Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

18 Avril 2014

Durée : 2h30

Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, muni d'une forme quadratique non dégénérée q. On suppose que q est *isotrope*, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur u non nul de E tel que $q(u) = 0$. On notera $\mathcal{C} := \{u \in E,\, q(u) = 0\}$ le cône isotrope et φ la forme polaire de q.

1. Soit donc u non nul dans $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un vecteur v tel que $\varphi(u, v) \neq 0$. En déduire que (u, v) est la base d'un plan P tel que la matrice de la restriction de q à P dans cette base est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix},$$
avec $a, b \in \mathbb{K}$, a non nul.

2. Construire une base de P telle que la matrice de la restriction de q à P dans cette base soit égale à
$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
puis, trouver deux vecteurs isotropes indépendants u', u'' dans P.

3. On suppose maintenant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, ou un corps fini de cardinal impair. Montrer au cas par cas que tout élément de $\mathbb{K}$ est égal à la différence de deux carrés.

4. Rappeler pourquoi le groupe orthogonal $\mathrm{O}(q)$ agit transitivement sur les nappes quadratiques de la forme $N_\lambda := \{w \in E, q(w) = \lambda\}$, pour $\lambda \neq 0$.

5. Déduire que tout vecteur de E est somme d'au plus deux vecteurs isotropes, et en particulier, que $\mathcal{C}$ engendre E comme espace.

Exercice 2

Soit φ un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On fixe m entier dans $[1, n-1]$, et on suppose que φ envoie un parallélépipède de dimension m de m-volume V sur un parallèlotope de m-volume V. On veut montrer que φ est une isométrie.

1. En utilisant le fait qu'un parallèlotope engendré par k vecteurs, $k \leq m-1$, est de m-volume nul, montrer que φ est inversible.

2. Soit $\varphi = o\sigma$, $o \in \mathrm{O}_n$, $\sigma \in \mathcal{S}^{++}$ sa décomposition polaire. Montrer que σ conserve les m-volumes.

3. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de σ. Montrer que pour toute suite $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, on a $\prod_{j=1}^{m} \lambda_{i_j} = 1$.

4. En déduire que σ est l'identité et conclure.
On pourra dans un premier temps montrer que, pour tout j, j' de 1 à n, $\lambda_j = \lambda_{j'}$, et ce, en choisissant une partie I à $m-1$ éléments ne contenant ni j ni j'.

Problème

Dans tout le problème, où Grassmann est à l'honneur, E désignera un espace réel de dimension finie muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \cdots, e_n)$. Le but du problème est de classifier les paires de sous-espaces de E modulo l'action de $\mathrm{GL}(E)$.

A. Préliminaires

Soit k, p, p', trois entiers tels que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$0 < k \leq p \leq p', \ p < p + p' - k \leq n$$

1. Soit F_0 le sous-espace de E engendré par $(e_1, \cdots, e_{p-1}, e_p)$, et F_0' le sous-espace de E engendré par $(e_{p+1-k}, \cdots, e_{p+p'-k})$. Montrer que le sous-espace $G_0 := F_0 \cap F_0'$ est engendré par $(e_{p+1-k}, \cdots, e_p)$.
2. Montrer que $\dim(F_0) = p$, $\dim F_0' = p'$, $\dim G_0 = k$.
3. Soit a un réel *non nul*. On considère F^a le sous-espace de E engendré par $(e_1, \cdots, e_{p-1}, e_p + ae_{p+p'-k+1})$. Montrer que $F^a \cap F_0'$ est engendré par $(e_{p+1-k}, \cdots, e_{p-1})$ (en particulier, qu'il est nul pour $k = 1$) et que $\dim F^a \cap F_0' = k - 1$.

B. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur la grassmannienne Gr_p.

On identifiera E à $\mathbb{R}^n$ par la base $\underline{e}$ et donc $\mathrm{GL}(E)$ pourra être identifié à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit Gr_p la grassmannienne des sous-espaces de dimension p de E. On pourra admettre sans avoir à le justifier que $\mathrm{GL}(E)$ agit sur Gr_p par $g.F = g(F)$, $F \in \mathrm{Gr}_p$, $g \in \mathrm{GL}(E)$.

