

## Goodies – Table de caractères de $\mathfrak{S}_6$

Le but ici est de donner la table des caractères de  $\mathfrak{S}_6$  et d'en déduire une description précise du groupe  $\text{Out}(\mathfrak{S}_6)$  des automorphismes extérieurs de  $\mathfrak{S}_6$ . On se paiera le luxe d'en déduire ses actions naturelles sur les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_6$  ainsi que sur ses caractères irréductibles.

Soit  $n$  un entier strictement positif. On rappelle qu'une partition de  $n$  est une suite d'entiers strictement positifs, que l'on pourra supposer décroissante et dont la somme est  $n$ . On sait que, pour  $n$  fixé, les partitions de  $n$  paramétrisent les classes de conjugaisons du groupe  $\mathfrak{S}_n$ . Or, le nombre de classes de conjugaison est égal au nombre des caractères irréductibles du groupe; il est donc naturel de chercher à construire un lien direct entre partitions de  $n$  et caractères irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$ .

On s'intéresse au cas  $n = 6$ .

Le but est ici, surtout, d'illustrer la notion d'induction et de s'en servir pour construire la table des caractères d'un groupe. Cependant, le choix de  $n = 6$  n'est pas anodin, puisqu'il va, dans un deuxième temps, permettre de montrer comment la table de caractères fournit une action du groupe d'automorphismes extérieurs de  $\mathfrak{S}_6$  sur les représentations du groupe.

### Partitions de $n$ et caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$

Rappelons d'abord les partitions de  $n = 6$  sous la forme de tableaux de Young, rangés selon l'ordre de Chevalley, voir [2, III-B3],<sup>1</sup> :

Chaque caractère irréductible de  $\mathfrak{S}_6$  va découler d'une action par permutations sur le quotient  $\mathfrak{S}_6/H_\lambda$ , où  $H_\lambda$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_6$  que nous allons associer à la partition  $\lambda$  de  $n$ .

**Définition :** Soit  $E_n = \{1, \dots, n\}$ . On dira qu'une partition  $\{E_n^j\}$  de  $E_n$  est de type  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$ , où  $\lambda$  est une partition de  $n$ , si les sous-ensembles  $E_n^j$  sont de cardinal  $|E_n^j| = \lambda_j$ , pour tout  $j$ , quitte à réordonner les  $E_n^j$ .

**Exemple :** Soit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_u$  une partition de  $n$ , la partition

$$P_n^0 := \{\{1, \dots, \lambda_1\}, \{\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}, \dots, \{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_k\}\}$$

est une partition de type  $\lambda$  que l'on appellera *partition standard* de  $E_n$  associée à  $\lambda$ .

On note alors  $H_\lambda$  le stabilisateur de tous les ensembles de la partition standard associée à  $\lambda$ .

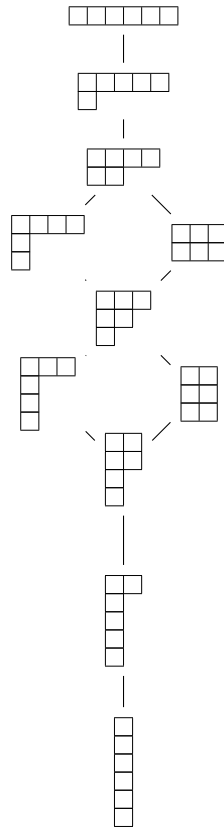
**Exemple 1 :** Pour illustrer la suite de nos propos, appuyons-nous sur l'exemple du tableau de Young correspondant à la partition  $4 \geq 1 \geq 1$ , et que l'on numérote de la façon suivante :

1	2	3	4
5			
6			

Le sous-groupe  $H_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_6$  que l'on va considérer dans ce cas précis sera alors le stabilisateur des ensembles de la partition standard  $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$  associée, c'est-à-dire, le sous-groupe des permutations qui stabilise l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  et qui fixe les éléments 5 et 6. Ce stabilisateur est naturellement isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ .

---

1. En fait, le diagramme est pris à l'envers; après avoir construit la table de caractères, on se convaincra que cet ordre-ci nous facilite la tâche.



