suite d'extensions précédente, cela revient à partir de f_O et arriver à z . Ceci se fait en plusieurs étapes.

Exprimer f_T en fonction de f_O

L'idée est de commencer par trouver le polynôme minimal de f_T sur $\mathbb{C}(f_O)$ de degré $[\mathbb{C}(f_T) : \mathbb{C}(f_O)] = 2$.

Rappelons que : $F_T = \frac{F_{2,T}^3}{F_{1,T}^3}$ et $F_O = \frac{F_{2,O}^3}{108F_{1,O}^4}$.

Nous avons aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
F_{1,O} &= F_{3,T} \\
F_{2,O} &= F_{1,T}F_{2,T} \\
F_{3,T}^2 &= \frac{F_{2,T}^2 - F_{1,T}^3}{12i\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On bidouille maintenant l'expression de F_O :

$$\begin{aligned}
F_O &= \frac{F_{2,T}^3}{108F_{1,T}^3} \\
&= \frac{F_{1,T}^3 F_{2,T}^3}{108F_{3,T}^4} \\
&= \frac{F_{1,T}^3 F_{2,T}^3 (12i\sqrt{3})^2}{108(F_{2,T}^3 - F_{1,T}^3)^2} \\
&= \frac{-4F_{1,T}^3 F_{2,T}^3}{F_{1,T}^6 \left(\frac{F_{2,T}^3}{F_{1,T}^3} - 1 \right)^2} \\
&= \frac{-4F_T}{(F_T - 1)^2}
\end{aligned}$$

On obtient après déshomogénéisation :

$$f_O = \frac{-4f_T}{(f_T - 1)^2}.$$

On pose $f_O = w$ et après quelques manipulations nous trouvons :

$$P_{f_T/f_O}(T, w) = T^2 + \left(\frac{4}{w} - 2\right)T + 1.$$

Le polynôme P_{f_T/f_O} admet comme solutions deux racines qui donnent l'expression de f_T en fonction de w .

Exprimer f_{D_2} en fonction de f_T

Comme précédemment, nous allons chercher $P_{f_{D_2}/f_T}$, le polynôme minimal de f_{D_2} dans $\mathbb{C}(f_T)$ de degré $[\mathbb{C}(f_{D_2}) : \mathbb{C}(f_T)] = 3$.

L'idée est encore de trouver R une fraction rationnelle telle que $f_T = R(f_{D_2})$. Ce qui suit donne l'impression que tout tombe du ciel, mais l'explication détaillée de l'utilisation de la constante ζ_3 se trouve dans l'annexe IV.3.1.

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} f_{D_2} + \zeta_3 &= \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{et} & & f_{D_2} + \zeta_3^2 &= \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{z^4 + 2i\sqrt{3}z^2 + 1}{4z^2} & & & &= \frac{z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 + 1}{4z^2} \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$f_T = \left(\frac{f_{D_2} + \zeta_3}{f_{D_2} + \zeta_3^2}\right)^3.$$

On pose $f_T = w'$ pour obtenir :

$$P_{f_{D_2}/f_T}(T, w') = (w' - 1)T^3 + 3(w'\zeta_3^2 - \zeta_3)T^2 + 3(w'\zeta_3 - \zeta_3^2)T + (w' - 1).$$

Exprimer f_{C_2} en fonction de f_{D_2}

Les calculs sont plus directs :

$$\begin{aligned} f_{D_2} &= \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} \\ &= \frac{(f_{C_2} + 1)^2}{4f_{C_2}} \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en posant $f_{D_2} = w''$:

$$P_{f_{C_2}/f_{D_2}}(T, w'') = T^2 + (2 - 4w'')T + 1.$$

Exprimer z en fonction de f_{C_2}

On a $f_{C_2} = z^2$ donc en posant $f_{C_2} = w'''$, nous obtenons :

$$P_{z/f_{C_2}}(T, w''') = T^2 - w'''.$$

Principe de l'inversion

Nous rappelons le problème : nous voulons résoudre $f_O(z_0) = w$ et par une grande chaîne de l'amitié, nous allons pouvoir faire le lien entre f_O et z_0 :

$$\boxed{f_O(z_0) \xrightarrow{(1)} f_T(z_0) \xrightarrow{(2)} f_{D_2}(z_0) \xrightarrow{(3)} f_{C_2}(z_0) \xrightarrow{(4)} z_0}$$

dont voici les étapes :

- (1) : Trouver w' une racine de P_{f_T/f_O} qui s'exprime en fonction de w , ainsi $f_T(z_0) = w'$;
- (2) : Trouver w'' une racine de $P_{f_{D_2}/f_T}$ qui s'exprime en fonction de w' , et ainsi $f_{D_2}(z_0) = w''$;
- (3) : Trouver w''' une racine de $P_{f_{C_2}/f_{D_2}}$ qui s'exprime en fonction de w'' , et ainsi $f_{C_2}(z_0) = w'''$;
- (4) : Trouver z_0 une racine de $P_{z/f_{C_2}}$ qui s'exprime en fonction de w''' .



IV.2 Cas icosaédral

Passons au cas icosaédral. Cette fois-ci, il s'agit de résoudre une équation de degré 60 :

$$f_I(z) = w,$$

où, on le rappelle, la fonction f_I est égale à $f_I = 1 - \frac{F_{3,I}^2}{1728F_{1,I}^5}$, voir III.3. Le schéma est alors le suivant :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(z) \\ | \\ 60 \\ | \\ \mathbb{C}(z)^{\Gamma_I} = \mathbb{C}(f_I) \end{array}$$

On rappelle que Γ_I est vu en projectif; c'est en fait $\Phi(\Gamma_I)$, l'image Γ_I par l'isomorphisme Φ , voir la partie I.1.

SIMPLIFICATION DU PROBLÈME : MERCI TÉTRAÈDRE !

Comme dans la partie IV.1, on va chercher à simplifier le problème, en ajoutant une étape entre le passage de $\mathbb{C}(f_I)$ et $\mathbb{C}(z)$; seulement voilà, il s'agit ici de manipuler le groupe $\Gamma_I \simeq \mathfrak{A}_5$, soit : un groupe simple. L'espoir fait peut-être vivre, mais en tout cas, il ne nous donnera pas de sous-groupes distingués non triviaux de \mathfrak{A}_5 pour nous aider à simplifier la situation.

Heureusement, la géométrie est notre amie : on peut se servir du fait que, dans l'icosaèdre, on a 5 tétraèdres inscrits (dont, on le rappelle, les sommets sont les centres de face de l'icosaèdre).

On va fixer notre étude sur un tétraèdre parmi les 5; l'heureux gagnant est, en toute logique, le tétraèdre $\rho(T)$, avec ρ la rotation permettant de pivoter la configuration d'or de l'icosaèdre, d'expression

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix} : \in \text{PSU}_2(\mathbb{C}),$$

où $\gamma := \tan(\frac{\alpha}{2})$, et $\alpha = \arctan(g)$, g racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, revoir la partie II.2.

Notations. Dans la suite, on notera $\rho(T) =: T'$.

Revenons un instant sur la figure II.16; mais en faisant en plus apparaître les points p , q et z tels qu'on les avait définis sur la figure IV.3 :

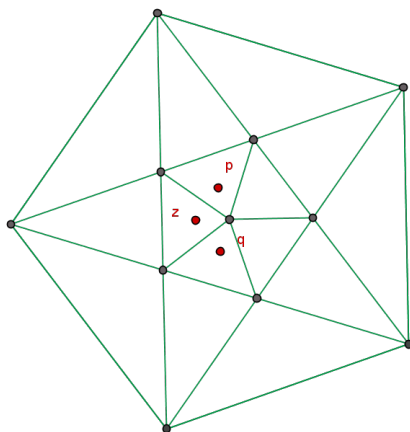


FIGURE IV.1 – Sommets du tétraèdre inscrit dans l'icosaèdre projectivisé

Le point p correspondait à un sommet du tétraèdre T' projectivisé, q était son conjugué, et correspondait à un centre de face de T' (en tant que sommet du contre-tétraèdre), et z un milieu d'arête. On fait en sorte de placer z sur l'axe des réels (tout cela nous servira plus tard dans cette section) :

Proposition IV.2.1. *On a $\Gamma_{T'} = \rho \circ \Gamma_T \circ \rho^{-1}$.*

Démonstration. Rappelons-nous que $\Gamma_{T'}$ (ou de n'importe quel solide platonicien) désigne le groupe d'isométries positives de T' . Ainsi, pour vérifier l'égalité de la proposition, il suffit de calculer

$$\begin{aligned} \rho \circ \Gamma_T \circ \rho^{-1}(T') &= \rho \circ \Gamma_T \circ \rho^{-1}(\rho(T)) = \rho \circ \Gamma_T(T) \\ &= \rho(T) \\ &= T'. \end{aligned}$$

C'est ce que l'on souhaitait démontrer.

◇

Un autre résultat qui découle facilement de cette première propriété est le suivant :

Proposition IV.2.2. *On a $f_{T'} = f_T \circ \rho^{-1}$, avec f_T présentée dans la partie III.3.*

Démonstration. On voit bien que ces deux fonctions ont les mêmes zéros : $\rho(T) = T'$. Il suffit donc de vérifier que $f_{T'} = f_T \circ \rho^{-1}$ est bien $\Gamma_{T'}$ -invariante. Soit $\gamma \in \Gamma_{T'}$, et soit alors $\gamma_T \in \Gamma_T$ tel que $\gamma = \rho \circ \gamma_T \circ \rho^{-1}$, d'après la proposition IV.2.1.

On a

$$\begin{aligned} f_{T'} \circ \gamma &= f_T \circ \rho^{-1} \circ (\rho \circ \gamma_T \circ \rho^{-1}) \\ &= f_T \circ \gamma_T \circ \rho^{-1} \\ &= f_T \circ \rho^{-1} \\ &= f_{T'}. \end{aligned}$$

◇

A présent, que faire de ce groupe $\Gamma_{T'}$? Ce que l'on souhaitait obtenir, c'était un sous-groupe de Γ_I , de sorte à ce que l'on puisse ajouter une étape à notre résolution d'équations de degré 60 ; eh bien, ce sous-groupe, c'est $\Gamma_{T'}$!

Pour le voir, il suffit d'étudier le résultat suivant :

Proposition IV.2.3. *On a $\Gamma_{T'} = \text{Stab}_{\Gamma_I}(T')$.*

Démonstration. On procède par double inclusion. L'inclusion inverse est claire : les éléments de $\text{Stab}_{\Gamma_I}(T')$ sont des isométries positives qui stabilisent T' .

Pour l'autre inclusion, on utilise la bijection

$$\Gamma_I / \text{Stab}_{\Gamma_I}(T') \simeq \mathcal{O}_{T'}.$$

On sait que l'orbite de T' a 5 éléments (les 5 tétraèdres inscrits dans l'icosaèdre), et que $|\Gamma_I| = 60$; on a donc $|\text{Stab}_{\Gamma_I}(T')| = 12 = |\Gamma_{T'}|$.

D'où l'égalité entre les deux groupes demandée.

◇

Ainsi : **Si $w \in \mathbb{C}(z)$ est Γ_I -invariant, alors il est aussi $\Gamma_{T'}$ -invariant.**

Notre résolution d'équation va maintenant se scinder en deux parties :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(z) \\ \left| \begin{array}{c} 12 \\ \mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}} \\ 5 \\ \mathbb{C}(z)^{\Gamma_I} \end{array} \right. \end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(z) \\ \left| \begin{array}{c} 12 \\ \mathbb{C}(f_{T'}) \\ 5 \\ \mathbb{C}(f_I) \end{array} \right. \end{array}$$

La première étape de résolution du problème, à savoir l'extension de degré 12, correspond en fait à la section précédente IV.1, qui a déjà été résolue. On va alors s'intéresser à la résolution de l'extension de degré 5.

Le problème consiste donc maintenant en la recherche du polynôme minimal, P , de $f_{T'}$ sur $\mathbb{C}(f_I)$.

Remarque IV.2.4. Un petit moyen mnémotechnique concernant les extensions de corps, et la résolutions d'équations : montrer, c'est chercher des racines ; descendre, c'est chercher des expressions rationnelles.

Avant de pouvoir s'intéresser directement à $f_{T'}$, on va passer par l'étude des fonctions semi-invariantes $F_{i,T'}$, $i = 1, 2$ ou 3 (puisque que $f_{T'}$ est par définition un quotient de telles fonctions, cette démarche a du sens).

Nous, ce que l'on a dans notre panier, ce sont les fonctions semi-invariantes $F_{1,T}$, $F_{2,T}$ et $F_{3,T}$, calculées dans la sous-section III.2.2. Penchons-nous dans la suite sur la fonction $F_{3,T}$.

ETUDE DE $F_{3,T'}$

Invariance

La fonction $F_{3,T}$ est la fonction associée à l'orbite des milieux d'arêtes du tétraèdre, ceux-ci sont des zéros de multiplicité 2, puisque fixés par des éléments de \mathfrak{A}_4 d'ordre 2 (les retournements par rapport aux bimédianes du tétraèdre, voir la référence hédoniste [1]). Ainsi, la fonction $F_{3,T}^2$ est une forme orbitale pleine. D'après le théorème III.2.24, elle se décompose en une combinaison linéaire des formes orbitales $F_{1,T}^3$ et $F_{2,T}^3$:

$$F_{3,T}^2 = a \cdot F_{1,T}^3 + b \cdot F_{2,T}^3.$$

Notons maintenant χ le caractère associé à $F_{3,T}$; montrons que ce caractère est trivial. On rappelle que le groupe que l'on considère ici est Γ_T , soit \mathfrak{A}_4 .

Pour commencer, on a le résultat suivant :

Proposition IV.2.5. *Le groupe des caractères de \mathfrak{A}_4 est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On va dans cette preuve utiliser les *groupes dérivés*, qui sont, on le rappelle, les plus petits sous-groupes engendrés par les commutateurs.

On cherche à déterminer des caractères, c'est-à-dire des morphismes de $\mathfrak{A}_4 \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Dans le cadre général, quand on prend φ un morphisme entre deux groupes G et $G' : G \xrightarrow{\varphi} G'$, on a que φ envoie également le groupe dérivé de G , $D(G)$, sur le groupe dérivé de G' , $D(G')^1$.

Dans le cas où G' est un groupe abélien, on a que son groupe dérivé $D(G')$ est trivial ; on obtient donc un morphisme $D(G) \xrightarrow{\varphi} \{e\}$. Autrement dit, $D(G)$ est envoyé sur $\{e\}$ par φ , d'où le passage au quotient :

1. On dit alors que D est un *foncteur*.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G' \\ \downarrow & \nearrow & \\ G/D(G) & & \end{array}$$

Ainsi, dans le cas où $G = \mathfrak{A}_4$, et $G' = \mathbb{C}$, on obtient un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \downarrow & \nearrow & \\ G/D(\mathfrak{A}_4) & & \end{array}$$

De plus, $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$, le groupe de Klein. En effet, on considère le quotient \mathfrak{A}_4/V_4 : V_4 étant distingué dans \mathfrak{A}_4 , le quotient a une structure de groupe, il est de cardinal 3, il est donc cyclique, donc abélien ; on a alors, par définition du groupe dérivé, $D(\mathfrak{A}_4) \subset V_4$. Le groupe dérivé d'un groupe étant un sous-groupe distingué dans ce groupe, on a que $D(\mathfrak{A}_4)$ est distingué dans \mathfrak{A}_4 , et inclus dans V_4 ; comme les seuls sous-groupes distingués de \mathfrak{A}_4 sont $\{e\}$, V_4 et \mathfrak{A}_4 , on en déduit que $D(\mathfrak{A}_4) = \{e\}$ ou V_4 . Comme \mathfrak{A}_4 n'est pas abélien, son groupe dérivé ne saurait être trivial. D'où le résultat attendu.

