Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER Mathématiques et Applications

M1-ALGEBRE

EXAMEN PARTIEL

3 Novembre 2016

Durée : 2 h

Exercice 1. Soit G un groupe d'ordre p^n, avec p premier, et N un sous-groupe distingué non-trivial de G.

1. Montrer que G agit par conjugaison sur N, et que les orbites ont pour cardinal des puissances de p.
2. En déduire que N contient un élément non trivial du centre de G.

Exercice 2. Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$, avec $\alpha := i\sqrt{7}$.

1. Expliquer pourquoi tous les éléments de A peuvent s'écrire sous la forme $a + b\alpha$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner explicitement la norme ($N(z) = z\overline{z}$) d'un élément de cette forme.
2. Quels sont les inversibles de A ?
3. Trouver tous les éléments z de A tels que $N(z) \leq 4$. En déduire que 2 et $1 \pm i\sqrt{7}$ sont irréductibles.
4. En déduire que A n'est pas factoriel.
5. Méthode alternative à 4. Montrer que $A/(2) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + 1)$, puis conclure que A n'est pas factoriel.
6. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1+\alpha}{2}]$ est euclidien. (Indication : on se souvient la preuve que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.)
7. Est-ce que $\mathbb{Z}[\frac{1+\alpha}{2}]$ factoriel ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. On se propose de montrer que le polynôme

$$P = X^9 + 15X^8 - X^3 - 3X^2 + 9X + 23$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

1. Pourquoi si P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, alors, il l'est également sur $\mathbb{Q}[X]$?
2. Pour tout nombre premier p et tout polynôme Q de $\mathbb{Z}[X]$, on note $\overline{Q}_p$ le polynôme de $\mathbb{F}_p[X]$ dont les coefficients sont les résidus modulo p des coefficients de Q.

(a) Montrer que $Q \mapsto \overline{Q}_p$ définit un morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{F}_p[X]$.

(b) En déduire que si Q est un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\overline{Q}_p$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p[X]$, alors Q l'est sur $\mathbb{Z}[X]$.

3. Montrer que $X^3 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3[X]$.
4. Soit K le corps de décomposition du polynôme $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$, et $\alpha \in K$ une racine de ce polynôme.

   (a) Montrer que $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ et $\alpha \notin \mathbb{F}_4$.

   (b) Montrer que $X^4 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
5. Conclure que P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
   Indication : On pourra montrer que $\overline{P}_3 = (X^3 - X - 1)^3$, *et que* $\overline{P}_2 = (X+1)(X^4+X+1)^2$, *puis, partir sur la considération suivante : l'ensemble des degrés des polynômes irréductibles dans la décomposition de* P *forme une partition de* 9.