**Exemple 2 :** Regardons maintenant l'exemple du tableau de Young correspondant à la partition  $2 \geq 2 \geq 2$ , et que l'on numérote de la façon suivante :

1	2
3	4
5	6

Le sous-groupe  $H_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_6$  est le sous-groupe des permutations qui stabilisent  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$  et  $\{5, 6\}$ . Ce stabilisateur est naturellement isomorphe à  $(\mathfrak{S}_2)^3$ .

**Remarque :** Précisons que le nom "partition" prend maintenant deux sens : le premier, dans le sens de partition d'un entier  $n$ , qui nous est familier, et le second, dans le sens de partition  $\{E_n^j\}$  de l'ensemble  $E_n$ .

**Définition d'une représentation par permutations associée à la partition  $\{E_n^j\}$  :**

On considère à présent la représentation par permutations associée à l'action naturelle de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathfrak{S}_n/H_\lambda$ . De façon équivalente, il s'agit de l'action naturelle de  $\mathfrak{S}_n$  sur les partitions  $\{E_n^j\}$  de  $E_n$  de type  $\lambda$ .

Ces actions apparaissent très naturellement, à condition de remarquer une chose : dans l'exemple 1 ci-dessus, fixer les ensembles  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{5\}$  et  $\{6\}$  revient à fixer le drapeau  $\{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; l'ensemble  $\{6\}$  s'en retrouve stabilisé automatiquement.

De même, dans l'exemple 2, stabiliser  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$  et  $\{5, 6\}$  revient à stabiliser le drapeau  $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

Aussi, *en pratique*, on ne considérera pas la première ligne du tableau de Young (en partant du haut) pour construire l'ensemble sur lequel le groupe  $\mathfrak{S}_6$  va agir.

Les actions à considérer dans chaque cas apparaissent alors naturellement : pour chaque partition  $(\lambda_i)$  de  $n = 6$  donnée, il suffira de considérer l'action par permutations sur un ensemble de drapeaux, constitué de sous-ensembles de  $E_6$ , chacun de cardinal  $\lambda_i$ , sauf le sous-ensemble correspondant à la dernière ligne du tableau de Young.

**Remarque :** L'idée sous-jacente derrière ces considérations est l'induction annoncée précédemment : l'action sur le quotient  $G/H$  fournit la représentation par permutations sur  $\mathbb{C}^{G/H}$ , qui correspond, voir [1, Exercice XI-C5], à la représentation induite  $\text{Ind}_H^G(\chi_{\text{triv}})$ .

Enfin, il reste à noter ceci : chaque nouvelle action considérée nous fournit un caractère qui s'écrit comme la somme d'un et un seul nouveau caractère irréductible (celui que l'on cherche), avec multiplicité 1, et d'une combinaison linéaire des caractères irréductibles déterminés précédemment. Ce résultat est loin d'être immédiat à démontrer.

Ce qu'il faut retenir pour le moment, c'est que pour chaque action considérée, des calculs de multiplicité pour des caractères irréductibles obtenus par récurrence, seront donc nécessaires. C'est pour cette récurrence que l'ordre sur les partitions est indispensable.

## Construction de la table de caractères de $\mathfrak{S}_6$

Sans plus attendre, voici la table de caractères du groupe  $\mathfrak{S}_6$ . On fait également apparaître dans cette table la partition de  $n = 6$  correspondant à chaque classe de conjugaison, ainsi que les tableaux de Young associés aux caractères irréductibles (selon le principe expliqué précédemment).

**Théorème .0.1.** *La table de caractères du groupe  $\mathfrak{S}_6$  est la suivante :*

$C_g$	e	(12)	(12)(34)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(45)	(123)(456)	(1234)	(1234)(56)	(12345)	(123456)
$ C_g $	1	15	45	15	40	120	40	90	90	144	120
TY											
$\chi_{\text{triv}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1
$\chi_2$	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0
$\chi_3$	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1
$\chi_4$	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0
$\chi_5$	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0
$\chi_6$	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1
$\chi_7$	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0
$\chi_8$	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0
$\chi_9$	5	-3	1	1		0	-1	-1	-1	0	1
$\chi_{10}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

**Démonstration.** Tout d'abord, on rappelle, voir [3], ou [?], que le cardinal de la classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  associée à  $\lambda$  est donnée par

$$|\mathcal{C}_\sigma| = \frac{n!}{\prod_k a_k(\lambda)! k^{a_k(\lambda)}},$$

où  $a_k(\lambda)$  est le nombre de répétition du nombre  $k$  dans la partition  $\lambda$ .