1. Expliquer pourquoi l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur Gr_p est transitive.
2. Décrire matriciellement le stabilisateur de F_0. Le dévisser en un produit semi-direct de groupes classiques.
3. Expliquer comment on construit la topologie de la grassmannienne de sorte que l'action soit continue, puis montrer que, munie de cette topologie, la grassmannienne est compacte.

   On pourra utiliser l'action du groupe orthogonal, en rappelant brièvement pourquoi celle-ci est transitive.
4. Soit $M_a = (m_{ij})$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf pour $m_{p+p'-k,p} = a$. En considérant l'action de $\mathrm{I}_n + M_a$ sur F_0, montrer que F_0 est dans l'adhérence de $\{F^a, a \in \mathbb{R}^*\}$ pour la topologie de la grassmannienne.

C. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ et continuité de l'intersection.

On pourra admettre sans avoir à le justifier que $\mathrm{GL}(E)$ agit sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ par $g.(F, F') = \big(g(F), g(F')\big)$, $F \in \mathrm{Gr}_p$, $F \in \mathrm{Gr}_{p'}$, $g \in \mathrm{GL}(E)$. Soit $\mathcal{O}_k$ la partie de $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ définie par

$$\mathcal{O}_k = \{(F, F'), \ F \in \mathrm{Gr}_p, \ F' \in \mathrm{Gr}_{p'}, \ \dim(F \cap F') = k\}.$$

1. Montrer que si g est inversible et si F, F' sont des parties de E, alors $g(F \cap F') = g(F) \cap g(F')$.
2. Montrer que $\mathcal{O}_k$ est stabilisé par l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$.
3. Montrer que, pour tout couple (F, F') de $\mathcal{O}_k$, il existe g dans $\mathrm{GL}(E)$ qui envoie (F, F') sur (F_0, F_0').

   On pourra partir d'une base de $F \cap F'$ et la compléter de façon adéquate en une base de E.
4. En déduire que les orbites de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ sont les $\mathcal{O}_j$, $p+p'-n \leq j \leq p$.

D. Continuité de l'intersection et adhérence des orbites.

Nous allons montrer que l'intersection fournit une application continue sur $\mathcal{O}_k$. Nous montrerons également que pour la topologie produit sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$, l'adhérence des orbites est donnée par

$$\overline{\mathcal{O}}_k = \bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j.$$

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ est continue.

2. On considère l'application ι de $\mathcal{O}_k$ dans Gr_k qui envoie (F, F') sur $F \cap F'$. Montrer que cette application est continue pour la topologie produit sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ et celle de Gr_k.

   On peut introduire $\bar{\varphi} : \mathrm{GL}(E)/\mathrm{Stab}_{(\mathrm{F}_0,\mathrm{F}'_0)} \to \mathcal{O}_k$, *le passage au quotient de* $g \mapsto g.(F_0, F'_0)$ *et commencer par décrire* $\iota \circ \bar{\varphi}$.

3. En utilisant B 4), montrer que $\mathcal{O}_k \subset \overline{\mathcal{O}}_{k-1}$.

4. En déduire l'inclusion $\bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j \subset \overline{\mathcal{O}}_k$.

5. Expliquer pourquoi, pour tout $k' \leq n$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p+p'}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à k', est un fermé de $\mathcal{M}_{n,p+p'}(\mathbb{R})$.

6. Pour tout couple (g, g') de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on associe la matrice $M_{(g,g')}$ de $\mathcal{M}_{n,p+p'}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs

$$g(e_1), \cdots, g(e_{p-1}), g(e_p), g'(e_{p+1-k}), \cdots, g'(e_{p+p'-k}),$$

   dans la base $\underline{e}$ (on concatène l'image par g de la base fixée de F_0 et l'image par g' de la base fixée de F'_0). En considérant l'application $(g, g') \mapsto M_{(g,g')}$, montrer que l'ensemble des couples (g, g') de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $\dim\big(g(F_0) \cap g'(F'_0)\big) \geq k$ est un fermé.

   On rappelle que Grassmann est à l'honneur!

7. En considérant l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ donnée par $(g, g').(F, F') = \big(g(F), g'(F')\big)$, montrer l'inclusion inverse: $\overline{\mathcal{O}}_k \subset \bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j$.