Playlists et Vidéos

Chaîne Youtube Phil Caldero

Dernière mise à jour
7 février 2023

Mode d'emploi. On trouvera ici la liste des vidéos publiques de la chaîne Phil Caldero à l'attention des agrégatifs interne ou externe, ou des amateurs libres de belles maths. Le mieux, une fois choisie la vidéo, est de taper les mots clef sur le moteur de recherche de Youtube. Par exemple, si vous voulez visionner "Compter avec les groupes vidéo 3", tapez "Phil Caldero Compter avec les groupes vidéo 3".

En rouge, on désignera ce qui concerne exclusivement l'agrégation externe. En bleu, on désignera ce qui concerne l'agrégation externe, en bordure de l'interne. Enfin, en noir, il s'agit de sujets au cœur des deux programmes.

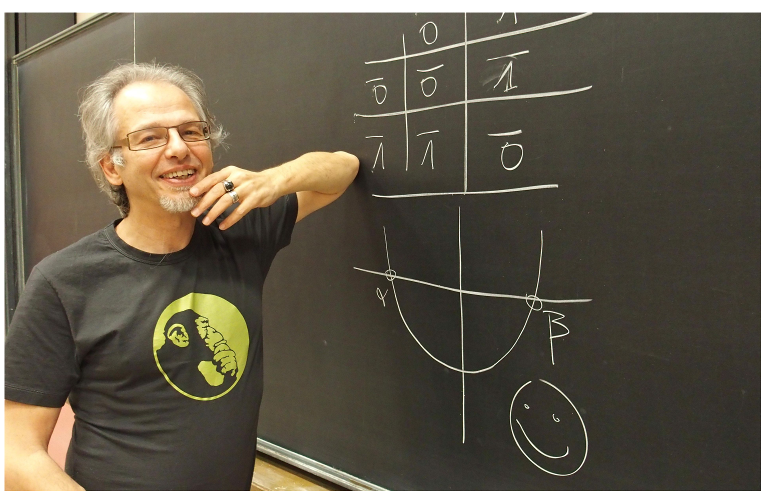

Table des matières

1 Cours- Agreg interne

1.1 Espaces vectoriels agreg interne cours 1 cours 2 (12 vidéos)

Vidéo 1 : On commence un cycle d'algèbre linéaire qui figure au coeur du programme d'algèbre de l'agrégation interne. ici, il sera question de la définition des espaces vectoriels.

Vidéo 2 : On attaque les premières définitions dans les espaces vectoriels : parties libres, génératrices.

Vidéo 3 : Cette vidéo est dédiée au lemme d'échange qui permet de prouver que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

Vidéo 4 : Dans cette vidéo on montre enfin l'existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie à l'aide du théorème de la base incomplète. On commence à traiter les problèmes sur corps finis.

Vidéo 5 : On a vu que toute partie libre peut être complétée en une base. Ce résultat a son équivalent pour les parties génératrices : on peut en extraire une base. C'est le théorème de la base extraite dont on va tirer une conséquence classique : une partie génératrice est une base si et seulement si elle a le bon nombre d'éléments : la dimension (finie).

Vidéo 6 : La plupart des espaces vectoriels que l'on considère sont en fait des sous-espaces vectoriels d'espaces de référence. On traite donc le cas des sous-espaces vectoriels, leur définition, leur caractérisation. On termine sur le fait qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie.

Vidéo 7 : Voici l'application emblématique de la dimension : elle permet une inclusion réciproque. Il s'agit d'un théorème (en fait dans le cours, d'un corollaire) qu'il faudra tout le temps avoir à l'esprit lorsque l'on traite d'une égalité de sous-espaces vectoriels. On calcule ensuite un problème de dénombrement sur corps fini.

Vidéo 8 : On définit ici les deux opérations (addition et intersection) sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie (ou pas) E. On donne une caractérisation intrinsèque de ces opérations, puis, on prouve la formule de Grassmann qui met en relation les dimensions des sous-espaces considérés.

Vidéo 9 : On commence avec des applications de la formule de Grassmann. On continue avec la définition de la somme directe de deux ou plusieurs sous-espaces, et quelques critère de sommes directes.

Vidéo 10 : On généralise le critère sur les sommes directes de deux sous-espaces à plusieurs sous-espaces. Il faut particulièrement se méfier ici d'une généralisation hasardeuse. Pour finir, on calcule le nombre de sous-espaces supplémentaires à un sous-espace fixé (sur un corps fini).

1.2 Applications linéaires agreg interne cours 3 (6 vidéos)

Vidéo 1 : On définit les applications linéaires entre deux espaces vectoriel. Après quelques motivations, on en donne une forme générale lorsque les deux espaces sont les $\mathbb{K}$-espaces $\mathbb{K}^n$. On donne un exemple fondamental d'isomorphisme avec l'application qui, à un vecteur, associe son n-uplet de coordonnées dans une base fixée.

Vidéo 2 : Ce volet parle des objets et théorème fondamentaux autour des applications linéaires : l'addition, la multiplication par un scalaire, la composition, et enfin, le théorème fondamental qui assure l'existence et l'unicité d'une application à partir de l'image de l'espace de départ.

Vidéo 3 : Dans cette vidéo, on traite de l'injectivité et de la surjectivité, qui sont les deux ingrédients de la bijectivité. On commence par faire quelques petits rappels de ces notions dans le cadre de la théorie des ensembles, puis, on regarde comment détecter l'injectivité et la surjectivité dans le cadre de l'algèbre linéaire (en dimension finie). On commence par des objets géométriques (noyau et image), puis des entiers (dimensions des noyaux et images), et enfin, on finit par des critères par l'image d'une base.

Vidéo 4 : It's play time ! On va maintenant tester nos connaissances en matière d'applications linéaires en comptant sur un corps fini tout ce que l'on a défini et étudié.

Vidéo 5 : On attaque le théorème central du cours sur les applications linéaires (qui aura un avatar encore plus puissant avec les matrices !), la formule du rang qui met en relation la dimension du noyau d'une application linéaire f de E dans F, le rang de f (la dimension de l'image) et la dimension de l'espace de DEPART. Comme corollaire, on en déduit une caractérisation de la surjectivité par la dimension du noyau et dans le cas particulier où $\dim(E) = \dim(F)$ (par exemple pour les endomorphismes), que injectif est équivalent à surjectif. On donne deux contre-exemples en dimension finie.

Vidéo 6 : Une vidéo de synthèse pour tester notre compréhension du cours 3 et toutes ces petites choses qui se cachent derrière. On calcule le nombre d'applications linéaires surjectives d'un espace vectoriel vers un autre (sur un corps fini). L'idée est de basculer, à l'aide de la formule du rang, de la surjectivité, à l'injectivité, que l'on sait faire, puisque l'on sait compter les parties libres.

1.3 Arithmétique agrégation interne (8 vidéos)

Vidéo 1 : On introduit l'arithmétique. Vu l'abstraction de ce qui viendra par la suite, il est important de faire un préambule qui permettra de se fixer les idées, et d'avoir à sa disposition un vivier d'exemples. On commence donc un premier volet introductif, où on montre des techniques de résolution d'équations diophantiennes (i.e. dans l'anneau des entiers). Ici, il sera question d'équations linéaires sur $\mathbb{Z}$, où le lemme de Gauss joue un rôle décisif.

Vidéo 2 : On continue sur le préambule motivant ! On résout ici des équations diophantiennes affines (degré 1). On se sert de la réduction modulo n, de l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver des solutions particulières et enfin du lemme de Gauss pour la solution générale sans second membre. On finit avec une équation linéaire à trois variables, car il m'a semblé que deux variables ne donnait pas un aperçu suffisamment général de la situation.

Vidéo 3 : On traite ici d'équations de degré 2 sur les entiers. Encore une fois, on constate l'importance du calcul modulaire, du lemme d'Euclide, lemme de Gauss, décomposition en irréductibles et théorèmes d'unicité dans les méthodes.

Vidéo 4 : On attaque le cours d'arithmétique avec l'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$. On suit une procédure que l'on retrouvera avec d'autres anneaux, comme par exemple l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$. On attaque les inversibles, puis la division euclidienne, et en fin la classification des idéaux. C'est un idéal principal et on en verra plus tard les implications.

Vidéo 5 : On décrit l'ensemble des idéaux de $\mathbb{Z}$ comme un ensemble ordonné (par l'inclusion) et muni de deux opérations : l'addition et l'intersection. On montre que l'on a une bijection entre les idéaux de $\mathbb{Z}$ et les entiers naturels (car $\mathbb{Z}$ est principal). L'ordre "contient" des idéaux instaure alors un ordre sur les entiers naturel qui n'est autre que l'ordre "divise". De plus, addition et intersection des idéaux fournit deux opérations sur les entiers naturels : respectivement le pgcd et le ppcm.

Vidéo 6 : Ce qui est présenté ici est un déroulement ordonné à bien connaître en arithmétique. On montre le passage important qui va de la construction d'un pgcd dans un anneau principal (ici, l'anneau est celui des entiers, mais cela pourrait être n'importe quel anneau principal) jusqu'au théorème fondamental qui stipule que tout nombre peut être décomposé de façon unique en un produit de nombres premiers. Au passage, on glanera ça et là le lemme de Gauss et son avatar, le lemme d'Euclide.

Vidéo 7 : On commence avec les premières conséquences du théorème fondamental de l'arithmétique, en particulier l'existence des p-valuations. On montre comment ces p-valuations permettent de donner un critère de divisibilité, puis des formules pour les pgcd et les ppcm. On finit sur un synopsis qui fait le point sur tous les volets théoriques de ce premier cours (copieux) en arithmétique.

Vidéo 8 : On a commencé avec des équations diophantiennes, on finit avec d'autres équations qui utilisent le lemme de Gauss, l'identité de Bezout, les propriétés caractéristiques du pgcd et du ppcm. On cherche des solutions rationnelles à une équation polynomiale et on parle de systèmes de congruence.

1.4 Dualité agreg interne (10 vidéos)

Vidéo 1 : On commence par parler par ce que l'on appelle le dual, mais surtout, la dualité (en dimension finie). On exhibe tout d'abord un tableau qui transforme un objet de l'algèbre linéaire en un objet "dual". Ensuite, on définit la "base duale" en dimension finie, on écrit deux formules qui se révèleront très pratiques dans la suite, et on fournit un contre-exemple en dimension infinie, où la "famille duale" d'une base n'est pas une base (elle est en fait uniquement libre mais non génératrice).