On obtient finalement le morphisme

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathfrak{A}_4/V_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

On a donc bien montré que le groupe des caractères de \mathfrak{A}_4 est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ◇

On sait donc que χ est d'ordre 3, par le théorème de Lagrange. Soit maintenant $\gamma \in \Gamma_T$, on a d'une part

$$F_{3,T}^2 \circ \gamma = \chi^2(\gamma) \cdot F_{3,T}^2,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} F_{3,T}^2 \circ \gamma &= a \cdot F_{1,T}^3 \circ \gamma + b \cdot F_{2,T}^3 \circ \gamma \\ &= a \cdot \underbrace{\chi^3(\gamma)}_{=1} F_{1,T}^3 + b \cdot \overbrace{\chi^3(\gamma)}^{=1} F_{2,T}^3 \\ &= a \cdot F_{1,T}^3 + b \cdot F_{2,T}^3 \\ &= F_{3,T}^2. \end{aligned}$$

En regroupant ces deux égalités, et en utilisant le fait que χ est d'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \chi_{\text{triv}} \\ \chi^3 &= \chi_{\text{triv}}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\chi = \frac{\chi^3}{\chi^2} = \chi_{\text{triv}}.$$

Finalement, on a $F_{3,T}$ qui est une fonction orbitale semi-invariante, et de caractère trivial : $F_{3,T}$ est alors invariante !

Quel est le lien avec $F_{3,T'}$? Ce sont les propositions IV.2.1 et IV.2.2 : de cette dernière proposition, on tire : $F_{3,T'} = F_{3,\rho(T)} = F_{3,T} \circ \rho^{-1}$; et de la première, on en déduit que tout élément de $\Gamma_{T'}$ s'écrit $\gamma' = \rho \circ \gamma \circ \rho^{-1}$, où $\gamma \in \Gamma_T$.

De cela, on en déduit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F_{3,T'} \circ \gamma' &= (F_{3,T} \circ \rho^{-1}) \circ (\rho \circ \gamma \circ \rho^{-1}) \\ &= (F_{3,T} \circ \gamma) \circ \rho^{-1} \\ &= F_{3,T} \circ \rho^{-1} \\ &= F_{3,T'}. \end{aligned}$$

Autrement dit :

Proposition IV.2.6. $F_{3,T'}$ est également $\Gamma_{T'}$ -invariante.

En d'autres termes, cela signifie que

$$F_{3,T'} \in \mathbb{C}(f_{T'}).$$

On a donc trouvé une fonction qui est dans $\mathbb{C}(f_{T'})$, on va trouver son polynôme minimal, et ensuite le relier à celui de la fonction qui nous intéressait au départ, f_T .

Mais, avant toute chose, il faudrait calculer cette fameuse fonction $F_{3,T'}$...

Calcul effectif de la fonction $F_{3,T'}$

Le schéma de calcul est simple :

1. On connaît $F_{1,T}$ (voir III.2.2) ; on peut donc connaître $F_{1,T'} = F_{1,T} \circ \rho^{-1}$.
2. On en déduit alors $F_{3,T'} = JF_{1,T'}$.

Après un calcul *via* SAGE, on trouve :

$$F_{3,T'} = Z_1^6 + 2Z_1^5 Z_2 - 5Z_1^4 Z_2^2 - 5Z_1^2 Z_2^4 - 2Z_1 Z_2^5 + Z_2^6$$

Calcul du polynôme minimal de $F_{3,T'}$

On veut construire, dans un premier temps, le polynôme minimal de $F_{3,T'}$ sur $\mathbb{C}(f_T)$, ou au moins un polynôme annulateur de degré 5. On va chercher ce que l'on appelle sa *résolvante*.

Soit l'extension de corps

$$\begin{array}{c} \mathbb{K} \\ | \\ k \end{array}$$

A priori, cette extension n'est pas galoisienne. On considère alors la sur-extension

$$\begin{array}{c} \mathbb{L} \\ \downarrow \\ \mathbb{K} \\ \downarrow \\ k \end{array}$$

de sorte que l'extension $[\mathbb{L} : k]$ soit galoisienne. On note $G = \text{Gal}(\mathbb{L}, k)$ le groupe de Galois correspondant, et H le groupe associé à l'extension $[\mathbb{K}, k]$. On a l'inclusion $H \subset G$. A noter que, comme H n'est pas distingué dans G , alors G/H n'est pas un groupe.

Par construction, H agit trivialement sur \mathbb{K} . Notons alors r_i , $1 \leq i \leq n$ les représentants des classes G/H dans G . On appelle alors *résolvante* de $t \in \mathbb{K}$, le polynôme

$$R_t(X) = \prod_{i=1}^n (X - r_i(t))$$

Remarque IV.2.7. Difficile de ne pas penser au polynôme minimal de t ; en fait, si le cardinal de l'ensemble $\{r_i(t); \forall i\}$ est égal au cardinal de G/H , alors, la résolvante est égale au polynôme minimal de t .

Revenons à $F_{3,T'}$; sa résolvante va être de la forme

$$R_{F_{3,T'}}(X) = \prod (X - g.F_{3,T'}),$$

où g est dans Γ_I , et parcourt l'ensemble des représentants de l'orbite de $F_{3,T'}$.

Plus précisément, quelle est cette orbite, et quels sont ses représentants ?

Déjà, on peut préciser ce que désigne ce " $g.F_{3,T'}$ "; on a $g.F_{3,T'} = F_{3,T'} \circ g^{-1} = F_{3,g(T')}$. Ainsi, l'orbite de $F_{3,T'}$ va être constituée des fonctions associées aux $g(T')$; pour comprendre qui sont ces $g(T')$, il convient donc à présent d'étudier l'action de Γ_I sur l'icosaèdre.

En fait, le groupe Γ_I agit transitivement sur les 5 tétraèdres inscrits dans l'icosaèdre (ben oui, puisqu'il agit sur ses drapeaux de manière transitive, voir la définition II.1.3), et le stabilisateur d'un tétraèdre sous cette action est bien sûr son groupe d'isométries positives, \mathfrak{A}_4 .

On a donc la bijection

$$\Gamma_I/\mathfrak{A}_4 \simeq \{\text{Ensemble des 5 tétraèdres}\}.$$

Donc, en désignant par r_i , $0 \leq i \leq 4$ les représentants de Γ_I/\mathfrak{A}_4 , on voit que les éléments dans l'orbite de $F_{3,T'}$ vont être de la forme $F_{3,T'} \circ r^i$; la résolvante est alors égale à :

$$R_{F_{3,T'}}(X) = \prod_{i=0}^4 (X - F_{3,T'} \circ r^i),$$

C'est un polynôme de degré 5, unitaire, de la forme :

$$R_{F_{3,T'}}(X) = X^5 + a_1X^4 + a_2X^3 + a_3X^2 + a_4X + a_5.$$

Comme par construction, R est stable par Γ_I , ses coefficients a_i sont dans $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_I}$. Mieux, comme les $F_{3,T'} \circ r^i$ sont des polynômes et non des fractions rationnelles, les coefficients a_i sont dans $\mathbb{C}[z]^{\Gamma_I}$.

On utilise à présent le résultat suivant (admis) :

Théorème IV.2.8. *Soit F une forme invariante. Alors F peut s'écrire comme un produit de formes orbitales pleines :*

$$F = F_1^{e_1} F_2^{e_2} F_3^{e_3} \prod_{\lambda=[\lambda_1:\lambda_2]} (\lambda_1 F_1^{n_1} + \lambda_2 F_2^{n_2})^{e_\lambda},$$

où $0 \leq e_i \leq n_i$ pour $i = 1, 2, 3$, et $e_\lambda = 0$ sauf pour un nombre fini de λ .

Ce résultat va nous permettre de déterminer les a_i dans l'expression de $R_{F_{3,T'}}$: en effet, on sait déjà la forme qu'ils ont, car comme ils sont dans $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_I}$, ils sont Γ_I -invariants, et le théorème s'applique. De plus, observons les degrés de chaque facteur (on précise que l'on travaille avec les fonctions associées à l'icosaèdre) :

F_1 est de degré 12; F_2 de degré 20; F_3 de degré 30; les $F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$ de degré 60.

De plus, on remarque, en développant l'écriture de la résolvante sous forme de produits, et en observant les degrés des coefficients en X^k , que

$$\begin{aligned} \deg(a_1) &= \deg(F_{3,T'}) = 6 \\ \deg(a_2) &= 2\deg(F_{3,T'}) = 12 \\ &\vdots \\ \deg(a_i) &= 6i \text{ (ou } = 0) \end{aligned}$$

Ainsi, les a_i sont de degré $6i$; connaissant leur décomposition en produits de $F_1, F_2, F_3, F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$, on va pouvoir en déduire les possibilités de décomposition du degré $6i$ en somme de degrés des F_1, F_2, F_3 et $F_1^{n_1}$ et $F_2^{n_2}$, et donc en déduire les possibilités d'écritures des a_i , à constante multiplicative près.

- Pour a_1 : il faudrait pouvoir obtenir un degré $6 \times 1 = 6$ avec des combinaisons linéaires de 12, 20, 30 et 60 : impossible.

$$a_1 = 0.$$

- Pour a_2 : il faut obtenir un degré $6 \times 2 = 12$ avec des combinaisons linéaires de 12, 20, 30 et 60. Seule possibilité : $F_{1,I}$, à constante multiplicative près.

$$a_2 = k_2 F_{1,I}.$$

- Pour a_3 : il faudrait obtenir un degré $6 \times 3 = 18$ avec des combinaisons linéaires de 12, 20, 30 et 60. Impossible.

$$a_3 = 0.$$

- Pour a_4 : de même, pour obtenir 24, la seule possibilité est $F_{1,I}^2$.

$$a_4 = k_4 F_{1,I}^2.$$

- Pour a_5 : il faut obtenir un degré $6 \times 5 = 30$ avec des combinaisons linéaires de 12, 20, 30 et 60. Seule possibilité : $F_{3,I}$, à constante multiplicative près.

$$a_2 = k_5 F_{3,I}.$$

A ce stade, on a

$$R_{F_{3,T'}}(X) = X^5 + k_2 F_{1,I} X^3 + k_4 F_{1,I}^2 X + k_5 F_{3,I}.$$

Ne reste plus qu'à déterminer les coefficients k_2 , k_4 et k_5 .

Pour ce faire, on reprend les données des fonctions $F_{3,T'}$, $F_{1,I}$ et $F_{3,I}$, et on écrit que, par définition de R , on a $R_{F_{3,T'}}(F_{3,T'}) = 0$.

On voit alors, en écrivant chacune des fonctions en jeu, et en considérant les degrés de chaque terme, que k_2 , k_4 et k_5 apparaissent dans les coefficients des termes Z_1^{30} , resp. $Z_1^{29} Z_2$, resp. $Z_1^{28} Z_2^2$. On trouve que le terme en Z_1^{30} est $1 + k_5$; celui en $Z_1^{29} Z_2$ est $10 + k_2$, et enfin celui en $Z_1^{28} Z_2^2$ est $-45 + k_4$.

Comme $R_{F_{3,T'}}(F_{3,T'}) = 0$, par identification des coefficients, tous les coefficients doivent être nuls; ce qui nous donne le système d'équations :

$$\begin{cases} 1 + k_5 = 0 \\ 10 + k_2 = 0 \\ -45 + k_4 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} k_5 = -1 \\ k_2 = -10 \\ k_4 = 45 \end{cases}$$

On a trouvé les coefficients manquants !

$$\boxed{R_{F_{3,T'}}(X) = X^5 - 10F_{1,I}X^3 + 45F_{1,I}^2X - F_{3,I}}.$$

De plus, comme $R_{F_{3,T'}}$ est unitaire, et de degré 5, soit le degré de l'extension considérée, c'est le polynôme minimal de $F_{3,T'}$ sur $\mathbb{C}(f_I)$: champagne !

DE $f_{T'}$ À f_I : LA GRANDE CHAÎNE DE L'AMITIÉ

Le fil du raisonnement de tout ce qui va suivre, c'est, à partir de la fonction f_I , remonter à la fonction $f_{T'}$. Cela va s'effectuer en plusieurs étapes. Pour ce faire, en fait, on va trouver un autre générateur du corps $\mathbb{C}(f_{T'}) = \mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$, plus simple à manipuler, et pour qui le polynôme minimal sera également plus simple à calculer. Précisons qu'il ne s'agit pas tout à fait de $F_{3,T'}$, qui pourtant est bien $\Gamma_{T'}$ -invariante.

Première étape : de f_I à \tilde{s}

Encore une fois, le but de ce qui va suivre est d'ajouter des étapes dans la construction du polynôme minimal P .

Posons dès maintenant

$$\tilde{s} := \frac{F_{3,T'} \cdot F_{1,I}^2}{F_{3,I}}.$$

Cet élément appartient à $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$, et l'on vérifie qu'il est racine du polynôme en T suivant :

$$T^5 - 10\left(\frac{F_{1,I}^5}{F_{3,I}^2}\right)T^3 + 45\left(\frac{F_{1,I}^5}{F_{3,I}^2}\right)^2T - \left(\frac{F_{1,I}^5}{F_{3,I}^2}\right)^2.$$

De plus, on le rappelle, on a $f_I = 1 - \frac{F_{3,I}^2}{1728F_{1,I}^5}$. Alors, en posant

$$W' = \frac{1}{1728(1 - f_I)},$$

on obtient l'expression de la résultante de l'élément \tilde{s} en fonction de W' , donc de f_I :

$$\boxed{T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2}.$$

Ce polynôme s'appelle la *quintic de Brioschi*, ou *résolvante de Brioschi*.

Regardons si ce \tilde{s} ne serait pas l'élément dans $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$ que l'on cherchait pour simplifier le problème. Quel est le degré de \tilde{s} ? C'est, d'après la proposition III.4.1, le maximum entre les degrés de $F_{3,T'} \cdot F_{1,I}^2$ et $F_{3,I}$, soit : 30.

Si \tilde{s} engendrait une sous-extension, c'est-à-dire si l'on avait une sous-extension $\mathbb{C}(\tilde{s})$, alors on aurait, d'après le théorème de Lüroth, $\mathbb{C}(\tilde{s}) = \mathbb{C}(z)^\Gamma$, soit : un sous-groupe Γ de Γ_I d'indice 2 dans $\Gamma_I \simeq \mathfrak{A}_5$: impossible.

Donc, ce \tilde{s} n'est pas encore tout à fait adapté à notre résolution d'équation.

Deuxième étape : de \tilde{s} à \tilde{r} : and the winner is...

... \tilde{r} !

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{s}^2}{W'} = \frac{F_{3,T'}^2}{F_{1,I}}.$$

Remarque IV.2.9. On vérifie que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun : c'est le cas, puisque par définition de $F_{3,T'}$ et de $F_{1,I}$, les zéros de la première fonction sont les milieux d'arêtes du tétraèdre T' , et les zéros de la fonction $F_{1,I}$ sont les sommets de l'icosaèdre ; tout va bien, donc.

Cette fois, on vérifie que le degré de \tilde{r} est 12.

Comme \tilde{r} est, de plus, $\Gamma_{T'}$ invariante, car \tilde{s} l'est, on en déduit que

$$\mathbb{C}(\tilde{r}) \subset \mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$$

$$\text{avec } [\mathbb{C}(\tilde{r}) : \mathbb{C}(f_I)] = \frac{60}{12} = 5 = [\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}} : \mathbb{C}(f_I)].$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{C}(\tilde{r}) = \mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}.}$$

Et voilà, on l'a, notre élément dans $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$ voulu ! Et, mieux, comme \tilde{r} et $f_{T'}$ sont tous deux générateurs de $\mathbb{C}(z)^{\Gamma_{T'}}$, on en déduit, par la proposition III.3.7, qu'il existe une homographie qui envoie \tilde{r} sur $f_{T'}$.

