Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

11 Avril 2018

Durée : 2h

Question de cours. Quelles sont les orbites pour l'action de congruence $P \cdot A := PA{}^tP$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des matrices *inversibles* pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F}_q$, de caractéristique impaire ? Dites combien il y a d'orbites et quel invariant permet de les distinguer.

Exercice 1 (Structures complexes)**.** Soit N un entier naturel non nul. L'ensemble des *structures complexes* est l'ensemble

$$\mathscr{C}_N = \{J \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R}),\ J^2 + \mathrm{I}_N = 0\}.$$

1. Calculer $\det(-\mathrm{I}_N)$ en fonction de N et déduire que si $\mathscr{C}_N$ n'est pas vide, alors N est pair.

Désormais, on suppose que $N = 2n$ est pair.

2. Soit $J \in \mathscr{C}_{2n}$.
   (a) Montrer que l'addition et le produit externe suivant font de $\mathbb{R}^{2n}$ un espace vectoriel complexe :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall V \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (a + b\mathrm{i}) \cdot V = aV + bJV.$$
   On ne vérifiera que les axiomes $\lambda(U+V) = \lambda U + \lambda V$, $(\lambda+\mu)U = \lambda U + \mu U$, et $\lambda(\mu U) = (\lambda\mu)U$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $U, V \in \mathbb{R}^{2n}$.
   L'ensemble $\mathbb{R}^{2n}$ est donc doté de deux structures d'espace vectoriel, une sur $\mathbb{R}$ et une sur $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que la base canonique du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^{2n}$ est une famille génératrice du $\mathbb{C}$-espace défini à la question précédente, et en déduire que celui-ci possède une $\mathbb{C}$-base $(v_1, \dots, v_p)$.
   (c) Démontrer que la famille $(v_1, Jv_1, v_2, Jv_2, \dots, v_p, Jv_p)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$.
   (d) En déduire que $p = n$.
   (e) En déduire que J est semblable à la matrice diagonale à n blocs
   $$J_{2n} = \begin{pmatrix} J_2 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } J_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. On fait agir $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par conjugaison.
   (a) Vérifier que $\mathscr{C}_{2n}$ est stable par l'action de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
   (b) Démontrer plus précisément que $\mathscr{C}_{2n}$ est l'orbite de J_{2n}.
4. On veut montrer que le stabilisateur H de J_{2n} est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Traiter à la main le cas $n = 1$: écrire à quelles conditions une matrice (inversible ou pas)
   $$\mathrm{m} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$
   commute à J_2 et exhiber un isomorphisme entre le stabilisateur de J_2 et $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

(b) À l'aide d'un calcul par blocs 2×2, décrire le stabilisateur de J_{2n} dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

5. Démontrer enfin que le quotient $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})/H$ est homéomorphe à $\mathscr{C}_{2n}$.

Exercice 2. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r est annulée par un polynôme de degré $r+1$. Cet énoncé sera le prétexte à l'exercice qui suit.

1. **Un exemple.** Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_6(\mathbb{C})$ de rang 4. Donner les tableaux de Young possibles associés à cette matrice (on commencera par trouver le nombre de cases de sa ligne du bas). Pour chaque tableau de Young possible pour N, donner la matrice de Jordan de la classe de conjugaison de N ainsi que le polynôme minimal de N.
2. La matrice N est maintenant une matrice nilpotente de rang r dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et on suppose que son polynôme minimal est X^m, $m > 0$. Enoncez le théorème des noyaux emboîtés (avec essoufflement) et en déduire que $\ker N^{k-1}$ est strictement inclus dans $\ker N^k$ pour tout k, $1 \leq k \leq m$. Que devient cette inclusion pour $k = m+1$?
3. Montrer que $\operatorname{im} N^{k-1}$ contient strictement $\operatorname{im} N^k$. Quel est le sous-espace $\operatorname{im} N^m$?
4. En déduire que toute matrice nilpotente de rang r est annulée par X^{r+1}.
5. Soit A une matrice quelconque de rang r de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = X^k Q$ un polynôme annulateur de A avec $Q(0) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{C}^n = \ker A^k \oplus \ker Q(A)$.
6. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pourquoi ϕ stabilise les deux sous-espaces $\ker(A^k)$ et $\ker(Q(A))$? Montrer que la restriction de ϕ est nilpotente sur le premier sous-espace et inversible sur le second.
7. Exprimer le rang de $\phi \mid_{\ker A^k}$ en fonction de r et de $\dim \ker Q(A)$, puis, conclure l'assertion proposée.