Vidéo 2 : On vient de voir les bases duales. Comment le changement de base duale dans E^* s'opère-t-il en fonction d'un changement de base fixé dans E ? On se rend compte que si l'on part d'une matrice de passage$P$ dans l'espace, alors on obtient une matrice de passage Q dans l'espace duale qui se trouve être, en générale, différente de P (Q est l'inverse de la transposée de P). Mais si l'on dualise une fois de plus la base duale, on obtient une matrice de passage à nouveau égale à P. Ceci permet de voir qu'il y a un isomorphisme indépendant d'une base choisie entre un espace E et son bidual.

Vidéo 3 : On donne deux applications de la dualité, une à la formule d'interpolation de Lagrange, et une autre à la formule de Taylor polynomiale. On montre que ces deux formules découlent d'une démarche standard impliquant la recherche de bases duales l'une de l'autre.

Vidéo 4 : On discrétise la formule de Taylor pour obtenir une formule générale qui calcule la somme $P(0) + P(1) + ... + P(m)$ pour tout polynôme P. On ne se prive pas d'utiliser la dualité.

Vidéo 5 : On étudie maintenant la dualité des sous-espaces vectoriel pour aboutir à la notion d'orthogonal d'un sous-espace (attention, cet orthogonal doit être vu dans le dual !). On donne la dimension de cet orthogonal, puis, on étudie la dualité des opérations sur les sous-espaces vectoriels.

Vidéo 6 : On introduit les hyperplans comme l'orthogonal d'une droite. Si une droite est un sous-espace non nul ayant un minimum de degrés de liberté, un hyperplan peut être vu comme un sous-espace ayant un minimum de contraintes. On discute les sous-espaces comme intersections d'hyperplans, ce qui revient à obtenir un sous-espace par son équation cartésienne.

Vidéo 7 : Dans cette vidéo, on présente la transposée d'une application linéaire. Même si au final, elle correspond à la banale transposée d'une matrice, cette notion abstraite de transposée d'application linéaire demande une certaine habileté dans le maniement. On prouve que la transposée fournit une bijection linéaire entre les espaces $L(E, F)$ et $L(F^*, E^*)$.

Vidéo 8 : On montre ici que la transposée, qui envoie bijectivement l'espace $L(E, F)$ sur $L(F^*, E^*)$,envoie les injectifs sur les surjectifs et inversement, les noyaux sur les images. Ce qui nous permet d'achever le dictionnaire de la dualité que nous avions mis en introduction du cours 5.

Vidéo 9 : On jongle ici avec le bidual pour montrer que la transposée est involutive. Mais si f est dans l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires, la transposée de sa transposée est dans $L(E^{**}, F^{**})$. Que signifie donc l'égalité entre deux éléments qui n'appartiennent pas au même ensemble ? On va essayer d'expliquer cette subtilité. Ceux qui ne sont pas sensibles au concept alambiqué de bidual pourront se contenter de constater que la transposée possède une version matricielle beaucoup plus pratique.

Vidéo 10 : On fait le point sur des applications de la dualité dans le programme et les développements de l'agreg (interne ou externe). On trouvera des applications aux polynômes, aux matrices, en analyse, topologie, et bien sûr dans le cadre des formes quadratiques.

1.5 Matrices agreg interne (6 vidéos)

Vidéo 1 : On introduit enfin les matrices, comme objet de calcul au service des applications linéaires. Pour l'instant on observe les liens entre matrices et applications linéaires, mais en mettant l'accent sur le fait que ces liens dépendent de choix de bases. En même temps on définit les coordonnées (en colonne) des vecteurs dans une base, et en ligne des formes linéaires dans la base duale.

Vidéo 2 : On discute des opérations sur les matrices, l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication de deux matrices (multipliables), le tout, en lien avec ce que ces opérations informent sur des opérations dans le monde des applications linéaires.

Vidéo 3 : On définit deux involutions sur les matrices, tout d'abord la transposée et ensuite l'inversion des matrices (carrées inversibles !). On regarde à quoi correspond ces deux inversions dans le monde des applications linéaires (ou des endomorphismes).

Vidéo 4 : On présente ici les matrices de passage comme des matrices de l'application linéaire (en fait l'endomorphisme) identité avec pour base de départ la nouvelle base et pour base d'arrivée l'ancienne base. On montre que cette définition permet de retrouver très facilement toutes les formules sur les matrices de passage.

Vidéo 5 : On discute et on prouve ici l'incontournable théorème du rang qui dit que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Vidéo 6 : On finit en beauté en calculant le nombre de matrices de taille (m, n) de rang r sur un corps fini de cardinal q. On le fait par application systématique du lemme du Berger et en suivant la preuve du théorème du rang.

1.6 Déterminant (8 vidéos)

(forme n-linéaire alternée, unicité existence, multiplicativité, conséquences, mineurs et caractérisation du rang, formule de l'inverse par la comatrice, forme volume, développement de Laplace et formule de Binet)

Vidéo 1 : On va parler de déterminants dans une série de vidéos. A travers les résultats successifs, on voit comment le déterminant, qui démarre comme un calcul un peu pataud sur une matrice carrée, acquiert ses titres de noblesses. Le but de cette playlist est de fournir les clefs d'une leçon sur le déterminant, tout en préparant le prochain cours sur la réduction. Ici, on montre le théorème principal du déterminant en insistant sur l'unicité d'une fonction vérifiant des propriétés simples, plutôt que sur sa formule explicite.

Vidéo 2 : On prouve et on illustre le théorème principal d'existence et d'unicité du déterminant.

Vidéo 3 : On a montré que l'ensemble des applications de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui sont à la fois n-linéaires et alternées sont toutes proportionnelles au déterminant (et réciproquement). On montre plusieurs conséquences pratiques et théoriques de ce résultat : déterminant des matrices triangulaires, triangulaires par blocs, invariance par transposition du déterminant. Mais c'est surtout la multiplicativité du déterminant qui aura des conséquences profondes sur la suite du cours d'algèbre linéaire.

Vidéo 4 : On observe dans cette vidéo les conséquence de la multiplicativité du déterminant : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ceci implique la stabilité par conjugaison du déterminant, mais aussi le fait que le déterminant est capable de déceler si un système forme ou non une base ; d'où son nom amplement mérité. Mieux, l'invariance par conjugaison permet d'élever le rôle du déterminant : on peut définir le déterminant d'un endomorphisme indépendamment d'un choix de base. Enfin, définit la notion de mineur et on énonce la formule qui donne explicitement l'inverse d'une matrice inversible en fonction de la transposée de la comatrice. Elle sera prouvée dans la prochaine vidéo.

Vidéo 5 : On attaque la preuve de la formule explicite de l'inverse d'une matrice (inversible). On étudie ensuite les systèmes de Cramer.

Vidéo 6 : Voici une preuve d'un résultat sur le déterminant qui aura de multiples (mais bénéfiques) conséquences. Le rang d'une matrice (rectangulaire, soyons fous) est égale à la taille maximale d'un mineur non nul. On illustre ensuite le déterminant dans sa maîtrise des contraintes : il peut donner l'équation d'une droite, vectorielle, affine, et même l'équation d'un cercle. On pourrait continuer avec les coniques mais on s'arrêtera là.

Vidéo 7 : Une petite vidéo presque simpliste sur le déterminant comme forme volume.

Vidéo 8 : On va parler sans preuves de généralisations des résultats classiques sur le déterminant. Tout d'abord le développement par rapport à une colonne (ou une ligne) se généralise en développement de Laplace ou développement par rapport à une famille de colonnes (je me souviens qu'en math sup, j'avais intuité ce résultat mais n'ayant pas le sens de l'effort à l'époque, la rencontre avec la preuve ne s'était pas faite). Mais le résultat le plus important est la formule de Binet (qui généralise la multiplicativité du déterminant lorsque l'on fait le produit de deux matrices rectangulaires). On parle ensuite un peu trop pour certains et pas assez pour d'autres) de l'importance de cette formule en théorie des représentations et en géométrie algébrique.

1.7 Réduction – polynômes d'endomorphisme (7 vidéos)

Vidéo 1 : On commence un nouveau cours d'agrégation interne sur la réduction. Tout d'abord avec une partie motivation, histoire de comprendre où l'on va à partir de ce que l'on sait déjà. On rappelle donc brièvement ce que l'on a fait avec les applications linéaires et leurs matrices, histoire de lancer le programme.

Vidéo 2 : On commence par définir les polynômes d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. Ce ci est défini comme un morphisme d'algèbre allant de l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[X]$ vers l'algèbre des endomorphismes de E. Ce morphisme définit, d'une part, l'algèbre des polynômes de l'endomorphisme u, et d'autre part, le polynôme minimal de u, vu comme générateur de l'idéal noyau.

Vidéo 3 : On attaque la preuve du lemme des noyaux, qui peut être vu comme un avatar de l'identité de Bezout (et finalement l'arithmétique des polynômes) dans la géométrie de l'espace E "muni de l'endomorphisme u".

Vidéo 4 : En mathématiques, on est toujours confronté au choix de la théorie et de la pratique. Le polynôme minimal est un polynôme annulateur (d'un endomorphisme u), plutôt du côté de la théorie. En revanche, le polynôme caractéristique est un polynôme plus facilement calculable par sa définition et également annulateur par Cayley-Hamilton. Ses racines sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Vidéo 5 : On prouve ici le théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnon.

Vidéo 6 : On fait le point sur les propriétés du polynôme caractéristique. Degré, indépendance du corps, divisibilité par le polynôme minimal μ et divise μ^n.

Vidéo 7 : On a montré que le polynôme caractéristique était "coincé" entre le polynôme minimal et une puissance (égale à la dimension de l'espace) du polynôme minimal. On en donne une preuve alternative instructive lorsque le corps est le corps des complexes (ou un corps algébriquement clos). On en déduit ensuite le polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme restreint aux sous-espaces caractéristiques.

1.8 Polynômes (7 vidéos)

Vidéo 1 : On définit ici l'anneau des polynômes $A[X]$ (ou $\mathbb{K}[X]$) sur un anneau intègre unitaire A (ou sur un corps $\mathbb{K}$). On en donne une "base", on étudie les propriétés du degré, l'injection naturelle de A dans $A[X]$, et enfin, cette spécificité de l'anneau de polynôme : le morphisme d'évaluation.

Vidéo 2 : On étudie l'arithmétique de l'anneau $K[X]$. Tout commence avec la notion de degré qui permet de définir un division euclidienne. A partir de là tout s'enchaîne : l'anneau $K[X]$ est principal, et donc factoriel. On étudie ensuite les anneaux quotient de $\mathbb{K}[X]$ par un idéal (forcément principal) et on montre que si P est non nul, $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension $\deg(P)$.

