Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Algèbre

Fiche TD 8

Cas abélien

Exercice 1 [Représentations d'un groupe cyclique]

Montrer que les représentations irréductibles du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $\rho_\omega : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $\rho_\omega(\bar{k}) = \omega^k$, où ω est une racine n-ième de l'unité.

Exercice 2 [Algèbre d'un groupe cyclique]

Soit n un entier naturel strictement positif, soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, soit g un générateur de G et soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Le morphisme d'algèbres défini par $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}G$, $X \mapsto g$ identifie $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$ à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$.

1. À l'aide du lemme des restes chinois, montrer que $A = \mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$ possède n idempotents orthogonaux e_k $(0 \leq k \leq n-1)$ avec un isomorphisme d'anneaux $e_k A \simeq \mathbb{C}[X]/(X - \zeta^k)$. Montrer que l'on a un isomorphisme de représentations :
$$\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{C}G e_k.$$
Considérer les éléments e_k de $\mathbb{C}G$ correspondant à $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ via l'isomorphisme du lemme chinois.
2. Expliciter la matrice de passage de la base $(\delta_{g^k})_{0 \leq k \leq n-1}$ à la base (e_k).
Noter que $\delta_g = \sum_k \zeta^k e_k$.

Exercice 3 [Représentations des groupes finis abéliens]

1. Montrer que toute représentation irréductible complexe de G est de dimension 1.
Toute représentation de G provient de la donnée de matrices complexes diagonalisables qui commutent entre elles. On pense donc naturellement au théorème de diagonalisation simultanée.
2. Donner une représentation de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de dimension 2 qui est irréductible sur $\mathbb{R}$.
Faire agir $\bar{1}$ par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
3. En utilisant la classification des groupes abéliens de type fini, donner une description des représentations irréductibles de G.
Commencer par le cas cyclique.

Exercice 4 [Caractères de degré 1, groupe abélien]

Montrer que si tous les caractères irréductibles d'un groupe fini G sont de degré 1, alors G est abélien.

Exercice 5 [Pourquoi faire simple ?]

En utilisant le fait que $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ est la seule décomposition de 4 en somme de carrés contenant 1^2, montrer que tout groupe d'ordre 4 est abélien.

Botanique des représentations

Exercice 6 [Table des caractères des groupes non abéliens d'ordre 8]

À la fois récréatif et jubilatoire, l'exercice qui suit montre *sans l'utilisation de la classification des groupes d'ordre* 8, que tous les groupes non abéliens d'ordre 8 ont la même table des caractères. Soit G un tel groupe.

1. Montrer que G possède au moins un caractère de degré strictement supérieur à 1.
2. En déduire que G possède quatre caractères de degré 1 et un de degré 2.
   Il suffit de résoudre l'équation $n_1^2 + \cdots + n_k^2 = 8$ (les n_i ainsi que k étant des inconnues entières strictement positives) sachant qu'un des n_i vérifie $n_i > 1$ et qu'au moins un des n_i vaut 1, correspondant à la représentation triviale.
3. En déduire que G possède cinq classes de conjugaison.
4. Montrer que le centre $Z(G)$ de G vérifie $Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   On utilise qu'un p-groupe possède un centre non trivial et que si le quotient de G par $Z(G)$ était cyclique, alors G serait abélien.
5. Montrer que les quatre représentations de degré 1 de G proviennent des caractères du quotient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   Les représentations de degré 1 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se relèvent en des représentations distinctes de degré 1 de G, via la surjection canonique.
6. Conclure que tous les groupes non abéliens d'ordre 8 ont même table des caractères.
   Il ne reste maintenant qu'à montrer que la dernière ligne de la table de G, correspondant à la représentation de degré 2, est déterminée. Elle l'est par orthogonalité de la table des caractères.
7. Voyez-vous une façon de différencier les groupes H_8 et D_4, une fois ces groupes connus, via la table des caractères ?
   L'indicateur de Frobenius-Schur fait toute la différence.

Exercice 7 [Représentations du groupe du cube]

On construit la table des caractères du groupe G des isométries positives d'un cube en quatre coups de cuillère à pot.

1. Construire, grâce à l'action de G sur les quatre diagonales du cube, un caractère irréductible de degré 3.
2. Construire, grâce à l'action de G sur les trois belles paires de faces opposées, un caractère irréductible de degré 2.

3. Construire, grâce à l'action de G sur les deux tétraèdres inscrits dans le cube, un caractère non trivial de degré 1.
4. Construire, grâce à l'action de G sur le cube, le caractère trivial.
5. Retrouver le caractère irréductible manquant comme produit de deux des caractères précédents. Pourquoi ne peut-on pas l'obtenir comme représentation par permutation ?

Algèbre du groupe

Exercice 8 Soit G un groupe fini et soit ρ une représentation complexe de G telle que son caractère χ s'annule pour tout $g \neq e$ (non neutre) de G. Montrer que le caractère χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.
On a d'une part $\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \chi(e)/|G|$*, qui est entier, puisqu'il représente la multiplicité du caractère trivial dans* ρ*. D'autre part, pour tout caractère irréductible* χ_i*, on a* $\langle \chi, \chi_i \rangle = \big(\chi(e)/|G|\big)\chi_i(e)$*. Cela donne le résultat.*

Exercice 9 Soit $G = \mathfrak{S}_3$ le groupe symétrique sur trois lettres. Expliciter l'isomorphisme entre $\mathbb{C}G$ et le produit d'algèbres $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
On part des trois représentations irréductibles V_i *de* $\mathfrak{S}_3$ *qui fournissent chacune un morphisme (de groupes) de* G *dans* $\mathrm{GL}(V_i)$*, puis, par linéarisation, un morphisme (d'algèbres) de* $\mathbb{C}[G]$ *dans* $\mathrm{End}(V_i)$*.*