Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1-G

Algèbre

PARTIEL

6 Novembre 2014

Durée : 2h00

L'enseignant qui corrigera cette épreuve a une confiance absolue en l'honnêteté intellectuelle de ses étudiants, et par extension, en l'avenir de l'humanité. Merci de laisser cette confiance dans l'état où vous l'avez trouvée en entrant.

Exercice 1.

Soit n un entier, $n \geq 3$ et D_n le groupe diédral d'ordre $2n$. On rappelle qu'une présentation de ce groupe est donnée par $\langle r, s \,:\, r^n = s^2 = srsr = 1 \rangle$.

1. Montrer que pour tout couple (a, b) de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, il existe un morphisme f vérifiant $f(r) = r^a$, $f(s) = r^b s$. Pourquoi un tel morphisme est-il unique ? Dans la suite, on le notera $f_{a,b}$.
2. Calculer la composée $f_{a,b} \circ f_{a',b'}$, où (a, b), (a', b') sont deux couples de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Montrer qu'elle est de la forme $f_{a'',b''}$, avec (a'', b'') dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$.
3. Montrer que si f est un automorphisme de D_n, alors, on peut écrire $f = f_{a,b}$, avec $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Décrire le groupe $\mathrm{Aut}(D_n)$ comme produit semi-direct $K \rtimes_\varphi H$, en donnant explicitement K, H et φ.
5. Pour $t \in D_n$, on considère l'automorphisme intérieur γ_t de D_n, donné par $\gamma_t(d) = tdt^{-1}$. Ecrire γ_t sous la forme $f_{a,b}$, dans les cas $t = r^k$ et $t = r^k s$.
6. Décrire le sous-groupe $\mathrm{Int}(D_n)$ des automorphismes intérieurs de D_n sous la forme $K' \rtimes_{\varphi'} H'$, où K', resp. H', sont des sous-groupes respectifs de K et H.
   On distinguera les cas n pair et n impair.

Exercice 2.

1. Dans le groupe alterné $\mathfrak{A}_{n+2}$, calculer le produit $\alpha := (12i)(12j)$, où $3 \leq i, j \leq n+2$, $i \neq j$, puis $\alpha(12k)\alpha^{-1}$, où $k \notin \{1, 2, i, j\}$. En déduire que les 3-cycles $(12i)$, $3 \leq i \leq n+2$ engendrent $\mathfrak{A}_{n+2}$.
2. On note G_n le groupe présenté par $\langle x_1, \cdots, x_n \,:\, \forall i,\, x_i^3 = 1, \forall i, j,\, i \neq j,\, (x_i x_j)^2 = 1 \rangle$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $G_n \to \mathfrak{A}_{n+2}$.
3. Soit H le sous-groupe de G_n engendré par x_i, $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que l'ensemble $H \cup x_n H \cup x_n^2 H \cup x_1 x_n H \cup \cdots \cup x_{n-1} x_n H$ est stable par multiplication à gauche par les x_i, puis, que cet ensemble est G_n tout entier.
   Pour ce qui est de la stabilité par multiplication, on pourra se contenter de calculs indicatifs suffisamment convaincants.

4. Montrer par récurrence, en majorant le cardinal de l'ensemble quotient G_n/H, que G_n est isomorphe à $\mathfrak{A}_{n+2}$.
5. Montrer que l'ordre de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ est égal à celui de $\mathfrak{A}_8$.
6. Montrer l'isomorphisme de groupes $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{A}_8$, en considérant les matrices suivantes de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} Z^2 & 0 \\ I & Z \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} J_1 & I \\ I & J_2 \end{pmatrix},\ b_4 = {}^t b_2,\ b_5 = \begin{pmatrix} K_1 & I \\ I & K_2 \end{pmatrix},\ b_6 = {}^t b_5,$$

avec

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra commencer à faire deux calculs pertinents, puis dire, le classique « on a de même », puis conclure.

Exercice 3.

On cherche ici à classifier les groupes G d'ordre $147 = 7^2.3$, à isomorphisme près. On pourra admettre que si p est un nombre premier impair, et n un entier positif quelconque, alors le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

1. Montrer qu'il existe un unique 7-Sylow K et que celui-ci est distingué dans G. Montrer que K ne peut être isomorphe qu'à deux groupes classiques que l'on décrira.
2. Quel est l'ordre de $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*$? (Répondre avec précaution ; l'univers tout entier est dans l'attente !)
3. On fixe un générateur g du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*$. Décrire les morphismes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $\big((\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*, \times\big)$.
4. Montrer que le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$.
5. Montrer que toute matrice d'ordre 3 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ est diagonalisable (on pourra résoudre $X^3 - 1 = 0$ dans $\mathbb{F}_7$). En déduire que toutes les matrices d'ordre 3 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ se regroupent en cinq classes de conjugaison.
6. Conclure en trouvant au final (au plus) six classes de groupes d'ordre 147.

   On ne demande pas de montrer qu'elles sont non isomorphes entre elles, mais elles le sont ! Points d'estime à ceux qui diront pourquoi.