Ainsi, par une grande chaîne de l'amitié, on va pouvoir faire le lien tant désiré entre $f_{T'}$ et f_I :

$$\boxed{f_I \xrightarrow{(1)} W' \xrightarrow{(2)} \tilde{s} \xrightarrow{(3)} \tilde{r} \xrightarrow{(4)} f_{T'}}$$

(1) : Cela vient de l'équation $W' = \frac{1}{1728(1 - f_I)}$;

(2) : Cela se fait en déterminant une racine \tilde{s} de la résolvante de Brioschi : $T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2$.

(3) : On avait posé $\tilde{r} = \frac{\tilde{s}^2}{W'} = \frac{\tilde{s}}{F_{1,I}}$.

(4) : On passe de \tilde{r} à $f_{T'}$ par une homographie.

L'étude de l'étape (2) se fera dans le chapitre V suivant.

DESCRIPTION DE L'ÉTAPE (4) : EXPRESSION DE L'HOMOGRAPHIE

Dans ce paragraphe, on va s'attacher à décrire l'homographie qui permettra, une fois calculé \tilde{r} , de retomber sur $f_{T'}$.

Pour l'instant, on sait que $f_{T'} = \frac{a\tilde{r} + b}{c\tilde{r} + d}$.

Rappelons le schéma suivant IV.2 :

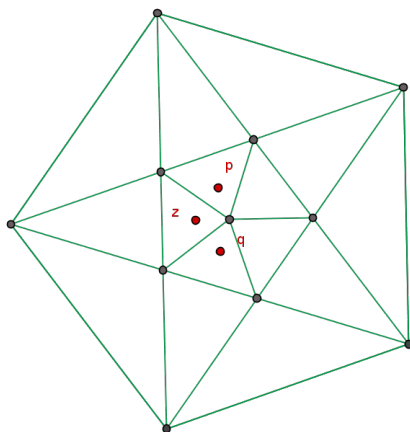


FIGURE IV.2 – Sommets du tétraèdre inscrit dans l'icosaèdre projectivisé

On rappelle que p était un sommet de T' , q un centre de face, z un milieu d'arête, et p et q avaient été choisis conjugués : $p = \zeta_5^{-1}.z$, $q = \zeta_5.z$, et z réel.

On a alors que $f_{T'}$ est, par la proposition III.3.4, l'unique fonction $\Gamma_{T'}$ -invariante vérifiant

$$\begin{cases} f_{T'}(p) = \infty; \\ f_{T'}(q) = 0; \\ f_{T'}(z) = 1. \end{cases}$$

Comme on sait que $f_{T'}$ est linéaire fractionnelle en \tilde{r} , et qu'elle s'annule en $\tilde{r}(q)$, on peut à présent la considérer sous la forme

$$f_{T'} = \beta \cdot \frac{\tilde{r} - \tilde{r}(q)}{\tilde{r} - \tilde{r}(p)}$$

Déterminons d'abord β . On remarque que, comme $\tilde{s} = \frac{F_{3,T'} F_{1,I}^2}{F_{3,I}}$, on a $\tilde{s}(z) = 0$, et donc

$$\tilde{r}(z) = \frac{F_{3,T'}^2}{F_{1,I}}(z) = 0.$$

En évaluant alors $f_{T'}$ en z , on trouve

$$1 = f_{T'}(z) = \beta \cdot \frac{\tilde{r}(q)}{\tilde{r}(p)}$$

On en déduit

$$\beta = \frac{\tilde{r}(p)}{\tilde{r}(q)}$$

Ainsi, à ce stade, on a

$$f_{T'} = \frac{\tilde{r}(p)}{\tilde{r}(q)} \cdot \frac{\tilde{r} - \tilde{r}(q)}{\tilde{r} - \tilde{r}(p)}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer $\tilde{r}(p)$ et $\tilde{r}(q)$, et l'on connaîtra pleinement l'expression de $f_{T'}$ en fonction de \tilde{r} .

Pour ce faire, on va faire appel à toutes les formules que l'on établies jusque là.

Déjà, on sait que la résolvante de \tilde{s} s'annule en la valeur \tilde{s} , par définition ; ce qui nous donne la formule $\tilde{s}^5 - 10W'\tilde{s}^3 + 45W'^2\tilde{s} - W'^2 = 0$. Comme $\tilde{r} = \frac{\tilde{s}^2}{W'}$, on divise cette équation par $W'^2\tilde{s}$, pour trouver la formule : $\tilde{r}^2 - 10\tilde{r} + 45 = 1/\tilde{s}$.

On élève cette expression au carré, et on la multiplie par \tilde{r} pour trouver :

$$\tilde{r}(\tilde{r}^2 - 10\tilde{r} + 45)^2 = 1/W' = 1728(1 - f_I).$$

Pour conclure, il suffit de travailler un peu cette expression² pour trouver finalement que \tilde{r} vérifie l'équation

$$(\tilde{r} - 3)^3(\tilde{r}^2 - 11\tilde{r} + 64) = -1728f_I.$$

On évalue alors \tilde{r} en q ; f_I s'annule en q car c'est un sommet. On ne peut pas avoir $\tilde{r}(q) - 3 = 0$, c'est-à-dire $\tilde{r}(q) = 3$, car si c'était le cas, alors $\tilde{r}(q)$ serait réel, et donc égal à son conjugué, $\tilde{r}(p)$; autrement dit, on n'aurait plus aucune différence entre l'orbite des centres de faces, et celle des sommets, absurde.

Remarque IV.2.10. En tant que générateur de $\mathbb{C}(f_{T'})$, \tilde{r} est tenu de distinguer les deux orbites, celle des sommets et celle des centres de faces...

Ainsi, $\tilde{r}(q)$ vérifie

$$\tilde{r}(q)^2 - 11\tilde{r}(q) + 64 = 0.$$

On obtient alors

$$\tilde{r}(q) = \frac{11 \pm 3i\sqrt{15}}{2}.$$

Allez, plus qu'à savoir laquelle des solutions on garde. Il suffit pour cela d'évaluer $f_{T'}$ et \tilde{r} en une valeur particulière, qui soit différente d'un sommet, d'un centre de face ou d'un milieu d'arête du tétraèdre projectivisé, pour voir que

$$\tilde{r}(q) = \frac{11 - 3i\sqrt{15}}{2}.$$

2. Comme l'auteur de l'article [2] le dit si bien à ce moment du texte : "use the relation $1/W' = 1728(1 - f_I)$, and lots of high school algebra, and... paf! ça fait des Chocapics!"...Bon, d'accord, la fin, c'est pas dans l'article...

En se rappelant que $\tilde{r}(p)$ est le conjugué de $\tilde{r}(q)$, on en déduit avec bonheur l'expression complète de $f_{T'}$ en fonction de \tilde{r} :

$$f_{T'} = \frac{11 + 3i\sqrt{15} \tilde{r} - \frac{11-3i\sqrt{15}}{2}}{11 - 3i\sqrt{15} \tilde{r} - \frac{11+3i\sqrt{15}}{2}}.$$

Remarque IV.2.11. On retiendra donc pour la suite que \tilde{r} vaut $\frac{11 - 3i\sqrt{15}}{2}$ sur les centres de faces du tétraèdre (cette valeur est constante sur l'orbite des centres de faces) ; $\frac{11 + 3i\sqrt{15}}{2}$ sur ses sommets ; et donc 3 sur les autres points quelconques du tétraèdre.

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME FINAL : RÉOLUTION DE $f_I(z) = w$

Résumons chaque étape que nous avons dégagée dans ce qui précède, en partant de notre problème de départ : résoudre l'équation $f_I(z) = w$.

1. On pose $w' := \frac{1}{1728(1 - f_I)}$;
2. On cherche, à l'aide d'une méthode de Newton que nous décrirons dans le chapitre V, une racine \tilde{s} de l'équation de Brioschi pour ce w' ;
3. On pose $\tilde{r} := \frac{\tilde{s}^2}{w'}$, et $w'' := \frac{\tilde{r}(p)}{\tilde{r}(q)} \cdot \frac{\tilde{r} - \tilde{r}(q)}{\tilde{r} - \tilde{r}(p)} = \dots$;
4. On résout l'équation $f_{T'}(z) = w''$, en utilisant le fait que $f_{T'} = f_T \circ \rho^{-1}$, où f_T est connu.

IV.3 Annexe



IV.3.1 Expression de f_T dans $\mathbb{C}(f_{D_2})$.

Cette annexe a pour but de montrer que le choix de ζ_3 dans les calculs de la partie IV.1 n'est pas dû au hasard...

Notations. On adopte les notations suivantes :

\mathcal{S}_T est l'ensemble des sommets du tétraèdre ;

\mathcal{F}_T est l'ensemble des centres de faces du tétraèdre ;

\mathcal{A}_T est l'ensemble des milieux d'arêtes du tétraèdre.

Nous voulons exprimer f_T dans $\mathbb{C}(f_{D_2})$, c'est-à-dire trouver R fraction rationnelle telle que :

$$f_T = R(f_{D_2}), \text{ où } R \text{ est une fraction rationnelle de degré } 3.$$

Nous avons quelques règles à respecter imposées par f_T :

$$\begin{cases} f_T(s) = \infty & \forall s \in \mathcal{S}_T \\ f_T(f) = 0 & \forall f \in \mathcal{F}_T \\ f_T(a) = 1 & \forall a \in \mathcal{A}_T \end{cases}$$

Notre première idée est donc de construire à partir de f_{D_2} une fonction semi-invariante qui vaut ∞ sur \mathcal{S}_T et 0 sur \mathcal{F}_T ; c'est à dire une fonction de la forme :

$$\frac{f_{D_2} - f_{D_2}(f)}{f_{D_2} - f_{D_2}(s)}, \quad s \in \mathcal{S}_T, f \in \mathcal{F}_T.$$

On se demande alors si le choix de $s \in \mathcal{S}_T$ et $f \in \mathcal{F}_T$ a une importance, ou plutôt, si avant projection, le choix de $p \in \mathcal{S}_T$ et de $q \in \mathcal{F}_T$ a une incidence.

La proposition suivante répond à ce problème.

Proposition IV.3.1. D_2 agit transitivement sur \mathcal{S}_T et \mathcal{F}_T .

Démonstration. Nous savons que $\mathfrak{A}_4 \simeq V_4 \triangleleft \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Or : $\mathfrak{A}_4 \simeq \Gamma_T$, $V_4 \simeq D_2$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = C_3$.

Donc, si on prend $s \in \mathcal{S}_T$ tel que $C_3 = \text{Stab}(s)$ et puisque Γ_T agit transitivement sur \mathcal{S}_T , on a :

$$\mathcal{S}_T = \Gamma.T.s = (D_2 C_3).s = D_2.s$$

Il en est de même pour \mathcal{F}_T .

□

La fonction f_{D_2} étant invariante, d'après la propriété précédente, le choix de $q \in \mathcal{F}_T$ et $p \in \mathcal{S}_T$ n'importe pas. On choisit donc p et q comme sur la figure IV.3 ; p est un sommet du tétraèdre inscrit dans le cube, et q un centre de face, on peut le voir comme un sommet du contre-tétraèdre (c'est-à-dire l'autre tétraèdre que l'on peut inscrire dans ce même cube) que l'on aurait normalisé.

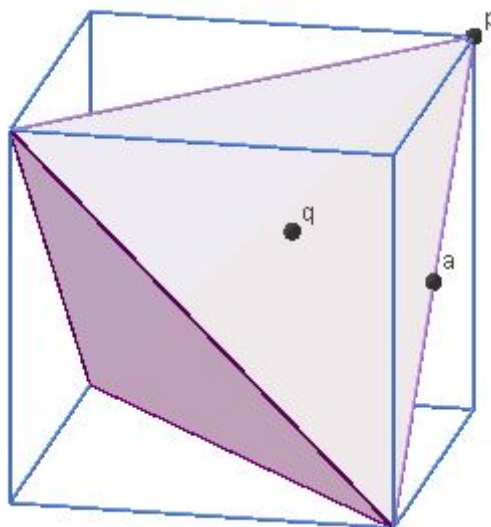


FIGURE IV.3 – Choix des points sur le tétraèdre

Posons :

$$\begin{cases} \zeta &= \pi(q) \\ \zeta' &= \pi(p) \end{cases}$$

Remarque IV.3.2. Les points p et q sont symétriques par rapport au plan (xOz) donc après projection stéréographique, $\pi(p) = \zeta'$ et $\pi(q) = \zeta$ sont conjugués. En effet, $f_{D_2} = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2}$ est réelle donc : $\zeta = f_{D_2}(\pi(q)) = f_{D_2}(\overline{\pi(p)}) = \overline{f_{D_2}(\pi(p))} = \overline{\zeta'}$.

Ainsi, $\frac{f_{D_2} - \zeta}{f_{D_2} - \overline{\zeta}}$ est de degré 4, vaut 0 sur F_T et ∞ sur S_T .

Nous en déduisons : $\frac{f_{D_2} - \zeta}{f_{D_2} - \overline{\zeta}} = \lambda \frac{F_{2,T}}{F_{1,T}}$, nous avons l'égalité à une constante près car nous n'avons pas rempli les conditions sur les milieux d'arêtes.

On élève au cube, car nous nous souvenons qu'il faut des formes orbitales pleines, pour obtenir

$$\left(\frac{f_{D_2} - \zeta}{f_{D_2} - \overline{\zeta}} \right)^3 = \mu f_T \text{ avec } \mu = \lambda^3.$$

Cherchons μ et ζ .

- Calcul de ζ :

$F_{1,T}$ s'annule sur S_T , donc $F_{1,T}(\pi(p)) = 0$ ce qui donne $(\pi(p))^4 = 2i\sqrt{3}(\pi(p))^2 - 1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\bar{\zeta} &= f_{D_2}(\pi(p)) \\
&= \frac{(\pi(p))^4 + 2(\pi(p))^2 + 1}{4(\pi(p))^2} \\
&= \frac{(2i\sqrt{3} + 2)(\pi(p))^2}{(\pi(p))^2} \\
&= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} \\
&= -\zeta_3^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\zeta = -\zeta_3.$$

$$\begin{aligned}
\text{On a donc, } \mu f_T &= \left(\frac{f_{D_2} - (-\zeta_3)}{f_{D_2} - (-\zeta_3^2)} \right)^3 \\
&= \left(\frac{f_{D_2} + \zeta_3}{f_{D_2} + \zeta_3^2} \right)^3.
\end{aligned}$$

- Calcul de μ :

Pour cela, nous allons calculer f_T sur A_T .

Soit $a = (-1, 0, 0) \in A_T$.

$$\pi(a) = 1 \Rightarrow f_T(\pi(a)) = 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu &= \left(\frac{f_{D_2}(1) + \zeta_3}{f_{D_2}(1) + \zeta_3^2} \right)^3 \\
&= \left(\frac{1 + \zeta_3}{1 + \zeta_3^2} \right)^3 \\
&= \left(\frac{(1 + \zeta_3)(1 + \zeta_3)}{\|1 + \zeta_3^2\|^2} \right)^3 \\
&= (1 + 2\zeta_3 + \zeta_3^2)^3 \\
&= \zeta_3^3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\mu = 1.$$

Ainsi :

$$f_T = \left(\frac{f_{D_2} + \zeta_3}{f_{D_2} + \zeta_3^2} \right)^3.$$

Chapitre V

Résolution de l'équation de Brioschi



V.1 Introduction à la méthode de Newton, étude du cas cyclique

La résolution de l'équation de Brioschi repose sur la *méthode de Newton*.