Ceci permet de retrouver tous les cardinaux des classes de conjugaison qui ont été placés dans le tableau. Par exemple, pour la colonne de (12) et de (12)(34)(56), on trouve respectivement  $\frac{6!}{4!1^4 2^1} = 15$  et  $\frac{6!}{3!2^3} = 15$ . Tiens donc !

On peut alors commencer la construction des caractères.

Le tableau de Young correspondant à la première ligne invite à considérer l'action par permutation de  $\mathfrak{S}_6$  sur l'ensemble constitué du singleton  $E_6$  lui-même ; on reconnaît alors la représentation triviale.

Le tableau de Young correspondant au caractère  $\chi_1$  invite à considérer l'action par permutation de  $\mathfrak{S}_6$  sur un élément ; on reconnaît alors la représentation naturelle, dont le caractère<sup>2</sup>  $\chi'_1$  est :

$C_g$	e	(12)	(12)(34)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(45)	(123)(456)	(1234)	(1234)(56)	(12345)	(123456)
$\chi'_1$	6	4	2	0	3	1	0	2	0	1	0

En remarquant (par un calcul, si besoin) que le caractère trivial est de multiplicité 1 dans  $\chi'_1$ , on en déduit immédiatement le nouveau caractère  $\chi_1$  décrit dans la table ci-dessus (dans la foulée, on vérifie qu'il est bien de norme 1).

Pour le caractère  $\chi_2$ , cette fois, en considérant le tableau de Young correspondant, on étudie l'action de  $\mathfrak{S}_6$  sur les paires d'éléments de  $E_6$ . Le caractère  $\chi'_2$  correspondant aux invariants de l'action est alors :

$C_g$	e	(12)	(12)(34)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(45)	(123)(456)	(1234)	(1234)(56)	(12345)	(123456)
$\chi'_2$	15	7	3	3	3	1	0	1	1	0	0

On calcule les multiplicités des caractères précédents  $\chi_{\text{triv}}$  et  $\chi_1$  dans  $\chi'_2$ , et l'on trouve

$$\chi_2 = \chi'_2 - \chi_{\text{triv}} - \chi_1.$$

D'où la ligne correspondante dans la table de caractères.

Pour trouver  $\chi_3$ , on fait ensuite agir le groupe  $\mathfrak{S}_6$  sur les drapeaux, de la forme  $\{\{1\} \subset \{1, 2\}\}$ . De même, on trouve, pour  $\chi'_3$  :

$C_g$	e	(12)	(12)(34)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(45)	(123)(456)	(1234)	(1234)(56)	(12345)	(123456)
$\chi'_3$	30	12	2	0	6	0	0	2	0	0	0

Puis :

$$\chi_3 = \chi'_3 - \chi_{\text{triv}} - 2\chi_1 - \chi_2.$$

Quant au caractère  $\chi_4$ , on considère l'action de  $\mathfrak{S}_6$  sur les ensembles à 3 éléments parmi  $E_6$  ; on trouve :

2. On rappelle au passage que le caractère d'une représentation par permutation est donnée par le nombre d'invariants dans l'action.

$C_g$	e	(12)	(12)(34)	(12)(34)(56)	(123)	(123)(45)	(123)(456)	(1234)	(1234)(56)	(12345)	(123456)
$\chi'_4$	20	8	4	0	2	2	2	0	0	0	0

Puis :

$$\chi_4 = \chi'_4 - \chi_{\text{triv}} - \chi_1 - \chi_2.$$

Et le reste de la table de caractères ?

On pourrait, de même, pour le caractère  $\chi_5$ , considérer l'action par permutation de  $\mathfrak{S}_6$  sur les drapeaux de la forme  $\{\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}\}$ . Mais, en fait, on va faire mieux ; si l'on met de côté pour le moment  $\chi_5$ , on remarque que la dualité crée une belle symétrie dans les tableaux de Young (dans le sens que les derniers tableaux de Young sont les images des précédents par dualité).