Vidéo 3 : On introduit le problème de trouver des racines d'un polynôme de $A[X]$. Cette vidéo est juste un balbutiement sur la nature arithmétique de la recherche de racine : un polynôme qui possède une racine fixée a est forcément multiple de $(X-a)$. Lorsque P annule plusieurs racines distincts a_i, alors P est multiple du produit des $(X-a_i)$.

Vidéo 4 : On étudie la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions polynômes en prenant soin de la distinguer de la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes. Cette distinction se fait à l'aide d'un morphisme d'algèbres entre les deux (de la seconde vers la première). Si le corps $\mathbb{K}$ est infini, alors le morphisme est iso et on peut confondre les deux algèbres. On fait l'étude lorsque le corps $\mathbb{K}$ est fini où l'on exhibe le noyau du morphisme.

Vidéo 5 : On introduit un outil majeur pour comprendre le PGCD de deux polynômes P et Q : le résultant. Pour cela, on introduit le résultant comme le déterminant de la matrice d'une application linéaire qui est iso si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. L'avantage d'avoir un tel critère de primalité entre P et Q par un déterminant est de pouvoir décliner le résultat dans des extensions, mais surtout dans des quotients si P et

Q sont à coefficient dans un anneau. On fait également des petits calculs de discriminants en degré 2 et 3.

Vidéo 6 : On commence ici à s'intéresser aux relations coefficients/racines. On introduit de façon naturelle la notion de polynôme symétrique élémentaire et on énonce, sans le prouver, pour de sombres raisons d'hygiène corporelle, le théorème fondamental de polynômes symétriques : tout polynôme symétrique de $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ s'écrit de façon unique comme polynôme à coefficient entier des polynômes symétriques élémentaires. On illustre ce théorème sur un exemple avec la somme s_2 de Newton avant d'attaquer les identités de Newton dans une prochaine vidéo.

Vidéo 7 : On prouve les identités de Newton qui fournissent la somme de Newton s_k par récurrence en fonction des polynômes symétriques élémentaires à n variables. Tout d'abord pour $k = n$ à l'aide de la matrice compagnon, puis pour k plus petit que n et k plus grand que n à l'aide de deux astuces classiques. Pour finir, on résout un "système symétrique" à trois variables.

1.9 Réduction-Diagonalisation

Vidéo 1 : Voici la suite du cours sur la réduction. On étudie les matrices dites diagonalisables et on donne tous les critères classiques de diagonalisabilité, allant des critères géométriques aux critères, plus efficaces, qui impliquent les polynômes.

Vidéo 2 : On présente les grands classiques des applications des critères polynomiaux de la diagonalisabilité. 1) l'induit d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, 2) la diagonalisation simultanée, 3) diagonalisabilité des endomorphismes de multiplication par une matrice.

Vidéo 3 : On tente ici de définir des fonctions "inverses" sur les matrices, comme la racine k-ième, le logarithme... On se rend compte que même si ces fonctions existent bien sur $\mathbb{C}$, elles ne sont pas forcément définissables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La diagonalisabilité nous permet de le faire à l'aide de polynômes interpolateurs de Lagrange. Dans le cas non diagonalisable, on s'en sort sur un ouvert, en utilisant la décomposition de Dunford et en remplaçant astucieusement les séries de Taylor par des polynômes en une matrice nilpotente.

1.10 Réduction-trigonalisation

Vidéo 1 : On donne l'analogue des critères de diagonalisation dans le cadre de la trigonalisation sur un corps $\mathbb{K}$. On a bien entendu le critère par le polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, mais aussi un critère plus fort par l'existence d'un polynôme annulateur scindé. Enfin, un critère, géométrique est le bienvenu. Il se fera par l'existence d'un drapeau complet stable.

Vidéo 2 : On donne des raffinements et des applications à la trigonalisation. Tout d'abord, le critère du polynôme annulateur scindé, et comme application la trigonalisation simultanée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent. Nous passons ensuite à une jolie application qui peut être vue comme un "Cayley-Hamilton à plusieurs variables".

Vidéo 3 : On ouvre un volet sur les applications de la trigonalisation et de la trigonalisation simultanée (pour deux matrices trigonalisables qui commutent). On montre que le spectre du la puissance est la puissance du spectre, et que l'on a les mêmes commutations du langage avec l'exponentielle... On montre ensuite une version plus fine de la trigonalisation : si A est une matrice trigonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaire à spectre singleton. La taille d'un bloc associé à une valeur propre est la multiplicité algébrique de la valeur propre. C'est la porte ouverte sur la décomposition de Dunford.

1.11 Réduction et invariants de similitude

Vidéo 1 : On a collecté suffisamment de résultats généraux pour comment une série d'exercices à thème. On commence ici avec le thème des matrices semblables On va donc passer par ce que l'on appelle les invariants de similitudes. Mais, contrairement au cas des matrices équivalentes où tout était résolu avec le rang, les choses ne sont pas simples... On peut tout de même voir dans certains cas que deux matrices ne sont pas semblables, mais on mesure en même temps la faiblesse de nos critères. Patience...

Vidéo 2 : On commence avec un exercice qui permet de faire un petit tour du domaine en matière d'invariants de similitude pour déterminer si deux matrices sont semblables ou non. On fait ensuite le point sur les invariants partiels (polynôme caractéristiques, minimaux et autres), et les invariants totaux (dimension des noyaux emboîtés) qui permettent d'analyser la situation.

1.12 Réduction et formes normales

Vidéo 1 : On présente différentes formes normales pour les classes de similitudes. Formes diagonales, formes diagonales par blocs de Jordan, formes par matrices de compagnon. Ce qui caractérise une "forme normale" est sa simplicité, mais surtout l'unicité d'un élément de cette forme dans une classe. On résout ensuite un exercice de dénombrement des classes de similitude sur corps fini qui illustre notre propos.

1.13 Equations matricielles

Vidéo 1 : On va commencer une petite série sur les équations matricielles, vue comme une application classique de la réduction. On veut résoudre sur un exemple (qui se généralise facilement) d'équation de type $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme scindé simple sur un corps $\mathbb{K}$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On voit que l'ensemble des solutions est une réunion de classes de similitude, que l'on cherche à caractériser par leurs formes normales. On pose ensuite le même problème dans le cas Q scindé, amis non simple, ce qui nous oblige à faire appel aux réduites de Jordan. En appendice, on montre comment calculer le nombre de classes de similitude de l'ensemble solution en faisant appel aux séries génératrices.

Vidéo 2 : Après avoir résolu une équation matricielle basée sur un polynôme annulateur scindé, on attaque le plus délicat problème d'un polynôme non scindé. Pour simplifier, nous travaillons dans R. Les méthodes précédentes nous ont permis de résoudre le problème dans $\mathbb{C}$, mais comment obtenir les solutions sur R ? Le résultat repose sur une propriété essentielle de la réduction : deux matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables. On a le même résultat en remplaçant $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $(\mathbb{K}, \mathbb{L})$ où $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$.

Vidéo 3 : On montre ici quelques techniques (non exhaustives) pour trouver les racines k-ièmes d'une matrice B, lorsque cela est possible. On se ramène grâce au lemme des noyaux au cas où le spectre de B est singleton. Si B est nilpotente, il n'y a pas toujours de solution, mais si B est inversible, on trouve toujours une solution à l'aide d'un lemme qui permet de relever le développement de Taylor de $(1+x)^{1/k}$ en 0 en une expression polynomiale. On finit ce volet concernant les équations matricielles en indiquant à qui veut bien l'entendre, le bon cadre pour le problème : la théorie des représentations de carquois. Errata : il faut lire $(1+x)^{1/k}$ au lieu de $(1+x)^{1/n}$ dans la vidéo, puis mettre l'égalité à la puissance k.

Vidéo 3bis : Après une petite typo dans la vidéo précédente, on revient sur ce petit lemme qui permet de passer d'un développement de Taylor, sur $\mathbb{R}$, à une formule analogue au niveau matriciel. On va même un peu plus loin, si on sait que l'exponentielle fournit une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur les matrices unipotentes, on obtient que des jolies formules d'inversion sur les matrices (racines k-ièmes, logarithmes).

1.14 Réduction et topologie

Vidéo 1 : On prouve le théorème d'équivalence des normes : deux normes définissent la même topologie. Ou, dit autrement, toute boule ouverte pour une norme contient une boule ouverte pour l'autre norme (et inversement). Donc, en théorie, on pourra parler de topologie normique sans préciser le choix de la norme. Et en pratique, on pourra selon le type de problème poser, choisir la norme qui nous convient le mieux.

Vidéo 2 : On prouve le théorème d'équivalence des normes : deux normes définissent la même topologie. Ou, dit autrement, toute boule ouverte pour une norme contient une boule ouverte pour l'autre norme (et inversement). Donc, en théorie, on pourra parler de topologie normique sans préciser le choix de la norme. Et en pratique, on pourra selon le type de problème poser, choisir la norme qui nous convient le mieux.

Vidéo 3 : On tente ici de motiver les troupes en expliquant pourquoi la topologie est utile à la réduction. Suites géométriques de matrices, méthodes de Newton pour la résolution d'équations, définition de fonctions analytiques, preuves de propriétés de type algébrique par restriction à une partie dense, caractérisation topologiques de propriétés liées à la réduction. On donne aussi des contre-exemples au théorème d'équivalence des normes (corps non complet, dimension infinie).

Vidéo 4 : Après avoir défini la topologie ambiante, on commence les premières avancées dans l'outil topologique pour la réduction. On commence tout d'abord avec le théorème fondamental qui dit qu'en dimension finie toute forme linéaire est continue. Ce théorème va va nous permettre d'étudier un par un les invariants utilisés dans la réduction sous l'angle aigu de la continuité. Le déterminant, la trace, le polynôme caractéristique, fournissent des fonctions continues. En revanche, le rang est semi-continu inférieurement, ainsi que le polynôme minimal (pour la relation divise).

Vidéo 5 : On attaque le premier morceau : l'étude générale de la suite géométrique (A^m) où A est une matrice carrée complexe. On tombe comme on pouvait s'y attendre à une condition sur le spectre, avec une condition particulière pour la valeur propre 1.

Vidéo 6 : On finit ce volet "réduction et topologie" sur un florilège d'applications (on renvoie l'internaute aux livres Carnet de Voyage en Analystan et Carnet de Voyage en Algébrie pour des énoncés et des preuves précises) allant des suites géométriques de matrices, suites linéaires récurrentes d'ordre k, suites homographiques, théorème de Perron-Frobenius, application de la densité de GL_n, des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$.

1.15 Cours 12 agreg interne : matrices hermitiennes

Vidéo 1 : On donne des exemples célèbres de matrices normales : matrices hermitiennes, antihermitiennes, unitaires et leur équivalents réels. On fait ensuite le point sur la façon dont les matrices hermitiennes et antihermitiennes généralisent la partie réelle et imaginaire...

