

**Techniques de base en théorie des représentations**

Soit  $G$  un groupe fini et  $\rho$  une représentation complexe de  $G$  sur un espace vectoriel (complexe)  $V$ , de caractère  $\chi$ .

- Pourquoi  $\rho(g)$  est-il diagonalisable pour tout  $g$  de  $G$  ?
- Soit  $W$  une sous-représentation de  $V$  (qu'est-ce que cela signifie ?). Quel argument permet de voir que  $W$  possède un supplémentaire  $W'$  stable par  $G$  ?
- Qu'est-ce que le groupe unitaire ? Pourquoi une représentation est-elle unitarisable ?
- Comment voir qu'une représentation complexe est irréductible avec la théorie des caractères ? Comment montre-t-on ce résultat ? Donner un contre-exemple sur  $\mathbb{R}$ .
- On suppose  $\langle \chi, \chi \rangle_G = 2$ , qu'est-ce que cela signifie sur la représentation elle-même ? Idem pour  $\langle \chi, \chi \rangle_G = 4$ .
- Pourquoi a-t-on  $\dim V^G = \langle \chi_{\text{triv}}, \chi \rangle_G$  ?
- Définir ce que l'on appelle une représentation par permutations. Quel est son caractère ? Interpréter  $\langle \chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{perm}} \rangle_G$ .
- On suppose que le groupe  $G$  agit transitivement sur  $X$  et dont on tire une représentation par permutations. Interpréter l'égalité  $\langle \chi_{\text{perm}} - \chi_{\text{triv}}, \chi_{\text{perm}} - \chi_{\text{triv}} \rangle_G = 1$ .
- Comment compléter la table de caractères d'un groupe lorsqu'il ne reste qu'une seule représentation irréductible à trouver ?
- Donner des exemples d'actions de groupes qui permettent de remplir la table des caractères.
- Comment obtenir de nouvelles représentations irréductibles lorsque 1) on dispose de représentations de degré 1 ? 2) si  $\chi$  est un caractère non réel ? 3) Si l'on dispose d'un sous-groupe distingué  $H$  de  $G$  ?
- Pourquoi a-t-on  $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$  ? On suppose que  $g$  est dans la même classe de conjugaison que  $g^{-1}$ . Montrer que  $\chi(g)$  est réel.
- Comment calculer les tables de caractères de groupes abéliens finis ?
- Donner un exemple de représentation fidèle. Quel est l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de  $G$  ?
- Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  de degré  $d$ . Que peut on dire de  $g$  si  $\chi_\rho(g) = d$  ? Et si  $|\chi_\rho(g)| = d$  ?
- Quels renseignements peut-on (et ne peut-on pas) obtenir sur le groupe au vu de sa table de caractères ?