V.1.1 La méthode de Newton

Le problème est le suivant : on cherche à résoudre une équation du type :

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction polynomiale.

Autrement dit, on cherche à localiser une à une toutes les racines de f . Pour la suite du raisonnement, appuyons-nous sur ce schéma :

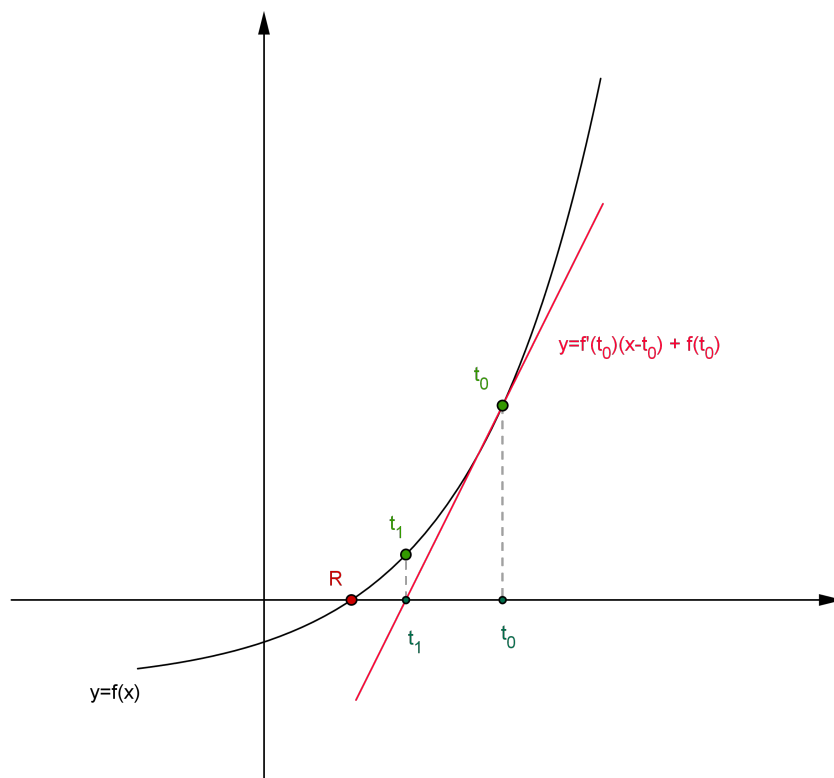


FIGURE V.1 – Illustration de la méthode de Newton

Déjà, première remarque évidente : les racines de f sont les intersections du graphe de f avec l'axe des abscisses. On va donc chercher à s'approcher de ces points. Pour ce faire, on choisit un point t_0 "assez proche" de la racine cherchée, à condition que l'image de ce point par la dérivée de f ne soit pas nulle, c'est-à-dire $f'(t_0) \neq 0$.

On trace ensuite la tangente à la courbe $y = f(x)$ en t_0 ; cette tangente a pour équation

$$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0),$$

et elle coupe l'axe des abscisses en le point t_1 ; ce point vérifie donc, d'après l'équation de la tangente ci-dessus,

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Et on recommence le processus... On voit donc apparaître une fonction récursive ; la fonction $g(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$. Recommencer, c'est-à-dire appliquer plusieurs fois la fonction récursive ; on verra donc dans la suite apparaître des fonctions de type g^k , $k \in \mathbb{N}$.

Seulement, voilà : on a quand même fait un choix pour t_0 ... Comment le choisir ? Dans quel ensemble ?

On veut choisir t_0 dans un ouvert qui ait une certaine légitimité algébrique. On va choisir la *topologie de Zariski* sur l'espace \mathbb{K}^n : une base d'ouverts pour cette topologie, et pour un polynôme fixé¹, est l'ensemble des

$$U_P = \{x \in \mathbb{K}^n; P(x) \neq 0\}.$$

Ainsi, dans \mathbb{K} , un ouvert correspondra à $\mathbb{K} \setminus \{\text{un nombre fini de points}\}$; c'est dans ce type d'ouverts que nous travaillerons. Nous n'en dirons pas davantage sur la construction de ces ouverts, certes intéressante, mais qui sort un peu du cadre de notre étude.

V.1.2 Etude d'un exemple emblématique : le cas cyclique

On va dans cette partie étudier la résolution du problème dans le cas cyclique. On a $\Gamma = C_n \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. On cherche à résoudre l'équation de degré n :

$$z^n = w, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Le polynôme considéré est le suivant :

$$P_w(T) = T^n - w.$$

On commence par lui associer la fonction récursive, comme ci-dessus :

$$q(T) = T - \frac{T^n - w}{nT^{n-1}} = \frac{(n-1)T^n + w}{nT^{n-1}}.$$

On cherche un procédé général pour calculer toutes les racines n -ièmes de w , où w est fixé dans \mathbb{C} . On va commencer par transformer w en une variable W ²; la fonction q devient alors

$$F_W(T) = \frac{(n-1)T^n + W}{nT^{n-1}},$$

qui est une fonction appartenant à $\mathbb{C}(W)(T)$ ³.

La première étape, dans l'étude de cette fonction itérative, va être de remarquer que, *via* une transformation homographique, on peut ramener l'étude à des fonctions indépendantes de w ; autrement dit, le problème $T^n = w$ peut se ramener au problème uniformisé $T^n = 1$.

Cette homographie, c'est ϕ :

$$\phi_z := \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t \mapsto \frac{t}{z}.$$

1. Encore faut-il trouver, pour chacun de nos exemples, le polynôme adapté...

2. On voit ici toute la beauté de l'algèbre en oeuvre dans ce raisonnement : à la fin, on spécialisera en le complexe w , mais avant, on en fait une indéterminée, afin de pouvoir considérer des corps, des extensions de Galois comme on le verra plus loin... En bref, reculer pour mieux spécialiser.

3. Petite remarque en passant : pour en revenir aux ouverts de Zariski, comme on voit bien qu'avec une telle définition pour F_W , l'image de 0 n'est pas définie, on sait donc déjà que le polynôme P utilisé pour définir la base d'ouverts doit avoir 0 comme racine...

En effet, si l'on calcule tout d'abord $P_w \circ \phi_z^{-1}$, on trouve

$$P_w \circ \phi_z^{-1}(t) = z^n t^n - w = w(t^n - 1),$$

ce qui montre que $P_w \circ \phi_z^{-1}$ et $P_1 = T^n - 1$ ont les mêmes racines.

Cela suggère l'utilisation de fonctions récursives uniformisées, c'est-à-dire l'étude de $F|_{W=1}$ (que l'on notera plus simplement F_1 , ou même F) au lieu de F_W , via la transformation $\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1}$ (attention, là encore, on a transformé z en une indéterminée Z), puisque

$$\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1} = \frac{1}{Z} \frac{(n-1)(TZ)^n + W}{n(TZ)^{n-1}} = \frac{W((n-1)T^n + 1)}{WnT^{n-1}} = F|_{W=1}.$$

Avec spécialisation en $W = w$, cela donne le même calcul :

$$\phi_z \circ q_w \circ \phi_z^{-1} = q_1.$$

Ce sont les bonnes fonctions à considérer car, comme on l'a dit précédemment, pour trouver toutes les n racines, on va avoir besoin d'appliquer n fois ces fonctions récursives, autrement dit, de manipuler $(\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1})^n$. Or, on a

$$\begin{aligned} F_1^n &= (\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1})^n = \underbrace{(\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1})(\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1}) \cdots (\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1})}_{n \text{ fois}} \\ &= \phi_Z \circ F_W^n \circ \phi_Z^{-1}. \end{aligned}$$

Donc appliquer n fois F_1 , ou n fois F_W , c'est du pareil au même.

Petit point de vocabulaire.

Notations. $(q_w)_w$ et $(F_W)_W$ définissent une *famille d'itérations*. On a

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}(T) \\ w &\longmapsto F|_{W=w} = q_w \end{aligned}$$

De plus, le fait d'avoir $\phi_Z \circ F_W \circ \phi_Z^{-1} = F|_{W=1}$ donne une *famille rigide d'itérations*.

Passer de $(q_w)_w$ à $(F_W)_W$, c'est relever la famille $(q_w)_w$.

Toutes les bases sont maintenant jetées pour pouvoir entrer au coeur des calculs.

SCHÉMA DE L'ÉTUDE

Nous, ce que l'on veut, c'est résoudre une équation du type $f(l) = 0$.

Appelons F la fonction récursive associée à f ; la méthode de Newton consiste à voir l comme une limite de la fonction récursive évaluée en un point l_0 qui approche l :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(l_0).$$

Déformons F via la transformation homographique ϕ ; on a alors, par continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi \circ F \circ \phi^{-1})^n(\phi(l_0)) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(l_0)\right) = \phi(l).$$

Ainsi, on a que $(\phi \circ F \circ \phi^{-1})^n(\phi(l_0))$ tend vers un certain l' tel que : $(f \circ \phi^{-1})(l') = 0$.

Le décor est maintenant planté. Revenons à nos fonctions. Le calcul se fait dorénavant dans $\mathbb{K}(T)$, avec :

$$\mathbb{K} := \mathbb{C}(W)[Z]/(Z^n - W)$$

Remarque V.1.1. Par le critère d'Eisenstein, le polynôme $Z^n - W$ est irréductible dans $\mathbb{C}[W][Z]$; par le critère de Gauss, il est aussi irréductible sur $\mathbb{C}(W)$. Par conséquent, \mathbb{K} est un corps.

A priori, \mathbb{K} est engendré par \bar{Z} et \bar{W} ; mais, comme $\bar{Z}^n = \bar{W}$, \bar{Z} suffit à engendrer \mathbb{K} ; on a donc

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}(\bar{Z}).$$

On va décrire ce qu'implique une famille rigide d'itérations, en suivant toujours notre exemple emblématique, le cas cyclique. Déjà, on a que $\phi_Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}(Z))$, et pas dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C}(Z))$.

Remarque V.1.2. Le résultat précédent vient du fait que $\mathbb{C}(Z)$ n'est pas algébriquement clos. En effet, supposons que c'est le cas. On raisonne dans $\text{GL}_2(\mathbb{C}(Z))$ pour simplifier, et on note $\delta := \det(\phi_Z)$. Pour que ϕ_Z soit dans $\text{SL}_2(\mathbb{C}(Z))$, on aimerait pouvoir définir la matrice : $\frac{1}{\sqrt{\delta}} \begin{pmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, il faudrait que δ soit un carré. Or, $\delta = \frac{1}{Z}$, est-ce que $\frac{1}{Z}$ est un carré dans $\mathbb{C}(Z)$? Il suffit de considérer les degrés en jeu pour que tous nos poils mathématiciens se hérissent à la vue d'un tel calcul!

Remarque V.1.3. A noter : \mathbb{C} , lui, est algébriquement clos, ce qui entraîne que $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$; car dans ce cas, le déterminant peut être écrit comme un carré, et le raisonnement précédent est justifié.

Revenons à nos famille rigides d'itérations; elles vérifient $\phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z = F_W$. *A priori*, on travaille dans $\mathbb{C}(\bar{Z})(T)$; mais, *a posteriori*⁴, on voit que quand on effectue le calcul, tous les \bar{Z} disparaissent, à cause de la formule $\bar{Z}^n = \bar{W}$, ne reste alors que \bar{W} , ce qui nous permet de dire que l'on est en fait dans $\mathbb{C}(\bar{W})(T)$. De plus, on voit que l'équation $\bar{Z}^n = \bar{W}$ se traduit naturellement, via la correspondance de Galois, par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(\bar{Z}) \\ \Gamma \downarrow \\ \mathbb{C}(\bar{W}) = \mathbb{C}(\bar{Z})^\Gamma \end{array}$$

4. ... "Gardiens de la paix avant tout"..... Désolée.

Ainsi, le fait que $\phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z$ soit dans $\mathbb{C}(\bar{W})(T)$ montre que l'on a le résultat suivant :

Proposition V.1.4. $\phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z$ est Γ -invariant.

On a donc une action du groupe Γ ($= C_n$ dans notre exemple emblématique) à considérer. Quelle est cette action ?

Sur $\mathbb{K}[T]$, il n'est pas bien difficile d'en définir une ; il suffit de considérer $P^\gamma := \gamma \cdot P := \sum_i \gamma(a_i)T^i$, pour $\gamma \in \Gamma$, et $P \in \mathbb{K}[T]$, $P := \sum_i a_i T^i$.

Sur $\mathbb{K}(T)$, en revanche, c'est moins direct ; pour $R := \frac{P}{Q}$, où P et Q sont premiers entre eux, on pose $R^\gamma := \frac{P^\gamma}{Q^\gamma}$.

Proposition V.1.5. Cette action est bien définie.

Démonstration. Pour montrer que c'est bien défini, il faut montrer que cela ne dépend pas de l'écriture de R .

Prenons $R = \frac{P_1}{Q_1}$, où $P_1 = AP$, et $Q_1 = AQ$ (lemme de Gauss). On a alors

$$R^\gamma = \frac{P_1^\gamma}{Q_1^\gamma} = \frac{(AP)^\gamma}{(AQ)^\gamma} \stackrel{(1)}{=} \frac{A^\gamma P^\gamma}{A^\gamma Q^\gamma} = \frac{P^\gamma}{Q^\gamma}$$

(1) : cette égalité se vérifie sans trop de difficulté, c'est un produit de Cauchy...

◇

On a donc défini notre action de Γ sur $\mathbb{C}(\bar{Z})(T) = \mathbb{K}(T)$.

On a vu que $\phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z$ est Γ -invariant, donc :

$$\forall \gamma \in \Gamma, (\phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z)^\gamma = \phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z,$$

i.e.

$$\forall \gamma \in \Gamma, (\phi_Z^{-1})^\gamma \circ F^\gamma \circ (\phi_Z)^\gamma = \phi_Z^{-1} \circ F \circ \phi_Z,$$

où l'on définit $\phi_Z^\gamma = \phi_{\gamma \cdot Z}$.

De plus, comme F ne dépend pas de \bar{Z} , on a $F^\gamma = F$. Cela nous permet de modifier l'égalité précédente en

$$\forall \gamma \in \Gamma, \phi_Z \circ (\phi_Z^{-1})^\gamma \circ F \circ (\phi_Z)^\gamma \circ \phi_Z^{-1} = F.$$

Posons maintenant $\rho(\gamma) := (\phi_Z)^\gamma \circ \phi_Z^{-1}$, de sorte à ce que F vérifie

$$\boxed{\rho(\gamma)^{-1} \circ F \circ \rho(\gamma) = F}.$$

L'étude de F se ramène, à ce stade, à l'étude de $\rho(\gamma)$.

Dans notre exemple où $\Gamma = C_n$, on prend $\gamma = \zeta_n^j$, $1 \leq j \leq n - 1$. On a alors

$$\rho(\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\gamma \circ \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\zeta_n^j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Une remarque à faire ? Eh oui : On s'attendait à ce que $\rho(\gamma)$ soit dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(\bar{Z}))$; il est en réalité dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$! Comment cela se fait-ce ? Penchons-nous sur la question.

Proposition V.1.6. *On a que $\rho(\gamma)$ est dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration. On note $A := \{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$ l'ensemble des racines du polynôme P de départ, $P = T^n - 1$. C'est aussi l'ensemble des points fixes de la fonction itérative F .

Tout d'abord, si l'on a $\rho(\gamma)^{-1} \circ F \circ \rho(\gamma) = F$, alors $\rho(\gamma)$ laisse stable A .