Vidéo 2 : On introduit, dans le cadre d'un espace hermitien, la notion d'adjoint d'un endomorphisme. On montre en préambule l'existence et l'unicité d'un tel adjoint, puis, que dans une base orthonormée (ou unitaire), la matrice de l'adjoint est la trans-conjuguée de la matrice de l'endomorphisme de départ. On prouve ensuite le théorème des endomorphismes normaux qui stipule qu'un endomorphisme est diagonalisable en base orthonormé si et seulement si il commute avec son adjoint.

Vidéo 3 : On donne des exemples célèbres de matrices normales : matrices hermitiennes, antihermitiennes, unitaires et leur équivalents réels. On fait ensuite le point sur la façon dont les matrices hermitiennes et antihermitiennes généralisent la partie réelle et imaginaire...

1.16 Cours 13 agreg interne : Géométrie affine

Vidéo 1 : Voici une introduction à la géométrie affine dans le cadre de l'agrégation. On commence par s'acclimater, voire, se rassurer, avec une mise en relation entre les objets de la géométrie affine et leurs homologues en géométrie vectorielle.

Vidéo 2 : L'axiomatisation de la géométrie affine est plutôt simple, mais on peut l'aborder de deux manières. Une première axiomatisation "d'autorité", consiste à définir une application qui a un bipoint associe un vecteur, puis une définition des transformations affines. Mais on lui préférera la définition par les actions simplements transitives d'un espace vectoriel. Dans ce cadre, les notations et surtout, la définition des transformations affines, sont plus naturelles.

Vidéo 3 : Pour comprendre l'affine, on fait référence à nos connaissances du vectoriel, et ce via la bijection (qui, à v, associe $A+v$) que l'on obtient entre un espace vectoriel et un espace affine associé. Maintenant, pour comprendre une application affine f, il est pratique d'avoir un point A invariant, c'est-à-dire tel que $f(A)=A$, car on pourra identifier ainsi f à un endomorphisme phi de l'espace. Or, l'existence d'un point invariant est lié à la réduction (1 est-il dans le spectre de ϕ ?). Nous voilà revenu dans notre domaine de connaissance !

Vidéo 4 : On vient de voir que si l'endomorphisme associé ϕ à une application affine f ne voit pas 1 parmi son spectre, alors f possède un unique point invariant. Si on note A ce point invariant, la bijection b entre l'espace vectoriel E et l'espace affine muni du point A vérifie $f = b \circ \phi \circ b^{-1}$, et donc, finalement, on peut assimiler f et ϕ, ce qui est bien agréable. Malheureusement, on va devoir étudier les isométries qui ont souvent 1 parmi leur spectre. Il va donc falloir composer des applications affines avec invariant avec des translations. On commence donc par une digression sur la loi rond et surtout, sa représentation matricielle en affine.

Vidéo 5 : On prouve le théorème principal de ce cours : le théorème de décomposition réduite qui donne une condition générale pour qu'une application affine se décomposition unique en une translation (vérifiant certaines hypothèses) et une application affine à point fixe. Ce théorème est la clef pour passer de problèmes affines au monde plus domestiqué de la réduction des endomorphismes.

1.17 Normes, boules et stricte convexité

Vidéo 1 : On étudie le problème de stricte convexité des normes sur un espace vectoriel. On montre que l'axiome de stricte convexité correspond à un problème de stricte convexité des boules. On fournit ensuite un petit outillage pour montrer qu'une norme est strictement convexe.

Vidéo 2 : Nous étudions la distance d'un point à un fermé F. On commence dans le cadre où F est un hyperplan affine, une sphère, un fermé quelconque, puis, un fermé convexe dans le cadre d'une norme strictement convexe.

Vidéo 3 : On peut maintenant dans ce troisième volet prouver un théorème de séparation qui dit que si F est un fermé convexe et M un point hors de F, on peut trouver un hyperplan H qui les sépare, c'est-à-dire, un hyperplan qui définit deux demi-espaces ouverts H^+ et H^- tels que x soit dans H^+ et F inclus dans H^-.

1.18 Composée d'isométries planes

Vidéo 1 : Un petit compte-rendu (debriefing, ça parle plus peut-être ?) sur la composée d'isométries planes.

Vidéo 2 : Quelques petits exercices de construction d'éléments caractéristiques d'isométries obtenues par composée de deux isométries. L'histoire de vérifier que la vidéo 1 a été bien digérée.

1.19 Cours 14 agreg interne : Géométrie affine euclidienne

Vidéo 1 : On attaque la géométrie affine euclidienne. Après les petites définitions d'usage, on montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même qui laisse invariante la distance euclidienne est nécessairement une application affine. Afin d'étudier ces applications, dites isométries affines, nous allons commencer par montrer que leur endomorphismes associés, c'est-à-dire les isométries vectorielles, vérifient la propriété demandées pour obtenir la décomposition réduite.

Vidéo 2 : On va classifier les isométries affines du plan euclidien. On commence bien entendu par les isométries vectorielles, en mettant l'accent sur l'étude de la valeur propre 1.

Vidéo 3 : On attaque maintenant la classification en dimension 3. Au programme, symétries glissées et vissages qu'il est bon de connaître. Un rapide coup d'oeil à la dimension n nous convaincra que la classification n'est pas beaucoup plus difficile !

Vidéo 4 : Voici un exercice classique à l'oral durant une leçon sur les isométries du plan et de l'espace : la construction des éléments caractéristiques d'une symétrie glissée composée de trois symétries orthogonales par rapport à trois axes du plan euclidien. Présenté par Antoine.

1.20 Cours 14 agreg interne : Géométrie affine, barycentres et convexité

Vidéo 1 : Voici un point de vue fécond sur la géométrie affine. On définit la notion de barycentre d'une famille finie de points, et les propriétés d'usage (homogénéïté, associativité). On travaille sur le corps des réels et on définit un ensemble convexe comme un ensemble stable par barycentres positifs, ce qui revient à dire, stable par segments. On montre qu'une application de l'espace affine dans lui-même est une application affine si et seulement si elle respecte la notion de barycentre. Ce théorème prouve que la convexité est bien au coeur de la notion d'espace affine (réel).

Vidéo 2 : On définit les points extrémaux E_X d'une partie convexe X de l'espace affine (réel). On montre que si g est un élément du groupe affine tel que $g(X) = X$, alors

$g(E_X) = E_X$. Ceci va nous aider à comprendre les groupes d'isométries.

1.21 Théorie des représentations (19 vidéos)

(Théorie des représentations, construction d'une table de caractères, le cas S_4, toutes les interprétations des irréductibles de S_4)

Vidéo 1 : Un mini-cours en théorie des représentations complexes de groupes finis. On commence par tester sans outil préalable les représentations de petits groupes finis. Ce préambule est essentiel pour comprendre ensuite ce que l'on fera une fois la théorie assimilée.

Vidéo 2 : On continue avec l'étude "à la main" de la théorie des représentations. rien de tel que le système D pour forger un "caractère". On passe au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui nous permet de comprendre ce qui se passe pour tout groupe cyclique, puis le premier groupe non abélien S_3.

Vidéo 3 : On définit les représentations, les morphismes de représentations, et on montre le théorème de Maschke.

Vidéo 4 : On s'attaque à la classification des représentations d'un groupe. Par Maschke, on voit qu'il suffit de trouver toutes les représentations irréductibles. Elles se trouvent toutes dans la représentation dite régulière du groupe, qui est un cas particulier de représentation par permutation.

Vidéo 5 : On prouve ici le théorème d'orthonormalité des caractères avant d'en découvrir les multiples corollaires.

Vidéo 6 : On donne ici les conséquences théoriques du résultat de Schur qui dit que les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe. On va voir que le caractère caractérise la représentation à isomorphisme près.

Vidéo 7 : Après avoir vu les conséquences théoriques du théorème de Schur sur la base unitaire des caractères, nous en découvrons les côtés pratiques avec tout un univers de petites recettes pratiques qui contribuent au bonheur et à l'harmonie dans la belle algèbre.

Vidéo 8 : Un préambule important avant d'attaquer la construction des tables de caractères : comment tirer parti d'une action de groupe pour en extraire un caractère irréductible qui figurera sur une ligne du tableau ?

Vidéo 9 : On commence à construire des tables de caractères. Pour se mettre en jambes : la table du groupe cyclique et celle du groupe symétrique S_3.

Vidéo 10 : La table de caractères du groupe S_4 a la taille parfaite pour être présentée en 15 minutes un jour d'oral. On va donc passer le temps qu'il faut pour l'étudier sous plusieurs aspects. Voici pour commencer une construction de la table de S_4 telle qu'elle se généralise à S_n (avec un peu plus d'effort, certes, mais l'idée, due à Frobenius, reste la même). Scoop : on n'utilise même pas la connaissance préalable de la signature qui, dans cette construction provient de la dualité dans les partitions.

Vidéo 11 : On commence à donner un sens plus empirique à toutes les représentations irréductibles de S_4. Action de groupes et tensorisation par la signature sont les mots clef.

Vidéo 12 : Cette fois on réinterprète la table de caractères de S_4 en termes géométriques. Pour cela, on réalise S_4 d'une part comme groupe d'isométries du tétraèdre régulier, d'autre part comme groupe d'isométries positives du cube.

Vidéo 13 : On attaque une nouvelle série où l'on part de la table de caractères du groupe et où on en trouve des explications. Après un petit briefing sur le schéma général de ces applications dans divers domaines, on regarde sur des exemples où l'on calcule des multiplicités de représentations irréductibles dans une représentation donnée.

Vidéo 14 : On continue des exemples géométriques où il fait sens de décomposer une représentation en irréductibles. Un, avec les quadrilatères du plan, muni de l'action cyclique, et un autre, avec l'action des rotations du cube sur des faces.

Vidéo 15 : On prépare une petite extension du lemme de Schur dans le cas où la représentations n'est pas nécessairement irréductible mais seulement sans multiplicité. Cela va nous permettre par la suite (vidéos 16 et 17) de présenter de l'analyse harmonique discrète (mais non moins élégante !)

Vidéo 16 : On présente ici une version du théorème de Thébault par la théorie des représentations. La construction d'un carré à partir d'un parallélogramme peut se comprendre facilement si l'on voit cette construction comme un morphisme de représentations dont l'image est l'espace des carrés par une version modifiée du lemme de Schur vue dans la vidéo précédente. Le théorème de Napoléon est également discuté sous le même angle de l'analyse harmonique.