De plus, on sait que, si l'on multiplie un caractère irréductible de degré  $d$  par un caractère irréductible de degré 1, on crée un nouveau caractère, irréductible, et de même degré  $d$ . On admet alors que la multiplication par la signature  $\epsilon$  correspond à la dualité dans la théorie des tableaux de Young.

On obtient :

$$\chi_6 = \chi_4 \times \epsilon; \quad \chi_7 = \chi_4 \times \epsilon; \quad \chi_8 = \chi_2 \times \epsilon; \quad \chi_9 = \chi_1 \times \epsilon; \quad \chi_{10} = \epsilon.$$

Enfin, *quid* du dernier caractère de la table,  $\chi_5$  ? Le résultat sur orthogonalité des colonnes en fait son affaire !

□

## Illustration d'un automorphisme extérieur de $\mathfrak{S}_6$

La table de caractères de  $\mathfrak{S}_6$  permet d'illustrer la propriété suivante :

**Proposition .0.2.** *Il existe un automorphisme de  $\mathfrak{S}_6$  qui envoie les transpositions sur les triple transpositions.*

On rappelle au préalable que, si un automorphisme de  $\mathfrak{S}_n$  envoie les transpositions sur les transpositions, alors il est intérieur, et réciproquement, voir [3].

On considère donc un automorphisme qui envoie les transpositions sur les triple transpositions. Cet automorphisme, d'après la table de caractères de  $\mathfrak{S}_6$ , échange la colonne 2 et la colonne 4, et donc échange les caractères  $\chi_1$  et  $\chi_7$ , resp.  $\chi_3$  et  $\chi_6$ , resp.  $\chi_4$  et  $\chi_9$ , et enfin, stabilise les autres caractères. Plus précisément, si l'on rappelle l'action des automorphismes de  $\mathfrak{S}_6$  sur  $\text{Irr}(\mathfrak{S}_6)^3$  :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathfrak{S}_6) \times \text{Irr}(\mathfrak{S}_6) &\rightarrow \text{Irr}(\mathfrak{S}_6) \\ (\phi, \chi) &\mapsto \phi \cdot \chi = \chi \circ \phi \end{aligned}$$

on a par exemple, pour tout  $g \in G$ ,  $\chi_7(\phi(g)) = \chi_1(g)$ .

On remarque de plus que l'action de  $\text{Out}(\mathfrak{S}_6)$  sur les tableaux de Young est la même sur les lignes et les colonnes. Cela est dû à la bijection entre tableaux de Young et caractères (l'ensemble des tableaux de Young étant en bijection avec les classes de conjugaison de  $G = \mathfrak{S}_6$ , qui sont elle-mêmes en bijection avec l'ensemble des caractères, on a bien la bijection observée entre tableaux de Young et caractères).

**Remarque :** En bref, l'action du groupe  $\text{Out}(\mathfrak{S}_6)$  sur les caractères de  $\mathfrak{S}_6$  agit comme la triple transposition (17)(36)(49) du groupe  $\mathfrak{S}_{11}$ .

3. Pour obtenir une action à gauche, on peut tordre par l'inverse de  $\phi$ , mais ici, cela n'apporterait rien.

## Preuve de l'existence d'un automorphisme extérieur

On veut maintenant prouver l'existence de cet automorphisme extérieur.

Le groupe  $\mathfrak{A}_5$  agit transitivement sur ses six 5-Sylow. Cela fournit un morphisme  $\mathfrak{A}_5 \rightarrow \mathfrak{S}_6$ , non trivial (en effet, si le noyau était égal à  $\mathfrak{A}_5$ , on ne pourrait obtenir une action transitive sur 6 éléments). En dérivant ce morphisme, on obtient un morphisme non trivial, et donc injectif (puisque  $\mathfrak{A}_5$  est simple) de  $\mathfrak{A}_5$  dans  $\mathfrak{A}_6$ .