En effet, pour $x \in A$,

$$\begin{aligned} F(x) = x &\implies F(\rho(\gamma)(x)) = \rho(\gamma)(F(x)) = \rho(\gamma)(x) \\ &\implies \rho(\gamma)(x) \in A. \end{aligned}$$

Montrons maintenant, sans le calcul, que $\rho(\gamma)$ ne dépend pas de Z . Soit z dans un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} , que l'on choisit connexe, qui n'annule pas le dénominateur de $R \in \mathbb{C}(Z)$. On peut donc dire que \mathcal{U} est égal à \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points. On a $\rho(\gamma)(z) \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Or, on vient de voir que $\rho(\gamma)(z)$ permute l'ensemble A . On a donc $\rho(\gamma)(z) \in \mathfrak{S}(A) \subset \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

On définit alors une application continue :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow \mathfrak{S}(A) \subset \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto \rho(\gamma)(z) \end{aligned}$$

On a donc une application continue d'un ensemble connexe vers un ensemble discret ; l'application est donc constante.

On a ainsi montré que $\rho(\gamma)$ ne dépend pas de Z , c'est-à-dire $\rho(\gamma) \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$. ◇

On a ainsi défini

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ \gamma &\longmapsto \rho(\gamma) \end{aligned}$$

Proposition V.1.7. *L'application ρ est un morphisme de groupes injectif.*

Résultat admis⁵.

RÉSUMÉ

On est partis du fait que l'on avait une famille d'équations indexées par $W : Z^n = W$; cette famille d'équations, on l'a rendue rigide, c'est-à-dire que l'on a ramené l'étude de cette famille à l'étude

5. Quoi que, dans le cas qui nous intéresse, $\Gamma = \mathfrak{A}_5$, ce qui simplifie grandement la tâche.

d'une seule fonction itérative, modulo changement de variable homographique, afin d'obtenir une rigidité dans la façon d'obtenir une racine.

On transforme cette condition en une condition d'invariance de F par l'action de Γ , *via* la formule : $\rho(\gamma)^{-1} \circ F \circ \rho(\gamma) = F$.

Ensuite, par injectivité de ρ , on se ramène au fait que Γ s'injecte dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. On a même plus : ce phénomène de rigidité ne peut se trouver qu'avec des déformations d'une équation dont le groupe de Galois est un sous-groupe fini de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

V.2 Résolution de l'équation de Brioschi : construction de l'algorithme



On rappelle le contexte : on cherche à résoudre l'équation de degré 60 : $f_I(z) = w$. On a vu dans la section IV.2 que cette résolution pouvait s'effectuer en plusieurs étapes, que l'on résume par cette grande chaîne de l'amitié :

$$f_I \xrightarrow{(1)} W' \xrightarrow{(2)} \tilde{s} \xrightarrow{(3)} \tilde{r} \xrightarrow{(4)} f_{T'}$$

(1) : Cela vient de l'équation $W' = \frac{1}{1728(1-f_I)}$;

(2) : Cela se fait en déterminant une racine \tilde{s} de la résolvante de Brioschi : $T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2$.

(3) : On avait posé $\tilde{r} = \frac{\tilde{s}^2}{W'} = \frac{\tilde{s}}{F_{1,I}}$.

(4) : On passe de \tilde{r} à $f_{T'}$ par une homographie, décrite dans le paragraphe IV.2.

On va dans cette partie décrire l'étape (2) ; plus précisément, on va chercher à construire étape par étape un algorithme capable de nous résoudre l'équation de Brioschi. La section V.3 suivante fera tourner ledit algorithme pour une résolution effective de l'équation de Brioschi.

Avant d'aller plus loin, et afin de ne pas heurter un public sensible, un petit message d'avertissement : cette partie est difficile à suivre, aussi avons-nous décidé de nous concentrer sur la construction en elle-même des différents objets entrant en jeu dans l'algorithme, et non sur les preuves des résultats exploités...

V.2.1 Mise en route du problème

L'équation de Brioschi à résoudre est la suivante :

$$T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2$$

C'est un polynôme de $\mathbb{C}(W')(T)$, et l'extension de corps associée est $\mathbb{C}(Z)/\mathbb{C}(W')$, où les générateurs Z et W' sont liés par la fonction icosaédrale, f_I . Or, justement, la relation entre W' et

f_I n'est rien d'autre qu'une relation fractionnelle linéaire ; ce qui fait que l'extension considérée est ici aussi $\mathbb{C}(Z)/\mathbb{C}(f_I)$, où $\mathbb{C}(f_I) = \mathbb{C}(Z)^{\Gamma_I}$; cela suggère donc que des fonctions Γ_I -invariantes vont faire leur apparition...

Le problème consiste à trouver une famille de fonctions $(F'_W)_{W'} \in \mathbb{C}(W')(T)$ que l'on pourra itérer dans le but de déterminer une racine de l'équation de Brioschi.

Si l'on reprend le déroulement de l'exemple du cas cyclique décrit en V.1.2, on voit que la théorie fait apparaître le morphisme :

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma_I &\longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ \gamma &\longmapsto \rho(\gamma) = \phi_Z^\gamma \circ \phi_Z^{-1}, \end{aligned}$$

où ϕ_Z est dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(Z))$; c'est une homographie permettant d'uniformiser l'équation de Brioschi, c'est-à-dire de passer, *via* la conjugaison par ϕ_Z , à un problème où W' est spécialisé en 1, et où donc l'étude de la famille de fonctions itératives est réduite à l'étude d'une seule, F . La fonction ϕ_Z est de la forme :

$$\phi_Z = \begin{bmatrix} a(Z) & b(Z) \\ c(Z) & d(Z) \end{bmatrix} : T \mapsto \frac{a(Z)T + b(Z)}{c(Z)T + d(Z)}$$

L'uniformisation cherchée se ramène à l'égalité $\rho(\gamma)^{-1} \circ F \circ \rho(\gamma) = F$. Considérons pour ρ l'injection canonique (on sait de toute façon que ρ est injectif, voir V.1.7) ; autrement dit : $\phi_Z^\gamma \circ \phi_Z^{-1} = \gamma \forall \gamma$, ou écrit autrement,

$$\phi_Z^\gamma = \gamma \circ \phi_Z.$$

La fonction F doit alors vérifier l'égalité :

$$\gamma^{-1} \circ F \circ \gamma = F$$

Autrement dit, on va chercher une fonction F qui sera Γ_I -normale.

Voici un petit résumé des étapes qui vont suivre.

Feuille de route :

1. On calcule la fonction F et ϕ_Z (notée plus simplement ϕ , on oublie sa dépendance en l'indéterminée Z) ;
2. On étudie la convergence du modèle ; on verra qu'il s'agit de considérer la fonction $F \circ F$, car c'est elle qui possèdera les propriétés de convergence nécessaires ;
3. Comme jusque là, seules des fonctions paramétrées par l'indéterminée Z étaient considérées, cette partie s'attache à les reparamétriser par W' , qui est un paramètre que l'on connaît au départ ;
4. On trouve les racines de l'équation.

V.2.2 Ingrédients de l'algorithme : calculs de F et de ϕ

CALCUL DE F

On rappelle que les fonctions que l'on doit construire doivent être Γ_I -normales. On a vu dans le chapitre III.2.2 que de telles fonctions étaient engendrées par les fonctions : $F_{1,I}$, $F_{2,I}$ et $F_{3,I}$. En effet, dans la partie III.3, on avait construit les fonctions génératrices des corps $\mathbb{C}(Z)^\Gamma$ comme quotients de fonctions exprimées en produits et puissances des F_i ; ces fonctions étaient Γ -invariantes, à scalaire près, et ce scalaire se simplifiait dans la fraction. Ici, où il ne s'agit pas de faire des fractions de $F_{i,I}$, on considère donc bel et bien des fonctions Γ -normales.

Attention, on les a exprimées dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, ce qui veut dire que l'on relève le problème dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et que de $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ on passe à Γ' , le groupe relevé dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ⁶. Dès lors, tous les éléments de Γ' seront de la forme γ' , pour ne pas confondre.

La théorie des formes différentielles au secours des fonctions normales

A ce stade, apparaissent les notions de *formes différentielles*, et en particulier de *1-formes*, et de *tirés en arrière*.

Définition V.2.1. [*1-forme*] Une 1-forme est une fonction du type : $F_1 dZ_1 + F_2 dZ_2$, où F_1 et F_2 sont des 0-formes (c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{C}[Z_1 : Z_2]$) de même degré.

Définition V.2.2. [*Tiré en arrière*] Chaque $\gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ définit un *tiré en arrière* :

- Sur des polynômes homogènes, il est défini par l'opération : $\gamma'^*(F) = F \circ \gamma'$.
- Sur des 1-formes, le tiré en arrière commute avec l'opérateur d ; plus précisément, pour $\gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, en posant $Z := \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$, et $dZ := \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \end{bmatrix}$, on a :

$$\gamma'^*(dZ) = d(\gamma'^*Z) = d(Z \circ \gamma') = d(\gamma'Z) = \gamma'dZ.$$

Plus généralement, pour une 1-forme de type $\mu = F.dZ$, où $F := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$, on a

$$\gamma'^*\mu = (F \circ \gamma').\gamma'dZ = \gamma'^t(F \circ \gamma').dZ.$$

Définition V.2.3. [*Forme standard*]

On retiendra en particulier la *forme standard* :

$$\lambda := -Z_2 dZ_1 + Z_1 dZ_2,$$

dont le tiré en arrière est : $\det(\gamma')\lambda$.

A présent, faisons le lien entre fonctions normales et 1-formes.

6. Ce principe de relèvement intervient très naturellement ici, puisque, "pour avoir l'invariance en bas, il faut avoir la normalité en haut"; en effet, vu dans l'autre sens, des fonctions Γ -normales dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont par définition des fonctions Γ -invariantes, à scalaire près, donc dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, elles se transforment en des fonctions Γ -invariantes.

Définition V.2.4. [1-forme associée]

A chaque fonction normale, on peut lui associer une 1-forme comme suit : pour $f := \frac{f_1}{f_2} \in \mathbb{C}(Z)$, et F_1 , resp. F_2 , la fonction homogénéisée associée à f_1 , resp. f_2 , la 1-forme associée à f est :

$$\mu = -F_2 dF_1 + F_1 dF_2 = SF.dZ,$$

en notant $F := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$, $dZ := \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \end{bmatrix}$, et $S := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque V.2.5. Un résultat qui nous sera utile dans les calculs : S possède la propriété suivante : $Sm^{-1} = {}^t mS$ pour tout $m \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Pourquoi introduire la théorie des formes différentielles ? Tout provient de l'observation suivante :

Proposition V.2.6. Conjuguer F par un $\gamma \in \Gamma_I \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ revient à calculer le tiré en arrière de la 1-forme μ_F associée à F : $\gamma^* \mu_F$.

Démonstration. On calcule :

$$\underbrace{S(\gamma'^{-1} \circ F \circ \gamma').dZ}_{\text{1-forme associée à } \gamma'^{-1} \circ F \circ \gamma'} = S\gamma'^{-1}(F \circ \gamma').dZ \stackrel{(*)}{=} \gamma'^t(SF \circ \gamma').dZ =: \gamma'^* \mu.$$

1-forme associée à $\gamma'^{-1} \circ F \circ \gamma'$

(*) : car $S\gamma'^{-1} = {}^t \gamma' S$

On a donc bien la correspondance entre tiré en arrière, et forme normale. ◇

Plus important encore, la relation $\gamma'^{-1} \circ F \circ \gamma' = F$ entraîne que :

$$\text{Trouver des fonctions } \Gamma_I\text{-normales, c'est trouver des 1-formes telles que : } \exists \chi(\gamma') \in \mathbb{C}; \gamma'^*(\mu) = \chi(\gamma')\mu.$$

En effet, en reprenant les notations de la définition V.2.4, μ définit F_1, F_2 à scalaire près, puisque (dZ_1, dZ_2) constitue une base des 1-formes sur $\mathbb{C}[Z_1 : Z_2]$, il est donc naturel qu'apparaisse un scalaire, qui dépend de γ' .

La proposition suivante, que l'on admet, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 1-forme vérifie cela.

Proposition V.2.7. Soit μ une 1-forme de degré n , et soit $\gamma' \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Il existe $\chi(\gamma') \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma'^*(\mu) = \chi(\gamma')\mu$ si et seulement si :

$$\mu = G\lambda + dH,$$

où :

- * $G \in \mathbb{C}_{n-1}[Z_1 : Z_2]$ tel que $\gamma'^*(G) = \chi(\gamma')G$;
- * $H \in \mathbb{C}_{n+1}[Z_1 : Z_2]$ tel que $\gamma'^*(H) = \chi(\gamma')H$;
- * $\lambda = -Z_2 dZ_1 + Z_1 dZ_2$, la forme standard vue précédemment.

Remarque V.2.8. Attention! Le χ de la proposition ne désigne pas les caractères associés à chaque fonction semi-invariante calculés en III.2.2; donc, pas la peine de se demander si les fonctions considérées sont pleines orbitales à considérer pour avoir le même caractère...

Proposition V.2.9. *La condition $dH = 0$ entraîne que F , notre fonction Γ -normale, est l'identité sur $\mathbb{C}(Z)$; $F : Z \mapsto Z$.*

Démonstration. En effet, si $dH = 0$, alors on a, d'après la proposition V.2.7, $\mu = G\lambda$, avec $\lambda = -Z_2 dZ_1 + Z_1 dZ_2$. On a donc μ de la forme $-F_2 dF_1 + F_1 dF_2$, avec $F_1 = GZ_1$, et $F_2 = GZ_2$; la fonction normale associée est alors : $f = \frac{G_*(Z_1)_*}{-G_*(Z_2)_*} = -Z$: f est donc la fonction constante, à signe près, sur $\mathbb{C}(Z)$. \diamond

Regroupons tous ces résultats pour déterminer une procédure claire pour construire des fonctions Γ -normales :

Construction de fonctions Γ -normales

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, relevé en $\Gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ⁷.

Pour construire une fonction F qui soit Γ -normale, il faut :

1. Trouver des fonctions G et H dont le degré diffère de 2, et qui ont le même caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$;
2. Ecrire la 1-forme $G\lambda + dH$, avec λ comme ci-dessus, sous la forme $-F_2 dF_1 + F_1 dF_2$;
3. Le quotient déshomogénéisé $F := \frac{(F_1)_*}{(F_2)_*}$ est alors Γ -normal.

Remarque V.2.10. Dans toute la suite, on indicera une fonction par une étoile, $(f)_*$, pour signifier que l'on considère la fonction déshomogénéisée.

On applique ce raisonnement ici : on est amenés à considérer les fonctions $F_{1,I}$, $F_{2,I}$ et $F_{3,I}$, de degré respectif 12, 20 et 30. On cherche à construire la fonction F la plus simple possible; on cherche donc à prendre, pour le moment, pour G et H les fonctions $F_{i,I}$, et non des produits de fonctions; autrement dit, on veut écrire $G = F_{1,I}, F_{2,I}$ ou $F_{3,I}$, et pareil pour H . Or, aucune des fonctions $F_{i,I}$ ne diffère, par le degré, de 2! Par conséquent, afin d'avoir l'homogénéité de la 1-forme associée à $F : G\lambda + dH$ de la proposition V.2.7, on a nécessairement $G = 0$ ou $dH = 0$. Si $dH = 0$, on aurait d'après V.2.9 que F est constante, pas très intéressant. On prend donc $G = 0$, et donc $H = F_{1,I}$, ou $F_{2,I}$ ou $F_{3,I}$. On va prendre $H = F_{1,I}$, la fonction la plus simple.