Vidéo 17 : On termine ce petit volet sur l'analyse harmonique avec l'exemple classique de A.A. Kirillov déjà présenté dans la vidéo 14. Il s'agit d'un exemple simple permettant d'indiquer comment la théorie des représentations s'est introduite dans la physique, liée aux transformations linéaires conservant une certaine structure.

Vidéo 18 : On attaque maintenant un nouveau volet sur ce que disent les tables de caractères de G sur le groupe fini G. Il se trouve que l'on va pourvoir retrouver tous les sous-groupes distingués de G. On regardera dans une prochaine vidéo des sous-groupes distingués particuliers comme le centre et le groupe dérivé.

Vidéo 19 : On montre de façon pratique de façon théorique, puis sur des exemples, comment tirer le centre et le groupe dérivé de table de caractères.

1.22 Géométrie affine- le minimum vital à l'interne

Un beamer pour présenter le minimum à savoir sur la géométrie affine aux écrits de l'agrégation.

1.23 Continuité du spectre d'une matrice

On propose de montrer que les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de celle-ci. Le tout est de donner une bonne formulation (on en donnera deux) de ce résultat.

1.24 Disques de Gershgorin... et raffinements

On présente ici une façon rapide de localiser les valeurs propres d'une matrice avec les disques de Gershgorin. On en donne une preuve élémentaire et on continue avec deux raffinements possibles : un par dualité, et un autre, plus impliqué, qui utilise la topologie des valeurs propres (voir vidéo précédente sur la continuité du spectre).

1.25 Mini-cours sur les formes quadratiques

Vidéo 1 : Les formes quadratiques exposées pour un cours d'agrégation interne (et externe si on généralise à un corps de caractéristique différente de 2). On va trouve dans ce premier cours toutes les premières définitions et toutes les connexions entre formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques, matrices symétriques et changement de base.

Vidéo 2 : Dans cette deuxième partie, on attaque (enfin !) des exemples classiques : formes quadratiques sur les espaces $\mathbb{R}^n$, sur les espaces de polynômes et enfin sur les espaces de matrices.

Vidéo 3 : On étudie l'orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique (dans le cas où celle-ci est non dégénéré, ce qui demande une petite définition préalable). On se rend compte que les choses ne cadrent pas tout à fait avec l'intuition que l'on se fait de l'orthogonalité : certains sous-espaces ne sont pas en somme directe avec leur orthogonaux. On a alors besoin d'un critère pour assurer que tout se passe bien.

Vidéo 4 : Nous cherchons maintenant les formes quadratiques telles que tout sous-espace possède un orthogonal en somme directe. Sur $\mathbb{R}$, on tombe naturellement sur la notion de forme quadratique définie. On fournit plusieurs critères, de natures différentes, pour qu'une forme quadratique soit définie positive.

Vidéo 5 : On introduit, avec les motivations qui s'imposent, la notion d'adjoint d'un endomorphisme.

Vidéo 6 : On attaque ici le gros morceau du cours (et ce ne sera pas le seul !) : le théorème de Sylvester. On va insister lourdement sur le fait qu'il se décompose en deux parties : existence et unicité de la signature ! La preuve utilisée pour l'existence se fait sur le critère d'orthogonal en somme directe que nous avions rencontré précédemment, et pour l'unicité, on utilisera la dimension maximale d'un sous-espace défini positif.

1.26 Le théorème spectral (et ses avatars)

On présente ici le théorème spectral comme conséquence directe du théorème d'orthogonalisation simultanée. Cela fournit un développement agréable que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Algébrie.

2 Thèmes- Agreg interne et externe

2.1 Le collier de perles (6 vidéos)

(formule de Burnside, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, cas général Cyclique, D_n)

On va essayer de ne pas se rouiller pendant cette période de confinement ! Voici une présentation (un peu improvisée de par la soudaineté des évènements) du collier de perles en trois parties, suivie d'un épilogue. Il s'agit de problèmes de dénombrement par action d'un groupe cyclique. Sur la fin, on donne des indications pour l'action du groupe diédral.

Vidéo 5 : On répond à une question très naturelle des coloriages du n-gone modulo isométries, et non plus modulo rotations.

Vidéo 6 : On répond à une question très naturelle des coloriages du n-gone modulo isométries et non plus modulo rotations. Ceci nous amène à observer le groupe diédral. On finit sur une formule générale du nombre de coloriages, qui distingue le cas pair et le cas impair.

2.2 Formes de Hankel (7 vidéos)

(du cas où P n'a que des racines réelles au cas général)

On propose ici une série de vidéos qui expliquent progressivement les formes de Hankel. L'idée est de partir d'un polynôme réel et, uniquement à l'aide d'identités de Newton et de la méthode de Gauss (sur les formes quadratiques), trouver son nombre de racines distinctes et de racines réelles.

Vidéo 1 : Pour l'étude d'un cas élémentaire, où les racines sont toutes réelles et distinctes, et la forme de Hankel est définie positive.

Vidéo 2 : Pour l'étude d'un autre cas élémentaire, où les racines sont toutes réelles mais non forcément distinctes, et la forme de Hankel est positive.

Vidéo 3 : Pour trouver la matrice de la forme de Hankel.

Vidéo 4 : Cette fois-ci, les nombres α_i ne sont plus forcément ni distincts ni réels, mais s'il ne sont pas réels, ils seront conjugués.

Vidéo 5 : On va ici, enfin (il était temps !), définir la forme de Hankel associée à un polynôme réel en toute généralité.

Vidéo 6 : On veut dans cette vidéo calculer la signature de la forme de Hankel associée à un polynôme réel T.

Vidéo 7 : On prouve le théorème de Hankel : la signature de la forme de Hankel d'un polynôme réel T "voit" son nombre de racines réelles, et son nombre de racines distinctes.

2.3 Compter avec les groupes (8 vidéos)

(la formule de la classe, S_n, nombres multinomiaux, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, sous-espaces en somme directe, matrices diagonalisables)

On va montrer dans une série de vidéos comment les groupes permettent de compter. Ici, on dévoile la stratégie des groupes : une machine de guerre pour créer des situations où le lemme du berger peut s'appliquer.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on attaque tout de suite avec l'exemple du groupe symétrique. On voit comment les nombres multinomiaux découlent de la formule des classes (sauf qu'il n'y a qu'une seule classe).

Vidéo 3 : On passe facilement du groupe symétrique au groupe linéaire en remplaçant "sous-ensembles" par "sous-espaces" et "partitions" par "sous-espaces en somme directe". On obtient des dénombrements où les factorielles sont remplacées par des cardinaux de groupes linéaires sur un corps fini.

Vidéo 4 : On s'attaque au nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini. On obtient une jolie formule.

Vidéo 5 : La formule obtenue pour dénombrer les matrices diagonalisables était jolie, mais peu utile en l'état. Elle comportait trop de termes quand le corps devenait grand. Toutefois, on peut la réarranger car plusieurs termes sont regroupables. On peut alors donner une estimation de la probabilité de choisir une matrice diagonalisable au hasard sur un corps fini. On finit sur ce résultat épatant.

Vidéo 6 : On veut compter le nombre de matrices de rang r sur un corps fini. Pour l'instant, on se contente d'un calcul préliminaire : celui du calcul du nombre de sous-espaces de dimension k fixée.

Vidéo 7 : On s'attaque au nombre de matrices de taille (m, n) et de rang r sur un corps fini. On en profite pour présenter l'action de Steinitz qui partitionne l'espace des matrices selon leur rang.

Vidéo 8 : Une fois le nombre de matrices de rang r obtenu, on lui donne une forme plus parlante, pour y découvrir des phénomènes naturels comme l'isomorphisme canonique et la dualité.

2.4 Le groupe orthogonal (4 vidéos)

(générateurs de O_n, de SO_n, SO_3 est simple)

On étudie le groupe orthogonal d'un espace euclidien.

Vidéo 1 : On s'intéresse à l'engendrement du groupe orthogonal par des réflexions orthogonales.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on montre le résultat classique de l'engendrement du groupe spécial orthogonal par des retournements orthogonaux.

Vidéo 3 : On attaque ici la simplicité de SO_3. Il ne faudra pas moins de deux vidéos pour en venir à bout.

Vidéo 4 : Dans cette dernière vidéo, on parachève la preuve de la simplicité de SO_3.

2.5 Structures quotients (7 vidéos)

(structure quotient ensembliste, passage au quotient, groupe, quotient et théorème de Lagrange, groupe quotient, sous-espaces quotient : formule du rang et noyaux emboîtés, idéaux, passage au quotient, lemme chinois, équations diophantiennes avec 31)

Il s'agit d'une série de vidéos où on présente les structures quotient dans le programme universitaire.

Vidéo 1 : On montre qu'une application est une bijection qui s'ignore.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on présente le quotient d'un groupe par un sous-groupe non nécessairement distingué.

Vidéo 3 : On montre ici comment obtenir des structures de groupes quotient à l'aide d'un sous-groupe distingué.

Vidéo 4 : On s'attaque maintenant aux structures d'espaces vectoriels quotient. On en trouve des bases, on déduit la dimension de l'espace quotient et on remarque que la formule du rang est totalement naturelle dans ce contexte.

Vidéo 5 : Une preuve élégante (mais classique !) de l'essoufflement de la suite des noyaux emboîtés est présentée. Elle utilise le passage au quotient.

Vidéo 6 : On se dirige maintenant vers l'arithmétique en introduisant les idéaux. Ceux-ci permettent de construire des structures d'anneaux quotient, tout en généralisant la relation "divise" des entiers.

Vidéo 7 : Dans cette dernière vidéo, on montre comment les structures quotient peuvent amener à résoudre des équations diophantiennes.

2.6 Les tutos du Père Castor : l'axe radical

Vidéo 1 : Notre ami Antoine va nous montrer comment calculer la puissance d'un point par rapport à un cercle, tracer une tangente à un cercle à partir d'un point et trouver, en trois coups de compas, l'axe radical de deux cercles, c'est-à-dire le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles fixés

Vidéo 2 : Comment placer deux droites tangentes à deux cercles donnés ? On va vous montrer que c'est très simple, et, comme on pourrait s'en douter, ce n'est pas sans rapport avec l'axe radical de deux cercles.

2.7 Droites, cercles et homographies (5 vidéos)

(cocyclicité, birapport, homographies, préserver le birapport, les droites ou cercles, transitivité de l'action, inégalité de Ptolémée)

Les droites et cercles du plan sont étudiées à l'aide du calcul complexe, du groupe des homographies... et du birapport.

Vidéo 1 : On introduit, à l'aide des complexes, deux caractérisations de la cocyclicité (ou alignement) de quatre points. Une en termes d'arguments et l'autre de modules.

