Agrégation interne. Cours P. Caldero.
Algèbre et géométrie.

SILENCE DANS LES RANGS

Nous survolons les propriétés du rang en algèbre linéaire. Si on doit introduire le rang en une phrase : le rang d'une application linéaire est dimension de l'espace image d'une application linéaire ; il sert donc à mesurer la surjectivité de l'application linéaire, au même titre que le noyau sert à mesurer le défaut d'injectivité.

1 Généralités

Soit k un corps de base. Les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie sur k.

Definition 1 *Le rang d'une application linéaire u d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est donnée par*

$$rg(u) = \dim Im(u)$$

Le premier théorème fondamental est le théorème du rang qui se démontre à l'aide du théorème de la base incomplète.

Théorème 1

$$\dim Ker(u) + rg(u) = \dim E$$

Corollaire 1 *Si u est un endomorphisme alors u est injective si et seulement si u est surjective.*

Definition 2 *On définit alors le rang d'une matrice comme étant la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes.*

Proposition 1 *Soit A la matrice d'une application linéaire u, (dépendant du choix de bases), alors $rg(A) = rg(u)$.*

En algèbre linéaire, la propriété fondamentale du rang est la suivante

Théorème 2 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

On rappelle que deux matrices A et B sont équivalentes peut s'écrire $B = P^{-1}AQ$, où P et Q sont des matrices carrées inversibles.
Le théorème dit donc que si on veut calculer le rang d'une matrice, il suffit faire des opérations élémentaires sur les lignes (multiplication par P^{-1} à gauche) ainsi que des opérations

élémentaires sur les colonnes (multiplication par Q à droite) pour tomber sur une matrice dont on connait le rang, par exemple la matrice $J_r := \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont le rang est clairement r.
D'ailleur le simple fait que J_r est égale à sa transposée implique le corollaire :

Corollaire 2 $rg({}^tA) = rg(A)$

Une façon plus théorique de calculer le rang est donné par le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit A une matrice quelconque. Le rang de A est la taille maximum d'un mineur de A non nul.*

2 Rang et formes quadratiques.

Definition 3 *On définit le rang d'une forme quadratique comme étant le rang de la matrice de la forme quadratique dans une base (cela ne dépend pas du choix de la base).*

L'importance du rang des formes quadratiques vient du théorème :

Théorème 4 *(i) Si deux matrices sont congruentes alors elles ont même rang.*
(ii) Si $k = \mathbb{C}$, Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.

3 Rang et topologie.

On suppose desormais que $k = \mathbb{R}$. L'espace des matrices $n \times m$ est muni de la topologie usuelle de R^{nm}. Le théorème 3 possède un application importante :

Théorème 5 *L'ensemble des matrices $n \times m$ de rang $\leq r$ est un fermé pour la topologie des matrices.*

Corollaire 3 *Si (A_n) est une suite de matrices de rang r convergent vers une ùmatrice A alors $rg(A) \leq r$.*

Il résulte de la formule du rang que les noyaux ne peuvent qu'augmenter par passage à la limite. On dit que le rang est une fonction semi-continue inférieurement.

Discussions possibles : Le rang est fondamental en algèbre linéaire et c'est donc un objet d'étude en soi. Effectivement, la surjectivité étan un problème essentiel en mathématiques puisque directement lié au probl'eme d'existance de solutions à une équation, le rang peut être vu comme une mesure de la surjectivité d'une application linéaire.
Le rang est fondamental dans un domaine plus vaste des mathématiques : le calcul différentiel. Le calcul du rang de la différentielle en un point d'une fonction (différentiable) f permet de voir si l'image de f contient un ouvert dans un voisinage de ce point.