On cherche alors F_1 et F_2 telles que

$$-F_2 dF_1 + F_1 dF_2 = \mu_F = dF_{1,I}$$

En désignant par D_1 la dérivation par rapport à la première variable, et par D_2 la dérivation par rapport à la seconde variable, et en calculant $dF_{1,I}$, on arrive à l'identification :

⁷ La théorie est basée sur le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; mais, comme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, on peut dès lors considérer des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{cases} F_1 = D_2(F_{1,I}) \\ F_2 = -D_1(F_{1,I}) \end{cases}$$

Ainsi, la fonction F tant attendue est : $F = -\frac{(D_2(F_{1,I}))_*}{(D_1(F_{1,I}))_*}$. En effectuant les calculs, et en déshomogénéisant en la variable T , on trouve :

$$F = -\frac{T^{11} + 66T^6 - 11T}{11T^{10} + 66T^5 - 1}$$

CALCUL DE ϕ

Avant même de se lancer dans sa construction, la première chose à se demander est : est-ce que ϕ existe seulement ? On va appliquer un raisonnement par analyse-synthèse : on va construire un élément ϕ , et on vérifiera qu'on l'a construit avec les propriétés souhaitées.

Pour calculer ϕ , on va utiliser la même méthode que précédemment, avec d'autres fonctions Γ_I -invariantes. Remarquons que les fonctions $F_{3,I}$ et $F_{1,I} \cdot F_{2,I}$ sont de degré respectif 30 et 32, soit de degrés qui diffèrent de 2 ; on peut donc utiliser la proposition V.2.7, et créer d'autres fonctions Γ_I -normales, en ajoutant cette fois un paramètre $[T_1 : T_2]$ parcourant $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, afin de créer une série de fonctions.

Après calcul, ces fonctions sont de type :

$$F_T(Z) = \frac{(T_1 Z_1 F_{3,I} + T_2 D_2(F_{1,I} F_{2,I}))_*}{(T_1 Z_2 F_{3,I} - T_2 D_1(F_{1,I} F_{2,I}))_*},$$

où $(\cdot)_*$ désigne la déshomogénéisation de la variable $[Z_1 : Z_2]$ en Z , et du paramètre $[T_1 : T_2]$ en T . Comme fonction de Z , cette série F_T est Γ_I -normale, par construction.

Comment, à partir de ces fonctions, obtenir ϕ ? L'idée est d'inverser, dans l'expression de F_T , la variable et le paramètre, en voyant la fonction comme une transformation linéaire rationnelle, paramétrée par Z , en la variable T :

$$F_T(Z) = \begin{bmatrix} Z_1 F_{3,I} & D_2(F_{1,I} F_{2,I}) \\ Z_2 F_{3,I} & -D_1(F_{1,I} F_{2,I}) \end{bmatrix}_* (T) =: \psi_Z(T)$$

Avec ces notations, le fait que F_T soit Γ_I -normale se traduit par : $\gamma \circ \psi_Z = \psi_{\gamma \cdot Z} =: \psi_Z^\gamma, \forall \gamma \in \Gamma_I$. En effet, F_T est une fonction en Z , Γ -invariante, c'est-à-dire que $F_T(\gamma \cdot Z) = F_T(Z)$. En échangeant les fonctions de T et Z , on trouve directement : $\gamma \circ \psi_Z = \psi_{\gamma \cdot Z}$; c'est exactement ce que l'on voulait pour définir notre ϕ !

Plus généralement, on a la même relation pour tout $\psi_Z \circ m$, avec m dans $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$: on peut montrer en effet que $\gamma \circ (\psi_Z \circ m) = (\psi_Z \circ m)^\gamma, \forall \gamma \in \Gamma_I$, la démonstration reposant sur le fait que m agit sur T , et comme l'action considérée s'effectue sur Z , les deux actions commutent, ce qui donne le résultat.

Ainsi, tous les $\psi_Z \circ m$ sont candidats pour définir la transformation homographique dont nous avons besoin pour résoudre l'équation de Brioschi. Reste maintenant à trouver un m le plus simple possible. On développe l'expression de F_T :

$$F_T(Z) = \left[F_{3,I} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad F_{2,I} \begin{bmatrix} D_2(F_{1,I}) \\ -D_1(F_{1,I}) \end{bmatrix} + F_{1,I} \begin{bmatrix} D_2(F_{2,I}) \\ -D_1(F_{2,I}) \end{bmatrix} \right]_* =: [c_1 \quad c_2 + c'_2]_*$$

Le résultat qui va tout simplifier, c'est que l'on peut montrer que c'_2 est en fait combinaison linéaire des deux autres colonnes.

Lemme V.2.11. *On a $c'_2 = \frac{5}{3}(c_1 + c_2)$.*

Admis.

On pose alors $m := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$. En remplaçant cette expression dans les calculs, on trouve :

$$\psi \circ m = [c_1 \quad c_2]_*$$

Cela définit notre ϕ avec l'expression la plus simple. On a donc :

$$\phi = \begin{bmatrix} Z_1 F_{3,I} & F_{2,I} D_2(F_{1,I}) \\ Z_2 F_{3,I} & -F_{2,I} D_1(F_{1,I}) \end{bmatrix}_*$$

V.2.3 Etude de la convergence du modèle

Il faut quand même que l'on discute de la convergence de F . En effet, la méthode de Newton consiste à voir les racines d'une équation comme une limite, voir V.1.1. On aimerait donc bien que le problème en diverge pas...

On rappelle que $F = -\frac{(D_2(H))_*}{(D_1(H))_*}$, avec $H = F_{1,I}$, que l'on réécrit :

$$F = -\frac{(Z_1 D_1(H) - Z_1 D_1(H) - Z_2 D_2(H))_*}{(Z_2 D_1(H))_*}. \text{ On utilise alors l'identité d'Euler :}$$

Proposition V.2.12. *Soit F un polynôme sur $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m]$, homogène, de degré n .*

Alors : $\sum_{i=1}^m Z_i D_i(F) = (\deg F) \cdot F$.

Démonstration. On montre cette identité dans le cas qui nous intéresse, à savoir sur $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, et il suffit de la vérifier sur F de la forme $Z_1^k Z_2^{n-k}$.

C'est tout droit :

$$Z_1 D_1(Z_1^k Z_2^{n-k}) + Z_2 D_2(Z_1^k Z_2^{n-k}) = Z_1 \cdot k Z_1^{k-1} Z_2^{n-k} + Z_2 \cdot (n-k) Z_1^k Z_2^{n-k-1} = n Z_1^k Z_2^{n-k}.$$

◇

Ainsi, ici, on a alors

$$F = \left(\frac{Z_1}{Z_2} - \deg(H) \frac{H}{Z_2 D_1(H)} \right)_* = T - 12 \frac{h}{h'},$$

où, pour simplifier les notations, on note $h = (H)_*$.

On veut appliquer la méthode de Newton en itérant F . Avec la nouvelle écriture de celle-ci, on voit que ses points fixes sont les racines de $H = F_{1,I}$, c'est-à-dire les sommets de l'icosaèdre. En ces

points, la dérivée de F est de degré $11 > 1$; en itérant, on a donc malheureusement que ces points fixes sont répulsifs, c'est-à-dire que les points au voisinage de ces éléments ne restent pas dans ce voisinage, par itération. Le système explose. Or, nous ce que l'on cherche, ce sont des points attracteurs (on veut que le problème converge...), et de tels points se doivent d'être des points fixes... Comme on vient de voir que tous les points fixes sont répulsifs, par conséquent, on a que F n'a pas de points attracteurs, et ne converge donc pas. Comment s'en sortir ?

...En élargissant la notion de points fixes. Commençons par introduire la notion de *cycle*.

Définition V.2.13. Soit $f \in \mathbb{C}(T)$. Un *cycle* de f est un ensemble $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{C} \cup \infty$ tel que :

$$f(a_1) = a_2; \quad f(a_2) = a_3; \quad \dots \quad f(a_n) = a_1.$$

Remarque V.2.14. La notion de *cycle* généralise la notion de points fixes; en effet, pour $n = 1$ dans la définition V.2.13, on retombe bien sur un point fixe.

Dans le cas de F , on a le résultat suivant :

Proposition V.2.15. *Chaque paire de centres de faces opposées de l'icosaèdre forme un cycle.*

Démonstration. Soit a un centre de face, et soit $\Gamma_a \subset \Gamma_I$ son stabilisateur. Il est d'ordre 3. Comme F est Γ_I -invariante (on a déshomogénéisé les fonctions, donc il s'agit bien de fonctions invariantes désormais), on a donc pour tout $\gamma_a \in \Gamma_a$:

$$\gamma_a(F(a)) = F(\gamma_a(a)) = F(a).$$

Ainsi, Γ_a stabilise $F(a)$. Puisque a est un centre de face, il ne saurait être un point fixe de F (on a vu que seuls les sommets de l'icosaèdre le sont); autrement dit, $F(a) \neq a$, il faut trouver un point distinct de a qui soit Γ_a -invariant; un tel point ne peut être que le centre de face opposée, c'est-à-dire $-a$.

Ainsi, on a bien $F(a) = -a$, et $F(-a) = a$: $\{a, -a\}$ forme un cycle. ◇

On réitère ce raisonnement pour montrer le résultat suivant :

Proposition V.2.16. *Les 15 paires de milieux d'arêtes de l'icosaèdre forment des cycles de F .*

Si l'on assemble tous ces résultats, on voit alors que

Proposition V.2.17. *La fonction $F \circ F$ fixe les sommets, les centres de faces, et les milieux d'arêtes de l'icosaèdre.*

On se doute bien que ces trois familles de points fixes n'ont pas les mêmes propriétés. Il faut donc définir un critère permettant de les distinguer. C'est dans cet optique là que l'on introduit la notion de *points critiques*.

Définition V.2.18. Un *point critique* d'une fonction $f \in \mathbb{C}(T)$ est un point $a \in \mathbb{C} \cup \infty$ vérifiant :

$$f'(a) = 0.$$

Une conséquence à cette définition est le lemme suivant.

Lemme V.2.19. Soit une fonction $f := [G : H]$ définie comme dans la section III.2.1. Alors :

$$f' = 0 \text{ ssi : } \det \begin{bmatrix} D_1(G) & D_2(G) \\ D_1(H) & D_2(H) \end{bmatrix} = 0.$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{G(Z_1, Z_2)}{H(Z_1, Z_2)} \stackrel{(*)}{=} \frac{Z_1 D_1(G) + Z_2 D_2(G)}{Z_1 D_1(H) + Z_2 D_2(H)} = \frac{Z D_1(G) + D_2(G)}{Z D_1(H) + D_2(H)} \\ &\stackrel{(**)}{=} \left(Z \frac{D_1(G)}{D_2(H)} + \frac{D_2(G)}{D_2(H)} \right) \left(1 - Z \frac{D_1(H)}{D_2(H)} + o(z) \right) \\ &= \frac{D_2(G)}{D_2(H)} + Z \left(\frac{D_1(G)D_2(H) - D_2(G)D_1(H)}{(D_2(H))^2} \right) + o(Z) \end{aligned}$$

(*) : Par l'identité d'Euler, et puisque G et H sont de même degré, on peut simplifier par $\deg(G)$;

(**) : On divise par $D_2(H)$ numérateur et dénominateur, puis on utilise le développement de Taylor à l'ordre 1.

On reconnaît au numérateur du coefficient en z le déterminant annoncé dans la proposition, ce qui nous donne l'équivalence souhaitée. \diamond

En remplaçant G et H par les valeurs correspondantes à la fonction $F = [-D_2(F_{1,I}) : D_1(F_{1,I})]$, ce lemme montre que les points critiques de F sont en fait les racines du hessien de $F_{1,I}$, à savoir $HF_{1,I} = F_{2,I}$, d'après III.2.2 ! Autrement dit,

Proposition V.2.20. Les points critiques de F sont les 20 centres de faces de l'icosaèdre.

Voici donc la différence entre les trois familles de points fixes : les centres de faces sont des points critiques, les milieux d'arêtes et les sommets ne le sont pas.

Ainsi, les 20 centres de faces, dont on savait déjà qu'ils forment dix 2-cycles de F , sont des points critiques de F . On va voir que cela implique que $F \circ F$ est *généralement convergente*, c'est-à-dire qu'elle est convergente sur un ouvert dense.

Pour le voir, on va introduire de nouvelles notions.

Définition V.2.21. Soit $f \in \mathbb{C}(T)$.

1. Un cycle de f est dit *super-attractif* s'il contient un point critique de f ;
2. La fonction f est dite *critiquement finie* si chaque point critique t est dans un cycle de f .

Dans le cas de notre fonction F , on a vu que les points critiques sont exactement les centres de faces de l'icosaèdre ; ce sont des points qui appartiennent à des cycles de F . Par conséquent :

Proposition V.2.22. *La fonction F est critiquement finie.*

Cette propriété de la fonction F va nous sauver la mise, en faisant converger la méthode de Newton, et ce grâce au résultat suivant, que l'on admet :

Théorème V.2.23. *Soit f une fonction critiquement finie, et soit A l'union de ses cycles super-attractifs.*

Si A n'est pas vide, alors pour toute valeur initiale t prise dans un ouvert dense de $\mathbb{C} \cup \infty$, l'itération $\{f^k(t)\}$ converge vers un cycle de A .

Ainsi, comme F est une fonction critiquement finie, le théorème V.2.23 s'applique : pour t valeur initiale quelconque, $F^k(t)$ converge vers un certain cycle de A . Or, les cycles de A sont les cycles formés par les centres de faces, seuls points critiques du problème. Donc $F^k(t)$ converge vers un 2-cycle de centres de faces. Les cycles étant tous d'ordre 2, on obtient donc que $F \circ F$ converge généralement vers un centre de face.

C'est exactement ce qu'il nous faut pour montrer que la méthode de Newton appliquée à la fonction F converge !

En effet, on a montré que $F \circ F$ converge vers un centre de face, donc, par un simple changement de paramètre, et en faisant varier ce paramètre w' dans $\mathbb{C}(W')$, on obtient la convergence de la fonction itérative $F_{w'}(T) = (\phi_z^{-1} \circ F \circ \phi_z)(T)$, après un nombre pair d'itérations.

Une dernière observation avant de passer à la suite : on a trouvé un point fixe a pour $F \circ F$; ce a est un centre de face, et il appartient au corps $\mathbb{C}(a)$. Quand on considère la fonction $F_{w'}$, pour w' variant dans $\mathbb{C}(W')$, le corps de base n'est plus \mathbb{C} , justement, mais $\mathbb{C}(W')$. De plus, si a est un point fixe de $F \circ F$, alors $\phi_z^{-1}(a)$ est racine de $F_{w'} = \phi_z^{-1} \circ F \circ F \circ \phi_z$; ce point fixe appartient alors au surcorps de $\mathbb{C}(W') : \mathbb{C}(\phi_z^{-1}(a))$, et l'on peut montrer qu'il correspond au corps des invariants sous Γ_a , le stabilisateur de $a : \mathbb{C}(Z)^{\Gamma_a}$. On verra dans la section V.2.5 que ce corps en question contient deux racines de Brioschi.

V.2.4 Passage de Z à W'

On a, à ce stade, une formule explicite pour F , et pour ϕ ; on a donc une formule pour la fonction itérative de $\mathbb{C}(W')(T)$, $F_{W'} = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$. Seulement voilà, justement, $\phi^{-1} \circ F \circ \phi$ n'est pas encore tout à fait exprimée en fonctions du paramètre de Brioschi W' , mais en fonction de l'indéterminée Z ⁸. On a donc besoin d'exprimer $F_{W'} = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$ en fonction de W' .

On avait : $F = T - \deg(H) \frac{h}{h'}$, où $H = F_{1,I}$ et $h = (H)_*$, la fonction H en (Z_1, Z_2) déshomogénéisée en T . Les point fixes de F sont les racines de H , c'est-à-dire les sommets de l'icosaèdre ; et F est une fonction Γ_I -invariante.