Vidéo 2 : On présente maintenant le groupe des homographies. Il s'agit d'un groupe de transformations qui contient les translations, les similitudes directes et qui va préserver les cercles et droites. "Oui, mais quand ?" comme dit mon collègue préféré. Et bien quand vous serez prêts à le regarder en face !

Vidéo 3 : On étudie une chaîne d'actions de groupes emboîtés sur le plan complexe (prolongé par l'infini). Les translations amènent à la notion de bipoints équipollents, les similitudes directes à celle de triangles semblables et enfin les homographies à celle de quadruplets de points ayant même birapport. Lorsque ce dernier est réel, les quatre points sont cocycliques ou alignés.

Vidéo 4 : Dans cette vidéo, on montre que le groupe des homographies agit de façon transitive sur l'ensemble des "cercles et droites".

Vidéo 5 : On montre ici l'inégalité de Ptolémée et son cas d'égalité, qui caractérise les quadruplets de points inscriptibles sur un cercle à l'aide des distances entre ces points. Encore une fois, le birapport est en première ligne.

2.8 Ellipse de Steiner (6 vidéos)

(Existence, unicité, foyers de l'ellipse)

On s'intéresse en 6 vidéos à l'ellipse de Steiner associée à un triangle. Plusieurs aspects seront étudiés autour de cette ellipse : géométrie, calcul complexe, groupes de transformations, relations coefficients/racines, équations de coniques ... et le chat Gaston. Bref, plein de choses qui en effraient plus d'un, mais qui ronronnent tranquille quand on les a adoptées.

Vidéo 2 : Après avoir montré l'existence de l'ellipse de Steiner d'un triangle, on en montre l'unicité. Encore une fois, les groupes de transformations nous permettent de nous ramener à une forme plus sympathique.

Vidéo 3 : On aborde le problème des foyers de l'ellipse de Steiner. Pour l'instant, on ne fait qu'évoquer Gauss-Lucas et montrer que seul le groupe des isométries peut nous apporter quelque chose. Peu, mais ce sera suffisant pour démarrer. Maintenant que l'ellipse de Steiner a été placée dans le plan complexe, axée sur la droite réelle et centrée en 0, on attaque la stratégie de calcul, basée sur la recherche de l'équation de l'ellipse à partir d'une équation de "cercle de Steiner" pour le triangle des racines cubiques de l'unité.

Vidéo 4 : On introduit sous forme complexe une transformation affine.

Vidéo 5 : On est en mesure de calculer l'équation de l'ellipse sous une forme dont on sait déduire les foyers.

Vidéo 6 : A l'aide l'équation de l'ellipse de Steiner, on en calcule les foyers et on vérifie à l'aide de relations coefficients/racines qu'ils coïncident avec les racines du polynôme dérivé du triangle de départ.

2.9 Courbes solutions de $X' = AX$ (2 vidéos)

(généralités, petits outils préliminaires en dimension n, changement de variable, dérivation sous le signe somme, classification des matrices modulo conjugaison et multiplication par un réel non nul, puis équations des courbes solution en dimension 2)

Vidéo 1 : Avant d'attaquer le problème de l'allure et la stabilité des solutions des équations différentielles de type $X' = AX$, il est bon de faire quelques préliminaires et de passer à la loupe les outils usuels qu'exige la situation.

Vidéo 2 : On donne une autre approche pour l'allure des courbes dans $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation différentielle $X' = AX$. Cette approche passe par une classification plus grossière que celle des classes de similitude (on s'autorise à multiplier par un scalaire non nul).

2.10 Gymnastique des corps (8 vidéos)

Dans cette playlist, il ne s'agira pas de théorie des corps, mais juste d'un exposé de survol des différents types de corps sur lesquels on travaille dans le contexte de l'écrit, et pour chacun de ces types (caractéristique, finitude, ordre, algébriquement clos, les spécificités du corps des réels...), décrire les ouvertures que nous offre ce type et quels en sont les pièges. J'en parlerai dans le contexte 1) des algèbres de polynômes, 2) de la réduction 3) des formes quadratiques.

Vidéo 1 : On regarde attentivement les conséquences et les pièges qui se présentent selon si le corps sur lequel on travaille est fini ou non.

Vidéo 2 : Après avoir étudié les spécificités des corps infinis ou finis, on s'attaque au cas des corps de caractéristique zéro ou p.

Vidéo 3 : Ici, on regarde ce qui est possible ou pas, selon si l'on travaille (sur des polynômes, en réduction, ou formes quadratiques) sur un corps algébriquement clos ou non. On regarde ensuite les problèmes de caractéristiques 2 (ou pas).

Vidéo 4 : On regarde maintenant les spécificités du corps des réels, puis celui des complexes lorsque l'on travaille sur des polynômes ou sur la réduction.

Vidéo 5 : On continue sur ce volet de la pratique des corps à l'écrit de l'agrégation. On attaque ici une série de quatre vidéos sur les changements de corps. Sur cette vidéo un peu bavarde, il sera question de voir que chez les corps, les problèmes se font dans deux directions : la montée (on va chercher dans un corps plus grand des racines, des valeurs propres, des décompositions de polynômes...), et la descente (on a obtenu des informations sur le corps du dessus, et on veut en déduire des informations sur le corps du dessous). Pour la montée, il sera question de théorème de Steinitz, de corps de décomposition, et de rupture. Pour la descente, on donnera quelques aperçus pratiques de la théorie de Galois forcément sous-jacente, mais sans pour autant faire de la théorie de Galois.

Vidéo 6 : On attaque ici les problèmes de descente dans des cas pratiques. Tout d'abord, le pgcd de polynômes est invariant par changement de corps ; Puis, on voit que le rang d'une matrice possède également cette propriété d'invariance. C'est la porte ouverte à une première approche, sous forme d'exercices, de problème d'invariance par extension de corps invariants de classes de similitudes. On étudie le cas diagonalisable, nilpotent, et enfin la décomposition de Dunford.

Vidéo 7 : On pénètre ici dans le coeur du problème : montrer que deux matrices carrées sur un corps $\mathbb{K}$ sont semblables si et seulement si elles sont semblables sur une extension $\mathbb{L}$. Cette preuve se fait en deux temps : un premier temps où $\mathbb{K}$ contient toutes les valeurs propres et un second où il ne les contient pas. Dans ce dernier cas, on fait intervenir le corps de décomposition du polynôme caractéristique.

Vidéo 8 : On finit pour l'instant ce volet sur les extensions de corps et les théorèmes de descente. Autant ceux-ci fonctionnent trivialement pour la réduction, autant pour les formes quadratiques, on tombe sur des problèmes plus délicats, comme le prouve le théorème de Sylvester, qui est typiquement réel. On pourrait continuer longtemps sur ce sujet et peut-être le ferons-nous ultérieurement, par exemple, en parlant de semi-simplicité des endomorphismes, de la séparabilité, de théorèmes de descente en théorie des représentations... mais ces choses (passionnantes) sont un peu moins urgentes.

2.11 Matrices échelonnées (4 vidéos)

Vidéo 1 : On commence un nouveau volet sur les matrices échelonnées, qui sont les objets mathématiques les plus évités par les candidats de l'agrégation. Derrière la combinatoire un peu besogneuse du pivot de Gauss se cache le point de départ d'une belle randonnée sur la géométrie de la Grassmannienne. On va essayer de vous faire aimer cette théorie en ne dévoilant que, d'une part, la partie technique mais rassurante de la méthode du pivot, et d'autre part la partie à la fois simple et profonde de la géométrie de l'ensemble des sous-espaces de dimension fixée de $\mathbb{K}^n$.

Vidéo 2 : On a énoncé une bijection entre l'ensemble des matrices échelonnées réduites en colonnes de taille (n, m) et la grassmannienne de sous-espaces de dimension m de $\mathbb{K}^n$. On va montrer ici la surjectivité. On pourrait juste dire qu'il s'agit juste du fameux pivot de Gauss en colonnes. Mais pour être plus précis, on met en place ce pivot : tout d'abord, on en décrit une version en termes de multiplication à droite par des matrices de transvection-dilatation-permutation de GL_m, ce qui nous permet de montrer de façon effective la surjectivité.

Vidéo 3 : On attaque maintenant l'injectivité, et pour cela on veut retrouver de façon intrinsèque une matrice échelonnée à partir d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension m. Dans cette vidéo, on expose la stratégie de la preuve de l'injectivité, puis on montre le premier point : retrouver le "type" de la matrice échelonnée juste à partir du sous-espace.

Vidéo 4 : On finit la preuve du théorème principal sur les matrices échelonnées, c'est à dire la bijection entre grassmannienne et ensemble de matrices échelonnées. On donne ensuite un exemple sur un corps fini, où on exhibe deux façons de dénombrer une grassmannienne. Une première avec une fraction rationnelle et une autre avec un polynôme.

2.12 Agrégation externe et interne : sous-espaces stables

Vidéo 1 : On propose de travailler sur les sous-espaces stables par un endomorphisme. Il s'agit d'un problème où l'on perd pied rapidement. Mais on va commencer en douceur avec quelques petites définitions, deux questions fondamentales qui vont le fil rouge de la playlist, et quelques exemples à bien avoir en tête.

Vidéo 2 : On attaque les problèmes de sous-espaces stables en lien avec le polynôme caractéristique. Celui-ci est irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement les seuls sous-espaces stables sont triviaux. On montre ensuite que ceci est un cas particulier du cas de l'endomorphisme cyclique. Dans ce cas, les sous-espaces stables sont en bijection avec les diviseurs unitaires du polynôme caractéristique. Cela provient d'une jolie propriété de correspondance biunivoque entre sous-espaces stables pour la matrice compagnon C_P et idéaux de $\mathbb{K}[X]/(P)$. On étudie ensuite des exemples où il y a un maximum, ou un minimum de sous-espaces stables.

Vidéo 3 : Après une vidéo 2 contenant des résultats un peu tumultueux, on retrouve des eaux plus calmes avec des petits exemples classiques à bien connaître de sous-espaces stables possédant un sous-espace supplémentaire stable. Endomorphismes auto-adjoints, normaux, diagonalisables, et pour finir, lemme de Fitting et sous-espaces caractéristiques.

Vidéo 4 : On a donné un sous-espace u-stable facile à construire : le sous-espace stable par u, engendré par un élément x. On donne une condition simple sur x pour que ce sous-espace stable admette un supplémentaire u-stable : que son polynôme minimal local soit égal au polynôme minimal de u. On montre ensuite comment construire de tels éléments. On obtient alors un boulevard vers le théorème de décomposition de Frobenius.