1. Commençons par observer les images des éléments de  $\mathfrak{A}_6$  par ce morphisme.
  - Une double transposition de  $\mathfrak{A}_5$  est envoyée sur un élément d'ordre de  $\mathfrak{A}_6$ ; il ne peut s'agir que d'une double transposition.
  - Un 5-cycle de  $\mathfrak{A}_5$  est envoyé sur un élément d'ordre de  $\mathfrak{A}_6$ ; il est donc envoyé sur un 5-cycle.
  - Un 3-cycle de  $\mathfrak{A}_5$ , quant à lui, peut être envoyé soit sur un 3-cycle de  $\mathfrak{A}_6$  soit sur un double 3-cycle, puisque ceux-ci sont tous deux d'ordre 3.

Pour déterminer l'image d'un 3-cycle, on considère l'action naturelle de  $\mathfrak{A}_5$  sur 6 éléments (les six 5-Sylow) par permutations. On donne alors les valeurs du caractère associé sur chaque classe de conjugaison (il suffit de compter le nombre d'invariants; si l'image d'un 3-cycle est un 3-cycle, on obtient :

$C_g$	e	(123)	(12)(34)	(12345)	(12354)
$\chi_{\text{perm}}$	6	3	2	1	1

Si l'image d'un 3-cycle est un double 3-cycle, on obtient :

$C_g$	e	(123)	(12)(34)	(12345)	(12354)
$\chi_{\text{perm}}$	6	0	2	1	1

Or, on sait que  $\mathfrak{A}_5$  agit transitivement sur ses six 5-Sylow; l'action par permutations considérée ne possède donc qu'une seule orbite.

On doit donc avoir :  $\langle \chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{perm}} \rangle = |X/\mathfrak{A}_5| = 1$ .

En calculant ce produit scalaire avec les deux valeurs possibles sur la classe des 3-cycles, on voit alors que seule la seconde possibilité permet d'obtenir 1. Ainsi, un 3-cycle est envoyé sur un double 3-cycle.

A ce stade, nous avons décrit l'action de cet automorphisme sur les classes de conjugaison. Reste à montrer qu'il est extérieur.

2. Revenons légèrement en arrière. En considérant l'action de  $\mathfrak{S}_5$  sur ses six 5-Sylow, nous avons construit un morphisme, noté  $\iota$ , de  $\mathfrak{S}_5$  dans  $\mathfrak{S}_6$ , injectif, puisque le noyau est différent de  $\mathfrak{S}_5$  (c'est un morphisme non trivial) et de  $\mathfrak{A}_5$  (en quotientant par le noyau, cela aurait supposé que deux éléments puissent agir sur six 5-Sylow de manière transitive; impossible).

Notons  $H := \iota(\mathfrak{S}_5)$ . On a alors  $|\mathfrak{S}_6/H| = \frac{6!}{5!} = 6$ .

On peut alors construire une action transitive du groupe  $\mathfrak{S}_6$  sur le quotient  $\mathfrak{S}_6/H$ , par translation à gauche. Un tel morphisme est injectif, et l'on a alors construit un automorphisme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_6 &\longrightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_6/H) \simeq \mathfrak{S}_6 \\ H &\longmapsto \text{Stab}(\bar{e}) \end{aligned}$$

On a donc  $H$ , sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_6$  (il agit transitivement sur les six 5-Sylow de  $\mathfrak{S}_5$ ), qui est envoyé sur un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_6$ , qui lui est non transitif, puisqu'il stabilise un élément : la classe  $\bar{e}$  (par définition!); l'automorphisme considéré est alors extérieur.

### Description de cet automorphisme sur les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ :

Nous avons décrit précédemment les images des classes de conjugaison du groupe  $\mathfrak{A}_5$  par le morphisme d'action sur ses six 5-Sylow. Cette action est transitive, et même doublement transitive. En effet, en se reportant aux images de chaque classe de conjugaison décrites précédemment, et en calculant la norme du caractère associé à l'action par permutations sur les 5-Sylow, on trouve :

$$\frac{1}{60} (6^2 + 20 \times 0^2 + 15 \times 2^2 + 24 \times 1^2) = 2.$$

Or, ces 5-Sylow sont les mêmes pour le groupe  $\mathfrak{S}_5$ , et comme il contient  $AG_5$ , on en déduit que le groupe  $\mathfrak{S}_5$  agit également doublement transitivement sur ses 5-Sylow.