On va voir que l'on peut obtenir le même type d'expression pour $F_{W'}$, à condition de prendre pour ϕ et pour H des définitions légèrement différentes. On veut donc pouvoir écrire :

8. Sachant cela, indiquer la famille d'itérations par W' dès le début, c'est un peu abusé...Mais, pas de chichis, les notations sont déjà assez compliquées comme ça.

$F_{W'}(T) = T - \deg(H) \frac{h}{h'}$, avec $h = (H)_*$ à définir. Seulement, si $F_{W'}$ admet une écriture de la sorte, cela signifie qu'elle doit posséder les mêmes propriétés que F , à savoir, être Γ_I -invariante, et fixer l'ensemble des sommets de l'icosaèdre.

On va commencer par établir une formule pour $F_{W'}$, et montrer ensuite qu'une telle expression a les propriétés souhaitées.

Tout d'abord, on va voir ϕ comme une fonction homogénéisée en Z et T pour obtenir une fonction paramétrée par (Z_1, Z_2) et linéaire en (T_1, T_2) . Cela donne :

$$\Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2) := \begin{bmatrix} Z_1 F_{3,I} & F_{2,I} D_2(F_{1,I}) \\ Z_2 F_{3,I} & -F_{2,I} D_1(F_{1,I}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, à la place de H , on va considérer la fonction homogénéisée, paramétrée par (Z_1, Z_2) et en la variable (T_1, T_2) :

$$H_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2) := \frac{F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2)}{F_{1,I}(Z_1, Z_2) \cdot F_{3,I}^{12}(Z_1, Z_2)}.$$

Proposition V.2.24. *On pose $F_{W'}(T) := T - \deg(H) \frac{h}{h'}$, avec $h = (H)_*$, $H = H_{(Z_1, Z_2)}$. Alors $F_{W'}$ est Γ'_I -invariante, et fixe les sommets de l'icosaèdre.*

Démonstration. Au premier regard, il est difficile de donner sens à une telle expression pour la fonction $F_{W'}$; en particulier au dénominateur de H . Celui-ci se comprendra plus tard dans le raisonnement, mais pour le moment, inutile de se torturer l'esprit avec, car dans les propriétés que nous avons à démontrer, il ne joue aucun rôle⁹.

Pour l'ensemble des points fixes de $F_{W'}$: le numérateur de $H_{(Z_1, Z_2)}$ n'est rien d'autre que la reparamétrisation de H à l'aide de $\Phi_{(Z_1, Z_2)}$, construite pour que, justement, $H_{(Z_1, Z_2)}$ s'annule sur l'ensemble $\Phi_{(Z, Z_2)}^{-1}(A)$, où A est l'ensemble des sommets de l'icosaèdre, relevés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; cet ensemble sur lequel $H_{(Z_1, Z_2)}$ s'annule est précisément l'ensemble que $F_{W'}$ doit fixer.

Pour la propriété d'invariance : comme $\Phi_{(Z_1, Z_2)}$ est Γ'_I -normale en les paramètres (Z_1, Z_2) , et $F_{1,I}$ est Γ'_I -invariante, toujours en les paramètres (Z_1, Z_2) , alors pour tout $\gamma' \in \Gamma'_I$:

$$F_{1,I} \circ \Phi_{\gamma' \cdot (Z_1, Z_2)} = F_{1,I} \circ \gamma' \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)} = F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}.$$

Le numérateur de $H_{(Z_1, Z_2)}$ est donc Γ'_I -invariant. Comme le dénominateur, encore non expliqué mais patience, il le sera, est également Γ'_I -invariant, on a donc que $H_{(Z_1, Z_2)}$ est Γ'_I -invariante...Donc $F_{W'}$ l'est aussi. ◇

Ainsi, on a pu exprimer $F_{W'} = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$ sous la forme :

9. On peut d'ailleurs remarquer que, comme $H_{(Z_1, Z_2)}$ est évaluée en la variable (T_1, T_2) , le dénominateur est une constante, paramétrée par (Z_1, Z_2) .

$$F_{W'} = -\frac{(D_2(H))_*}{(D_1(H))_*} = T - \deg(H) \frac{h}{h'},$$

où $h = (H)_*$, $H = H_{(Z_1, Z_2)}$, et D_1 , resp. D_2 désignent la dérivation partielle par rapport à T_1 , resp. T_2 , et $(\cdot)_*$ désigne la déshomogénéisation de (Z_1, Z_2) en Z .

Nous, ce que l'on voulait, on le rappelle, c'est pouvoir exprimer $F_{W'}$ en fonction de W' , et non de Z ; la nouvelle expression de $F_{W'}$ nous suggère que le travail va se concentrer sur le quotient $\frac{h}{h'}$. Et c'est là que le dénominateur de $H_{(Z_1, Z_2)}$ va enfin prendre sens! En effet, on verra au cours des calculs qui vont suivre que, sans ce dénominateur, $(H)_*$ ne pourra pas être exprimé en fonction de W' .

Bon, en fait, on ne va pas manipuler W' directement...Mais une renormalisation de W' par une transformation linéaire :

$$\widehat{W} := 1 - 1728W'.$$

En utilisant la définition de W' , $W' = \frac{1}{1728(1 - f_I(Z))}$, où $f_I(Z) = \frac{(F_{3,I}^3)_*}{(1728F_{1,I}^5)_*}$, d'après la section III.3, et la relation syzygy, $1728F_{1,I}^5 - F_{2,I}^3 - F_{3,I}^2 = 0$, que l'on peut calculer en se servant du résultat III.2.24, on peut montrer que :

$$\widehat{W} = \frac{-(F_{2,I}^3)_*}{(F_{3,I}^2)_*}.$$

On va voir que ce \widehat{W} rend les calculs plus simples; c'est donc ce paramètre que l'on utilisera dorénavant.

En particulier, pour l'itération nous utiliserons la famille $(F_{\widehat{W}})$ plutôt que $(F_{W'})$.

Reste donc à exprimer $F_{W'}$ en fonction maintenant de \widehat{W} . Concentrons-nous sur $h = (H_{(Z_1, Z_2)})_*$, à commencer par son numérateur. Comme $F_{1,I}$ est de degré 12 en (Z_1, Z_2) , et qu'il est facile de voir que $\Phi_{(Z_1, Z_2)}$ est de degré 31 en (Z_1, Z_2) , on en déduit que la composition $F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}$ est de degré 12×31 en (Z_1, Z_2) . On remarque également que $F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}$ est de degré 12 en (T_1, T_2) , puisque $F_{1,I}$ est de degré 12 en (T_1, T_2) , et Φ est de degré 1 en (T_1, T_2) .

On veut que $F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}$ soit une fonction Γ'_I -invariante. Déjà, on remarque que son degré peut se décomposer en $12 + (12 \times 30)$; le premier terme de la décomposition suggère l'apparition de la fonction $F_{1,I}$. Comment interpréter le degré 12×30 ? Déjà, on voit que ce degré est multiple de 60; ce sera donc une fonction Γ'_I -invariante. De plus, on sait que de telles fonctions sont engendrées par $-F_{2,I}$ et $F_{3,I}^{10}$, donc on va pouvoir utiliser une relation SYZYGY, voir III.2.24, pour exprimer $F_{1,I}^5$ en fonction de $F_{2,I}^3$ et $F_{3,I}^2$; en d'autres termes, on va pouvoir éliminer $F_{1,I}$ de l'expression de la fonction de degré 12×31 .

Toutes ces observations en termes de degré montrent que le numérateur de $H_{(Z_1, Z_2)}$ est finalement du type :

10. On a choisi de garder ces deux fonctions comme générateurs, mais l'on pouvait prendre $F_{1,I}$ et $F_{2,I}$, ou bien $F_{2,I}$ et $F_{3,I}$...

$$F_{1,I} \circ \Phi = F_{1,I} \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{12} a_{i,j} (F_{2,I})^{3i} F_{3,I}^{12-2i} T_1^j T_2^{12-j},$$

qui se réécrit en

$$F_{1,I} \circ \Phi = F_{1,I} F_{3,I}^{12} T_2^{12} \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{12} a_{i,j} \left(\frac{-F_{2,I}^3}{F_{3,I}^2} \right)^i \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^j,$$

où les coefficients $a_{i,j}$ peuvent être déterminés à l'aide d'un énorme système d'équations...

Remarque V.2.25. Notons que, *a priori*, $F_{1,I}$ est semi-invariante. Seulement, \mathfrak{A}_5 , le groupe de l'icosaèdre, est simple, ce qui fait que le caractère associé à $F_{1,I}$ est trivial; donc $F_{1,I}$ est bien invariante, comme souhaité dans l'expression de $F_{1,I} \circ \Phi$.

Si l'on déshomogénéise cette formule, en passant de (T_1, T_2) à T , et en notant que $(T_2)_* = 1$, on en déduit la formule :

$$\left(\frac{F_{1,I} \circ \Phi}{F_{1,I} F_{3,I}^{12}} \right)_* = \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{12} a_{i,j} \widehat{W}^i T^j =: h_{\widehat{W}}(T).$$

Et le voilà (enfin!), le pourquoi du dénominateur de $H_{(Z_1, Z_2)}$: sans lui, on aurait pas pu faire apparaître ce \widehat{W} dans la formule de h .

En calculant les coefficients $a_{i,j}$, on trouve que

$$\begin{aligned} h_{\widehat{W}} = & 91125\widehat{W}^6 + (-133650T^2 + 61560T - 193536)\widehat{W}^5 \\ & + (-66825T^4 + 142560T^3 + 133056T^2 - 61440T + 102400)\widehat{W}^4 \\ & + (5940T^6 + 4752T^5 + 63360T^4 - 140800T^3)\widehat{W}^3 \\ & + (-1485T^8 + 3168T^7 - 10560T^6)\widehat{W}^2 + (-66T^{10} + 440T^9)\widehat{W} + T^{12} \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant cette (monstrueuse) expression dans $F_{\widehat{W}}$, on trouve l'expression de la famille d'itération (grand moment d'émotion) :

$$\boxed{F_{\widehat{W}}(T) = T - 12h_{\widehat{W}}(T)/h'_{\widehat{W}}(T)}$$

V.2.5 Résolution de la résolvante de Brioschi : recherche des racines

On a notre expression tant attendue de la famille à itérer. Reste à voir à présent comment s'en servir pour calculer effectivement les racines. Rappelons tout d'abord le contexte. Le groupe Γ_I contient le groupe $\Gamma_{T'}$, qui correspond au groupe du tétraèdre $T' = \rho(T)$, revoir la section IV.2. On avait vu dans cette même section que l'élément $\tilde{s} = \left(\frac{F_{3,T'} F_{1,I}^2}{F_{3,I}} \right)_*$ avait pour résolvante $T^5 - 10W'T^3 + 45W'^2T - W'^2$, avec les expressions de W' , et maintenant de \widehat{W} , que l'on connaît.

Notons tout d'abord que l'on manipule des fonctions Γ_I -invariantes. Pour trouver toutes les racines de la résolvante, on va donc devoir faire agir le groupe Γ_I . Seulement, le groupe d'isométries positives du tétraèdre, $\Gamma_{T'}$, agit trivialement sur le problème. Comme l'action se fait à droite : $\gamma.f = f \circ \gamma$, on a donc l'apparition du groupe quotient $\Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I$, qui est en bijection avec les orbites pour cette action. En choisissant des représentants des classes de l'action, on peut donc dire que les autres racines sont les $\tilde{s}^\gamma := \gamma \cdot \tilde{s}$, où γ parcourt un système de représentants de $\Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I$. Quel est ce système de représentants ?

Pour le voir, on va manipuler $\tilde{r} := \frac{\tilde{s}^2}{W'} = \left(\frac{F_{3,T'}}{F_{1,I}} \right)$ plutôt que \tilde{s} . Servons-nous du résultat suivant :

Proposition V.2.26. *Les 20 centres de faces de l'icosaèdre se divisent en trois orbites sous l'action du groupe $\Gamma_{T'}$:*

- L'orbite \mathcal{O} , d'ordre 4, formée des sommets du tétraèdre T' ;
- L'orbite \mathcal{O}' , d'ordre 4 également, formée des sommets du contre-tétraèdre associé à T' , autrement dit, des 4 centres de faces du tétraèdre T' normalisé ;
- L'orbite \mathcal{P} non dégénérée des points quelconques du tétraèdre, d'ordre (donc) 12.

Le tétraèdre T' et son contre-tétraèdre sont représentés dans la figure qui suit :

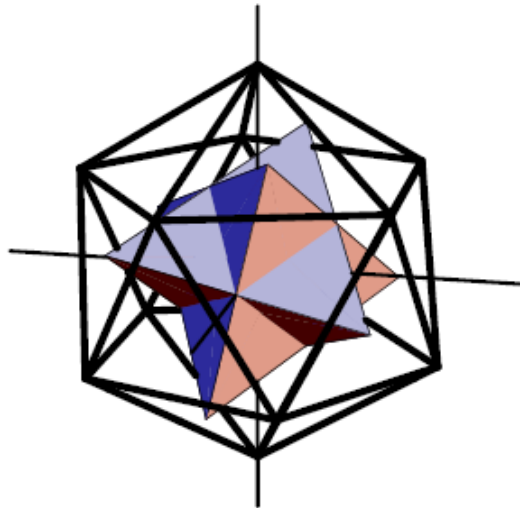


FIGURE V.2 – Tétraèdre T' et contre-tétraèdre

Démonstration. Rappelons que le tétraèdre T' a été fixé dans l'icosaèdre. Celui-ci possède 20 faces, donc 20 centres de faces. Notons tout d'abord que, sur ces 20 centres de faces, 4 correspondent aux sommets du tétraèdre T' ; 4 autres correspondent aux sommets du contre-tétraèdre associé à T' (après normalisation, ces 4 sommets correspondent aux milieux de faces du tétraèdre T').

On fait maintenant agir le groupe $\Gamma_{T'} \simeq \mathfrak{A}_4$, sur les centres de faces. A noter que, si Γ_I agit transitivement sur les centres de faces de l'icosaèdre, le groupe $\Gamma_{T'}$ ne risque pas d'en faire autant (déjà, il est d'ordre 12, il est mal parti). Comme il correspond, par définition, au groupe d'isométries positives du tétraèdre T' , il va d'une part, stabiliser l'ensemble des sommets de celui-ci : autrement dit, on a déjà une orbite d'ordre 4, notée \mathcal{O} ; d'autre part, stabiliser l'ensemble des centres de faces de T' : c'est la seconde orbite d'ordre 4, formée des sommets du contre-tétraèdre, notée \mathcal{O}' .

Il reste encore 12 centres de faces. Ils ne peuvent correspondre ni à des sommets, ni à des centres de faces du tétraèdre T' ; deux possibilités se présentent : soit ces 12 centres de faces restants correspondent à des milieux d'arêtes de T' , soit ce sont des points quelconques. Etudions le premier cas : si c'était des milieux d'arêtes de T' , alors les 12 centres de faces se diviseraient en $6 + 6$ (un tétraèdre possède 6 arêtes), cela nous donnerait donc 2 orbites supplémentaires.

De cela, on en déduit que les 12 centres de faces restants sont des points quelconques, regroupés en une seule orbite d'ordre 12, et notée \mathcal{P} . \diamond

Proposition V.2.27. *On a les formules suivantes :*

- $\tilde{r}(\mathcal{O}) = \frac{11 + 3i\sqrt{15}}{2}$; $\tilde{r}(\mathcal{O}') = \frac{11 - 3i\sqrt{15}}{2}$; $\tilde{r}(\mathcal{P}) = 3$;
- $\tilde{r} - 3 = \left(\frac{F_{2,I}}{F_{2,O'}F_{1,I}} \right)_*$.