Vidéo 5 : On fait le point sur le théorème de décomposition de Frobenius sur quelques exemples, puis, on présente le théorème de semi-simplicité, c'est-à-dire que l'on trouve un critère polynomial pour qu'un endomorphisme vérifie que tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable. Ce critère porte sur le polynôme minimal de u.

Vidéo 6 : On finit le volet sur les sous-espaces stables en donnant quelques indications sur la façon de décrire tous les sous-espaces stables d'un endomorphisme.

2.13 Agrégation externe et interne de mathématiques : Résultant

Vidéo 1 : On définit le résultant, en insistant sur l'application linéaire dont il est issu que sur l'expression du déterminant qui le définit habituellement. On se propose dans les vidéos qui suivent de donner rapidement un panel d'applications. Pour commencer, on calcule le discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$.

Vidéo 2 : On donne une propriété générale du résultant qui sera la clef des suivantes : le résultant se décline sur les anneaux et est compatible avec les morphismes d'anneaux (dans un sens à préciser). On en déduit deux conséquences importantes. La première dit que si deux polynômes unitaires sur $\mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, ils restent premiers entre eux modulo p premier sauf pour un nombre fini de p. La seconde dit que l'ensemble des entiers algébriques est un anneau (c'est-à-dire stable par l'addition et la multiplication).

Vidéo 3 : On attaque les applications du résultant en géométrie algébrique : intersections de courbes planes, équations cartésiennes d'une courbe rationnelle... et on finit avec une surprise (la différentielle du produit (A, B) et l'inversion locale).

2.14 Matrices de Gram

Une toute petite introduction aux matrices de Gram. Une définition dans le cas euclidien, quelques propriétés et surtout l'application classique au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace. Pour finir, une résurgence de la matrice de Gram à un endroit où l'on ne s'y attend pas...

2.15 Agrégation externe et interne : minmax et théorème spectral

Vidéo 1 : Le théorème spectral assure qu'une matrice symétrique réelle S est diagonalisable en base orthonormée. On va donner une caractérisation de ses valeurs propres à l'aide de la forme quadratique que S définit naturellement sur $\mathbb{R}^n$ par $q(x) = (x, Sx)$. C'est le principe du minmax appelé également théorème de Rayleigh.

Vidéo 2 : On a vu dans la vidéo 1 une version préliminaire du principe du minimax. Après deux petits exercices sur le sujet, afin de se mettre en jambes, on attaque la preuve du théorème complet appelé aussi théorème de Rayleigh. On trouve la preuve dans Nouvelles Histoires hédonistes de Groupes et de Géométries Chapitre V-D.27.

Vidéo 3 : On termine cette série de vidéos sur le théorème de Rayleigh (minimax), en prouvant les inégalités de Weyl et le théorème d'entrelacement de Cauchy.

2.16 Codage RSA, décodage et cryptanalyse

Vidéo 1 : Comme application classique du lemme chinois, on présente ici le codage RSA, son décodage, avec un exemple. Moins classique, nous allons présenter dans cette vidéo, et la suivante, des tentatives de craquage du code, ce que l'on appelle, pour cette vidéo-ci, l'attaque de Fermat.

Vidéo 2 : On étudie l'efficacité d'une attaque probabiliste du système RSA. Au programme : le lemme chinois, qui nous permet de résoudre une équation algébrique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.17 Agrégation interne et externe : Groupes cycliques

Vidéo 1 : On introduit les groupes cycliques, d'une manière un peu grossière (comme groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis, de manière plus abstraite (groupe fini monogène). On donne ensuite quelques exemples (et contre-exemple) de groupes cycliques dans la nature.

Vidéo 2 : Nous allons montrer une propriété d'hérédité des groupes cycliques : tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique. Mieux, pour tout diviseur de n, il existe un unique sous-groupe (cyclique) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d. On exploite ensuite cette propriété pour établir une formule sur la fonction d'Euler, puis pour donner une caractérisation des groupes cycliques par le nombre de ses éléments d'ordre fixé.

Vidéo 3 : On déduit de la caractérisation des groupes cycliques par leur nombre d'éléments d'ordre fixé, que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique. On illustre ceci avec la conjecture d'Artin sur les générateurs de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$. On montre ensuite le rapport avec le nombres premiers dits "longs", c'est à dire les nombres premiers p tels que l'écriture décimale de $1/p$ est de période $p-1$.

Vidéo 4 : On attaque le problème des actions de groupes cycliques. Dans un premier temps, on donne toutes les actions d'un groupe cyclique sur un ensemble fini n. Puis, on donne des exemple d'actions impliquées dans des théorèmes célèbres (lemme de Cauchy, loi de réciprocité quadratique, collier de perle). Ces actions sont juste évoquées, et non pas détaillées.

2.18 Réseaux dans les épreuves écrites de l'agrégation

Vidéo 1 : On va aborder une étude de réseaux dans $\mathbb{Z}^n$. Ce n'est pas une théorie, mais plutôt une approche pragmatique pour comprendre comment ceux-ci interviennent dans les problèmes d'agrégation. Avant de résoudre quelques questions clefs du problème d'agrégation interne 2012 (EP1), nous commençons par énoncer quelques résultats qui seront prouvé par la suite. Ces résultats sont exposés dans un tableau permettant de comparer le résultat sur $\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$) avec son analogue sur un corps (sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$).

Vidéo 2 : On continue l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$, en suivant en filigrane l'épreuve EP1 de l'agrégation interne 2012. On prouve l'existence de $\mathbb{Z}$-bases, après avoir prouvé l'unicité du cardinal de telles bases. On prouve ensuite que ces bases sont en bijection avec le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. On montre alors notre maitrise parfaite de la situation dans le cas $n = 2$, où l'on s'aide de l'identité de Bezout.

Vidéo 3 : Nous prenons ici un bon départ dans l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ en prouvant l'existence d'une $\mathbb{Z}$-base pour tout sous-groupe G de $\mathbb{Z}^n$, et même une condition pour qu'un élément du sous-groupe G se complète en une $\mathbb{Z}$-base de G.

2.19 Décomposition LU- un survol rapide des choses à bien connaître

Vidéo 1 : La décomposition LU est à bien connaître, en particulier, pour l'oral de l'agrégation externe. Quelles sont les hypothèses ? Formuler l'unicité, prouver l'implication et sa réciproque, connaître les cas particuliers sur les corps classiques, et bien sûr savoir donner la complexité de l'algorithme ainsi que les extensions du domaine (Cholesky, décomposition PLU)

2.20 Le théorème de Korovkin

Vidéo 1 : Voici un joli développement à l'agrégation interne comme externe issu de Carnet de Voyage en Analystan Exercice 4. Le théorème de Korovkin est un théorème général (et généralisable) permettant de montrer la convergence uniforme de $u_n(f)$ vers f, où u_n désigne une suite d'opérateurs positifs, à partir de la convergence sur un système fini de fonctions. Ici, 1, x, et x^2 sur $[0, 1]$.

Vidéo 2 : Le théorème de Korovkin a pour application classique le théorème de Weierstrass qui affirme que l'algèbre des polynômes sur un intervalle $[a, b]$ est dense dans l'algèbre des fonctions continues. Voir aussi "Carnet de Voyage en Analystan" Exercice 5.

2.21 Sous-espaces de matrices avec des conditions de rang

Vidéo 1 : Une petite histoire soufflée par Rached Mneimné. On sait qu'un hyperplan de matrices carrées contient une matrice inversible. Et cela constitue un développement souvent présenté aux agrégations internes et externes. Mais a-t-on vraiment besoin d'un hyperplan ? Peut-on prendre une dimension plus petite ? On trouve ici une borne telle que si la dimension d'un sous-espace matriciel se trouve au-dessus de cette borne, alors il contient forcément une matrice inversible.

Vidéo 2 : On montre les résultats annoncés dans la vidéo 1. Finalement, un joli développement équilibré entre polynômes, propriétés du rang, déterminant, et on finit en beauté avec les corps finis (ou pas).

2.22 Rudiments de théorie de Minkowski pour l'agrégation

On sait d'expérience que la théorie de Minkowski a rebuté plus d'un étudiant, tant son approche diffère des approches habituelles. Pourtant, le jeu en vaut la chandelle, dès que l'on veut assurer l'existence d'un point entier dans une partie de $\mathbb{R}^n$. Voici une présentation minimaliste de la théorie.

2.23 L'intérieur des matrices diagonalisables complexes

On montre ici que l'intérieur des matrices diagonalisables complexes est constitué des matrices à valeurs propres simples. Il serait utile de réviser un peu le résultant sur https ://studio.youtube.com/video/dQs-BKphQFw

2.24 Une preuve express de Cayley-Hamilton (sur tout corps et sans topologie)

On présente une preuve très rapide de Cayley-Hamilton qui ne nécessite pas de topologie et ne demande pas d'hypothèse sur le corps. Elle demande en revanche la connaissance du discriminant d'un polynôme.

2.25 Critère topologique de diagonalisabilité

Sur $\mathbb{C}$, une matrice est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée pour la topologie d'espace normé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On montre ce résultat, ainsi que son analogue sur $\mathbb{R}$.

2.26 Le théorème de Fejér prouvé par Korovkin

Une suggestion de mon ancien étudiant Luca Castelli : la théorie de Korovkin permet de voir que les fonctions trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues périodiques (pour la norme uniforme). La théorie de Korovkin a cela de merveilleux que la preuve ne demande que de montrer qu'un certain opérateur est positif, qu'il est à valeurs dans les fonctions trigonométriques, et que $u_n(f)$ converge uniformément vers f, pour $f = 1$, cos et sin ! Référence : Hirsch-Lacombe p. 33.

2.27 Polynômes cyclotomiques (petits calculs)

Vidéo 1 : On introduit les polynômes cyclotomiques et les deux formules qui permettent de les définir. Une formule qui les définit, mais qui n'est pas pratique d'utilisation, et une formule qui permet de les calculer par récurrence. C'est cette seconde formule qui va nous permettre de faire des petits calculs préliminaires. Le but est de calculer (au moins se rassurer qu'on est capable de le faire facilement) ϕ_n pour n de 1 à 104. Dans cette première vidéo, on se contentera de les calculer jusqu'à 12.

Vidéo 2 : Les petits calculs sur les polynômes cyclotomiques vont devenir un peu plus sérieux à l'aide de la fonction de Moebius qui va nous formule d'inversion très utile pour passer de ϕ_n à ϕ_{pn} pour tout p premier.

Vidéo 3 : On termine ce petit exposé sur le calcul des polynômes cyclotomiques avec le calcul des polynômes ϕ_{pq}, premiers. On va voir une recette simple qui nous permet de trouver tous les monômes de la décomposition, ce qui nous permet de voir, au passage, que si n ne possède que deux facteurs premiers impairs dans sa décomposition (même avec multiplicité) alors, ϕ_n possède tous ses coefficients dans $\{0, 1, -1\}$. Le premier polynôme cyclotomique qui échappe à nos recettes simples sera donc pour $n = 3 \times 5 \times 7 = 105$. On finit sur un exemple en calculant ϕ_{60}.