Il s'agit maintenant de décrire, de même, les images des classes de conjugaison du groupe  $\mathfrak{S}_5$  par le morphisme d'action sur ses six 5-Sylow. Les éléments de  $\mathfrak{A}_5$  ayant déjà été décrits, il suffit d'étudier les éléments de  $\mathfrak{S}_5 \setminus \mathfrak{A}_5$ .

- Une transposition est envoyée sur un élément d'ordre 2. Elle ne peut être envoyée sur une transposition, car sinon, l'automorphisme  $\mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$  serait intérieur. Restent donc deux possibilités : une double, ou une triple transposition. Or, un automorphisme conserve la signature ; c'est donc la triple transposition qui l'emporte.
- Les 4-cycles sont envoyés vers un élément d'ordre 4 ; il peut s'agir d'un 4-cycle, ou bien du produit d'un 4-cycle avec une transposition. La conservation de la signature permet encore une fois de voir que l'image est un 4-cycle.
- Dans  $\mathfrak{S}_6$ , les éléments d'ordre 6 sont les 6-cycles et le produit d'un 3-cycle et d'une transposition. Ainsi, il y a deux possibilités pour l'image du produit d'un 3-cycle et d'une transposition dans  $\mathfrak{S}_5$ . La signature cette fois n'aidant pas, on choisit de considérer  $\langle \chi_{\text{perm}}, \chi_{\text{triv}} \rangle$  : d'après le théorème de Burnside, cette quantité est égale au nombre d'orbites de l'action par permutations sur les 5-Sylow ; cette action étant transitive, on a alors, en appelant  $x$  la valeur du caractère  $\chi_{\text{perm}}$  sur la classe de conjugaison de  $(123)(45)$  :

$$1 = \langle \chi_{\text{perm}}, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{60} (6 + 30 \times 2 + 15 \times 2 + 20 \times x + 24 \times 1).$$

On trouve alors, en réduisant cette équation,  $x = 0$ . On en déduit alors que l'image du produit d'un 3-cycle et d'une transposition est un 6-cycle.



### Cardinal de $\text{Out}(\mathfrak{S}_6)$

**Proposition .0.3.** *On a  $|\text{Out}(\mathfrak{S}_6)| = 2$ .*

On vient de voir que<sup>4</sup>  $|\text{Out}(\mathfrak{S}_6)| > 1$ .

À présent, soient  $\alpha$  et  $\beta \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ , deux automorphismes non intérieurs de  $\mathfrak{S}_6$ . On a vu précédemment que les transpositions sont envoyées sur les triple transpositions, et vice versa ; l'image d'une transposition par la composée  $\alpha \circ \beta$  est donc une transposition ; cela implique que  $\alpha \circ \beta$  est un automorphisme intérieur ; autrement dit, en considérant  $\text{Out}(\mathfrak{S}_6) \simeq \text{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\text{Int}(\mathfrak{S}_6)$ , on obtient  $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{1}$ , pour tous  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \neq \bar{1}$  (c'est-à-dire pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  deux automorphismes extérieurs). Ceci étant valable pour tous  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  non triviaux, on obtient en particulier :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{1} \\ \bar{\alpha}\bar{\alpha} = \bar{1} \end{cases}$$

ce qui nous donne alors :  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ . Autrement dit, il n'existe qu'un seul automorphisme extérieur de  $\mathfrak{S}_6$  non trivial ;  $\text{Out}(\mathfrak{S}_6)$  est bien d'ordre 2 dans  $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ .

□

---

4. Il existe au moins un automorphisme extérieur, et donc,  $\text{Int}(\mathfrak{S}_6)$  est strictement inclus dans  $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$  ; on a donc bien  $|\text{Out}(\mathfrak{S}_6)| = |\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\text{Int}(\mathfrak{S}_6)| > 1$ .



# Bibliographie

- [1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries*. Calvage et Mounet, 2017.
- [2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2*. Calvage et Mounet, 2015.
- [3] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Collection CAPES/agrégation. Éditions Ellipses, 1997.