Les premières égalités ont été démontrées en IV.2.11. Ces formules nous aideront plus tard à résoudre l'équation de Brioschi.

Notons A l'ensemble des points attracteurs de $F \circ F$ comme vu dans la partie V.2.3; A est en fait l'ensemble des centres de faces de l'icosaèdre. Pour toute valeur z de spécialisation de l'indéterminée Z , la fonction ϕ_z^{-1} envoie A sur l'ensemble des attracteurs de $F_{\hat{W}} \circ F_{\hat{W}}$ spécialisé en la valeur \hat{w} calculée à partir de z :

$$\phi_z^{-1} : A \longrightarrow \text{Att}(F_{\hat{w}} \circ F_{\hat{w}})$$

Toujours dans la même section V.2.3, on a vu que l'itération de $F_{\hat{w}} \circ F_{\hat{w}}$ convergeait, à partir d'une valeur quelconque t , vers des centres de faces de l'icosaèdre, soit : un élément de A . Autrement dit, en utilisant l'application ϕ_z^{-1} , on a que l'itération converge vers des certains $\phi_z^{-1}(a)$, $a \in A$.

Ainsi, $\phi_z^{-1}(a)$ est notre donnée générale calculée par l'itération.

Maintenant, si l'on applique encore une fois $F_{\hat{w}}$ à un $\phi_z^{-1}(a)$, que se passe-t-il ?

Proposition V.2.28. *On a que $F_{\hat{w}}(\phi_z^{-1}(a)) = \phi_z^{-1}(-a)$.*

Démonstration. En utilisant le fait que $F(a) = -a$, voir la preuve de V.2.15, c'est tout droit :

$$F_{\hat{w}}(\phi_z^{-1}(a)) = (\phi_z^{-1} \circ F \circ \phi_z)(\phi_z^{-1}(a)) = \phi_z^{-1}(F(a)) = \phi_z^{-1}(-a).$$

\diamond

Fixons un $a \in A$. On a la propriété (immédiate) suivante :

Proposition V.2.29. *Le stabilisateur de a , Γ_a , appartient à deux sous-groupes de Γ_I ; lesdits sous-groupes correspondent aux groupes de tétraèdres inscrits dans l'icosaèdre :*

- Le groupe de rotations du tétraèdre \mathcal{T}_a , dont a est l'un des sommets;
- Le groupe de rotations du tétraèdre \mathcal{T}_{-a} , dont $-a$ est l'un des sommets.

Démonstration. Cela vient du fait que l'axe des rotations fixant a passe également par $-a$. \diamond

Remarque V.2.30. On a $\mathcal{T}_a \neq \mathcal{T}_{-a}$.

Le résultat clef pour la quête des racines de la résolvante de Brioschi est le suivant :

Proposition V.2.31. *Pour tout $\gamma \in \Gamma_I$, chaque classe d'équivalence $\Gamma_{T'}\gamma \in \Gamma_{T'}\backslash\Gamma_I$ envoie a dans l'une des trois orbites \mathcal{O} , \mathcal{O}' et \mathcal{P} : la classe $\Gamma_{T'}.\gamma_0$ envoie a dans \mathcal{O} , et $\Gamma_{T'}.\gamma_1$ envoie a dans \mathcal{O}' , pour γ_0, γ_1 choisis parmi le système de représentants des classes ; les trois autres classes d'équivalence envoient a dans \mathcal{P} .*

Démonstration. Soit a un centre de face. Le groupe Γ_I agit transitivement sur l'ensemble des centres de faces, donc envoie a sur un autre centre de face. Comme on a partitionné les 20 faces de l'icosaèdre en 3 orbites \mathcal{O} , \mathcal{O}' et \mathcal{P} , a va être envoyé sur l'une de ces trois orbites. L'action de $\Gamma_{T'}$ stabilise ensuite les orbites, donc a restera ensuite dans l'orbite. Il suffit alors de choisir des représentants de chaque classe d'équivalence pour obtenir le résultat voulu. \diamond

Avec ces notations, on a :

Proposition V.2.32. *Les sous-groupes contenant Γ_a , le stabilisateur de a , sont :*

$$\Gamma_{T,0} := \gamma_0^{-1}\Gamma_{T'}\gamma_0; \text{ et } \Gamma_{T,1} := \gamma_1^{-1}\Gamma_{T'}\gamma_1.$$

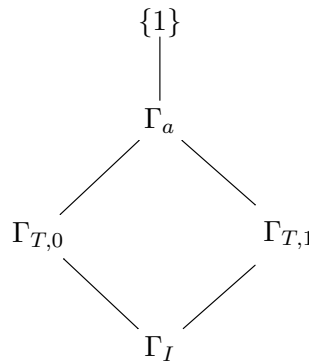
Démonstration. Cela provient de la formule bien connue : $\text{Stab}(g.x) = g \circ \text{Stab}(x) \circ g^{-1}$. Ici, c'est l'élément γ_0 qui envoie T' sur \mathcal{T}_a , et donc γ_0^{-1} qui envoie \mathcal{T}_a sur T' . Il suffit donc d'appliquer la formule avec $g = \gamma_0^{-1}$. \diamond

En utilisant la correspondance de Galois, on a

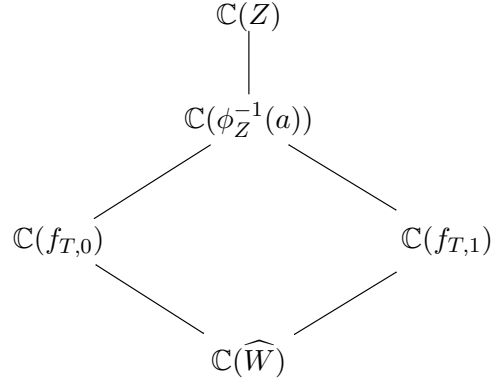
Proposition V.2.33. *Le générateur de la sous-extension de corps correspondant à $\Gamma_{T,0}$, resp. $\Gamma_{T,1}$, est $f_{T,0} := f_{T'}^{\gamma_0}$, resp. $f_{T,1} := f_{T'}^{\gamma_1}$.*

On a donc les schémas suivants :

Tout d'abord, les groupes...



...Puis les extensions de corps



A présent, le résultat que nous attendions tous :

Proposition V.2.34. *Les éléments $\tilde{s}^{\gamma_0} =: s_0$ et $\tilde{s}^{\gamma_1} =: s_1$ sont des racines de l'équation de Brioschi. Ce sont des éléments de $\mathbb{C}(f_{T,0})$, resp. $\mathbb{C}(f_{T,1})$.*

Démonstration. Cette propriété est immédiate : comme translatés de \tilde{s} , d'après le début de cette section V.2.5, s_0 et s_1 sont racines.

La seconde assertion est également directe. \diamond

Une conséquence directe de cette dernière propriété, et si l'on regarde les schémas précédents, on peut voir que s_0 et s_1 sont des expressions rationnelles en $\phi_Z^{-1}(a)$, voir la remarque IV.2.4.

Comment les déterminer explicitement ?

Pour cela, on va utiliser les valeurs prises par l'élément $\tilde{r} - 3$ sur les trois orbites \mathcal{O} , \mathcal{O}' et \mathcal{P} , et ce en introduisant une nouvelle fonction en T , paramétrée par \widehat{W} (dès lors, on omet de préciser qu'il s'agit de la forme associée à F , c'est implicite) :

$$\mu_{\widehat{W}}(T) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{T'} \setminus \Gamma_I} \tilde{s}^\gamma(Z) \cdot (\tilde{r}^\gamma \circ \phi_Z(T) - 3)$$

Proposition V.2.35. *La fonction $\mu_{\widehat{W}}$ appartient à $\mathbb{C}(\widehat{W})(T)$.*

Démonstration. Elle s'exprime en fonction d'éléments Γ_I -invariants ; elle est donc bien dans $\mathbb{C}(\widehat{W})(T)$. \diamond

On a vu que notre itération nous donne des $\phi_Z^{-1}(a)$, pour $a \in A$ fixé, et $F_{\widehat{W}}(\phi_Z^{-1}(a)) = \phi_Z^{-1}(-a)$. On évalue $\mu_{\widehat{W}}$ en ces deux valeurs.

Proposition V.2.36. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{W}}(\phi_Z^{-1}(a)) &= \frac{5 + 3i\sqrt{15}}{2} s_0 + \frac{5 - 3i\sqrt{15}}{2} s_1 =: \mu_0; \\
\mu_{\widehat{W}}(\phi_Z^{-1}(-a)) &= \frac{5 - 3i\sqrt{15}}{2} s_0 + \frac{5 + 3i\sqrt{15}}{2} s_1 =: \mu_1.
\end{aligned}$$

On trouve alors que :

$$s_0 = \frac{9 - i\sqrt{15}}{90}\mu_0 + \frac{9 + i\sqrt{15}}{90}\mu_1; \quad s_1 = \frac{9 + i\sqrt{15}}{90}\mu_0 + \frac{9 - i\sqrt{15}}{90}\mu_1$$

Démonstration. La somme porte sur les 5 représentants des classes de $\Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I$; parmi eux, on compte Γ_0 et γ_1 . En ces valeurs, on a $\tilde{s}^{\gamma_0} = s_0$, resp. $\tilde{s}^{\gamma_1} = s_1$, et

$$\tilde{r}^{\gamma_0} \circ \phi_Z(\phi_Z^{-1}(a)) - 3 = \frac{11 + 3i\sqrt{15}}{2} - 3 = \frac{5 + 3i\sqrt{15}}{2}, \quad \text{resp.} \quad \tilde{r}^{\gamma_1} \circ \phi_Z(\phi_Z^{-1}(a)) - 3 = \frac{5 - 3i\sqrt{15}}{2}.$$

Quant aux autres valeurs, comme on a $\tilde{r}(\mathcal{P}) = 3$, tous les autres termes de la somme s'annulent. \diamond

J'annonce¹¹, que calculer μ va permettre de dérouler tout l'algorithme!

Pour ce faire, on utilise les formules pour \tilde{s} et $\tilde{r} - 3$, et on homogénéise, pour trouver :

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{W}}(T) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I} \tilde{s}^\gamma(Z) \cdot (\tilde{r}^\gamma \circ \phi_Z(T) - 3) \\ &= \left[\sum_{\gamma \in \Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I} \frac{F_{1,O'}^{\gamma'} F_{1,I}^2}{F_{3,I}} \cdot \frac{(F_{2,I}/F_{1,O'}^{\gamma'}) \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2)}{F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2)} \right]^* \\ &= \left[\frac{\sum_{\gamma \in \Gamma_{T'} \backslash \Gamma_I} F_{1,O'}^{\gamma'} F_{1,I} \cdot ((F_{2,I}/F_{1,O'}^{\gamma'}) \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2)) / F_{3,I}^{13}}{(F_{1,I} \circ \Phi_{(Z_1, Z_2)}(T_1, T_2)) / (F_{1,I} F_{3,I}^{12})} \right]^* \\ &=: \frac{k_{\widehat{W}}(T)}{h_{\widehat{W}}(T)}. \end{aligned}$$

Après calcul, on peut montrer que

$$\begin{aligned} k_{\widehat{W}}(T) &= 1000\widehat{W}(\widehat{W} - 1)b \\ &\quad [(1215T - 648)\widehat{W}^4 + (-540T^3 - 216T^2 - 1152T + 640)\widehat{W}^3 \\ &\quad \quad + (378T^5 - 504T^4 + 960T^3)\widehat{W}^2 + (36T^7 - 168T^6)\widehat{W} - T^9] \end{aligned}$$

V.2.6 Aboutissement : l'algorithme de la résolvante de Brioschi

Toutes ces (difficiles) étapes ont permis de construire un à un chacun des ingrédients nécessaires à la création d'un algorithme permettant de nous donner les racines de l'équation de Brioschi; et cet algorithme, le voilà :

¹¹. Pour les fans de la *Tour Montparnasse Infernale*, qui s'attendaient à un coup de pied latéral en pleine face, c'est raté.

ALGORITHME

On veut résoudre la résolvante $T^5 - 10w'T^3 + 45w'T - w'^2$, pour $w' \in \mathbb{C}$.

1. On pose $\widehat{w} := 1 - 1728w'$, et on calcule les polynômes $h_{\widehat{w}}$ et $k_{\widehat{w}} \in \mathbb{C}[T]$.
2. A partir d'une valeur t quelconque, on itère la fonction $F_{\widehat{w}} = T - 12h_{\widehat{w}}/h'_{\widehat{w}} \in \mathbb{C}(T)$ un certain nombre de fois, jusqu'à ce que l'itération converge vers un certain t_0 . On pose ensuite $t_1 := F_{\widehat{w}}(t_0)$.
3. On pose $\mu_0 := k_{\widehat{w}}(t_0)/h_{\widehat{w}}(t_0)$, et $\mu_1 := k_{\widehat{w}}(t_1)/h_{\widehat{w}}(t_1)$.
4. Alors $s_0 = \frac{9 - i\sqrt{15}}{90}\mu_0 + \frac{9 + i\sqrt{15}}{90}\mu_1$ et $s_1 = \frac{9 + i\sqrt{15}}{90}\mu_0 + \frac{9 - i\sqrt{15}}{90}\mu_1$ sont deux racines de l'équation de Brioschi.

Il reste encore trois racines à trouver. Mais le problème se réduit alors à une équation de degré 3, qui soit se résout par radicaux comme on aime... Soit on recommence le processus, jusqu'à trouver toutes les racines. Larmes de joie.



V.3 L'algorithme dans toute sa splendeur : mise en route du programme

Voici le programme qui permet de calculer deux des racines de l'équation de Briochi.

```

var('T W')
B(T, W) = T5 - 10WT3 + 45W2T - W2
H(T, W) = 91125(1 - 1728W)6 + (-133650T2 + 61560T - 193536)(1 - 1728W)5 + (-66825T4 +
142560T3 + 133056T2 - 61440T + 102400)(1 - 1728W)4 + (5940T6 + 4752T5 + 63360T4 - 140800T3)(1 -
1728W)3 + (-1485T8 + 3168T7 - 10560T6)(1 - 1728W)2 + (-66T10 + 440T9)(1 - 1728W) + T12
K(T, W) = 100(1 - 1728W)((1 - 1728W) - 1)((1215T - 648)(1 - 1728W)4 + (-540T3 - 216T2 -
1152T + 640)(1 - 1728W)3 + (378T5 - 504T4 + 960T3)(1 - 1728W)2 + (36T7 - 168T6)(1 - 1728W) - T9)
F(T, W) = T - 12H/diff(H, T)
w = 0.5
R = []
for i in [1..100] :
    t = CC.random_element()
    G = F(t, w)
    g = F(G, w)
    for j in [1..500] :
        g = F(g, w)
    x = F(g, w)
    m = K(g, w)/H(g, w)
    n = K(x, w)/H(x, w)
    s = ((9 - I.sqrt(15))m/90 + (9 + I.sqrt(15))n/90).n(digits=10)
    c = ((9 + I.sqrt(15))m/90 + (9 - I.sqrt(15))n/90).n(digits=10)
    if s in R :
        R
    else :
        if c in R :
            R
        else :
            if s==c :
                R = R + [s, s.conjugate()]
            else :
                R = R + [s.conjugate(), c.conjugate()]
R
[1.705241025 - 0.6471973059II, 1.705241025 + 0.6471973059II, -1.716354576 -
0.6596231134II, -1.716354576 + 0.6596231134II, 1.705241025 + 0.6471973059II, 0.02222710226]

```


Bibliographie

- [1] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet, 2013.
- [2] Jerry Michael SHURMAN et Josh LEVENBERG : *Geometry of the quintic*. New York John Wiley & Sons, Inc., 1997.



FIGURE V.3 – Merci pour votre attention !