2.28 Théorème de progression arithmétique de Dirichlet (version faible)

Pour tout entier n strictement positif, on montre qu'il existe un nombre fini de nombres premiers congrus à 1 modulo n. On suit une preuve que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Algébrie.

2.29 Critère de cyclicité pour les groupes finis

Les groupes cycliques sont les "sous-groupes élémentaires" d'un groupe fini. il est donc important de bien les connaître et savoir les reconnaître. On donne ici un critère pour montrer qu'un groupe est cyclique ayant des applications intéressantes, en particulier dans l'étude du groupe multiplicatif d'un corps ou des inversibles d'un anneau intègre. La preuve utilise une formule sur la fonction indicatrice d'Euler, qui elle-même utilise l'étude des groupes cycliques. On tourne en boucle !

2.30 Tirage de nombres premiers entre eux

On tire indépendamment deux nombres de 1 à n et on veut connaître la probabilité de tirer des nombres premiers entre eux lorsque n est grand. Dans ce développement que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Analystan, on verra comment la fonction zeta débarque dans la théorie des nombres.

2.31 Lemme de Brauer sur les matrices de permutation)

Vidéo 1 : On montre ici que deux permutations sont conjuguées dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si les matrices de permutation correspondantes sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire semblable. Il s'agit d'un joli développement transversal où l'on va devoir récupérer des invariants de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ à partir d'invariants de similitude dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dans un premier temps, nous supposons que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. On pourra retrouver une preuve analogue dans le livre "Objectif agrégation".

Vidéo 2 : On montre ici que deux permutations sont conjuguées dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si les matrices de permutation correspondantes sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire semblable. Il s'agit d'un joli développement transversal où l'on va devoir récupérer des invariants de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ à partir d'invariants de similitude dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dans cette seconde vidéo, on suppose le corps $\mathbb{K}$ quelconque. Je n'ai malheureusement pas de référence "agrégative" pour cette preuve (toutefois magnifique).

2.32 Fonctions arithmétiques à l'agrégation)

Vidéo 1 : On va faire en deux petites vidéos un tour d'horizon sur les fonctions arithmétiques que l'on rencontre à l'agrégation. On commence ici par la fonction indicatrice d'Euler et la fonction mu de Moebius.

Vidéo 2 : On propose en deux petites vidéos un tour d'horizon sur les fonctions arithmétiques que l'on rencontre à l'agrégation. On continue avec l'ubiquité de la fonction μ de Moebius dans différentes composantes des mathématiques, où elle joue un rôle d'inversion, théorie des corps, arithmétique, réduction, et enfin en analyse avec les séries où l'on rencontrera l'inévitable fonction zeta.

2.33 Equivalents pour les suites récurrentes

Vidéo 1 : On cherche à comprendre les équivalents autour d'un point (y compris l'infini) à une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Vidéo 2 : Développement asymptotique de la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$. On présente ici un classique. La suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec u_0 assez proche de 0 tend vers 0. On voit, comme dans la vidéo précédente (dont celle-ci est une illustration), que u_n est équivalent à $\sqrt{3/n}$ en l'infini. On cherche ensuite un second terme à son développement asymptotique.

2.34 Développement de la série harmonique

Le développement de la série harmonique est un bel exercice d'analyse qui peut se faire par étapes successives. Dans un premier temps, il y a l'apparition de la constante d'Euler, suivie dans un deuxième temps du calcul des premiers termes en $1/n$ et $1/n^2$. Mais pour obtenir un développement "illimité", il faut passer par les nombres de Bernoulli sur lesquels nous ne tarirons pas d'éloges.

2.35 Algorithme d'Euclide et polynômes continuants

Vidéo 1 : On va voir ici l'algorithme d'Euclide comme une application, dont l'étude de la surjectivité nous amènera à deux considérations. Une théorique : l'algorithme d'Euclide est fortement lié à la notion de fraction continue de nombres rationnels. Une autre très pratique, l'identité de Bezout peut être calculée à l'aide d'une famille de polynômes incontournable : les polynômes continuants.

Errata (signalé par "Prenom Nom") : C'est (27,15) et (9,5) qui donnent (1,1,4), et non pas (27,12) et (9,4) comme annoncé.

Vidéo 2 : On va utiliser les polynômes continuants définis dans la première vidéo pour donner une borne au nombre d'opérations à effectuer à partir de deux nombre a et b dont on veut trouver le pgcd. Une recherche qui nous fera découvrir la base d'or...

2.36 Système RSA

Vidéo 1 : On présente le système RSA :codage, décodage et cryptanalyse (comment casser le code ?) en trois vidéos, le tout dans le cadre d'un oral à l'agrégation. Cette première vidéo traite du codage et du décodage.

Vidéo 2 : Cette seconde vidéo traite de l'attaque, dite, de Fermat, et d'une autre forme d'attaque, plus empirique.

Vidéo 3 : Cette troisième vidéo traite de l'attaque de Wiener, basée sur le théorème de meilleure approximation, que nous nous contenterons d'énoncer ici, mais que nous démontrerons dans une prochaine vidéo.

2.37 Le théorème de meilleure approximation rationnelle

Vidéo 1 : On présente le théorème de meilleure approximation d'un réel par une fraction rationnelle. Pour le résumer, on pourrait dire que la "rentabilité" de l'approximation d'un réel a, par une fraction rationnelle p/q, est le rapport entre $a - p/q$ (en valeur absolue) et $1/q^2$. Legendre a montré en 1798 que si cette rentabilité est strictement plus petit que 1/2, alors p/q est un terme de la suite de fractions continues qui converge vers a.

Vidéo 2 : Idem

2.38 Critère par les mineurs pour le rang d'une matrice

On montre ce résultat souvent utilisé : le rang d'une matrice rectangulaire est la taille maximale d'un mineur non nul. On en donne ensuite une application sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à la topologie du rang (Nouvelles histoires hédonistes chapitre I)

2.39 Le problème des diviseurs de Dirichlet

Vidéo 1 : Trouver quel est le nombre de diviseurs (positifs) d'un entier donné est chose facile, mais quelle est la moyenne du nombre de diviseurs sur les n premiers entiers consécutifs est chose plus ardue et pourrait même nous emmener vers des des fonds abyssaux. Voici un petit exposé du problème (en deux volets) qui peut constituer un développement raisonnable à l'agrégation interne (ou externe), vu ses liens avec l'analyse et l'arithmétique..

Vidéo 2 : (Seconde et dernière partie)

2.40 Sur le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$

Quelques aspects "groupistes" de l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbb{R}$, muni de la loi $\circ$. On s'intéresse ici à un objet essentiellement analytique, mais avec un regard d'algébriste. Exercice que l'on peut retrouver avec bonheur dans Carnet de Voyage en Analystan.

2.41 Conditionnement d'une matrice

Parmi les applications des valeurs propres attendues dans la leçon 149 (selon le rapport du jury), on va trouver le conditionnement d'une matrice. Le conditionnement permet de comprendre la sensibilité des solutions trouvée à un système de Cramer $Ax = b$, en fonction des erreurs commises sur le calcul de la matrice A et du vecteur colonne b. Pour la norme subordonnée à la norme quadratique, on trouve que le conditionnement est fortement lié à l'étendue du spectre de la matrice A^*A.

2.42 Gram-Schmidt et la décomposition QR

On introduit ici la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ainsi que son avatar matriciel : la décomposition QR. On présente ensuite l'avantage de cette décomposition (unicité, inégalité d'Hadamard...)

2.43 Méthode QR- exemples, preuves, et petits calculs sur SAGE

Voici un algorithme qu'il est bon de connaître pour plusieurs raisons : 1) il est d'une efficacité redoutable pour trouver une approximation de racines de polynômes, 2) la preuve est élégante et 3) dans le contexte actuel, il peut faire l'objet d'un développement dans le contexte d'une leçon à l'agrégation externe (incontournable dans la leçon 149) .

2.44 Pseudo-inverse d'une matrice réelle

On donne ici l'expression de la pseudo inverse d'une matrice. Si $Ax = b$ est un système linéaire, et si B est la pseudo inverse de A, alors $x = Bb$ est l'élement de norme minimale tel que $(Ax - b)$ est de norme minimale.

2.45 Solution optimale d'un système linéaire

Voici (sous forme d'exercice) une façon élégante proposée par Moore et Penrose de formuler une solution optimale à un système linéaire quelconque sur $\mathbb{R}$. On aboutit à la notion de pseudo-inverse d'une matrice rectangulaire.

2.46 Matrices compagnon, preuves et applications

On introduit et on donne un aperçu (avec preuves) de la propriété fondamentale des matrices compagnon d'un polynôme unitaire P : son polynôme minimal et son polynôme caractéristique est égal à P. On fournit ensuite pêle-mêle (sans preuves, mais avec références) bon nombre d'applications. On finit enfin avec un petit exercice (corrigé) qui pourrait en étonner plus d'un.

2.47 Trace et dualité

On fait le point sur la forme trace, vue comme une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des matrices carrées. On explique ici pourquoi est est non dégénérée, et pourquoi cette propriété est essentielle pour comprendre plus finement l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.48 Séries génératrices- mode d'emploi

Quelques petits exemples progressifs autour des séries génératrices dont le slogan pourrait être :"Si vous ne pouvez pas trouver un terme dans une suite, le mieux c'est de les compter tous !"

2.49 Simplicité des groupes- les applications

Pour les oraux d'agrégation externe, si l'on a montré lors d'un développement que SO_3 ou $\mathfrak{A}_n$ est simple, il n'est pas mauvais de pouvoir expliquer pourquoi cet engouement pour les groupes simples. Cette vidéo est là pour nous donner bon nombre d'applications à la simplicité.

2.50 Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

Voici dans le cadre de l'agrégation externe, un petit théorème sur la classification des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

2.51 Questions autour de l'automorphisme de Frobenius

L'automorphisme de Frobenius possède bien des aspects : c'est un morphisme de corps, mais aussi un endomorphisme d'espace, un morphisme de groupes multiplicatif, voire une simple permutation d'ensemble fini. A tous ces aspects correspondent des questions classiques, quel est son polynôme caractéristique, est-il diagonalisable, quelle est sa signature, sa décomposition en cycles... Ces questions peuvent désarçonner le candidat à l'agrégation. On tentera de mettre en place quelques réflexes vitaux, et autres gestes-barrière.

2.52 Sous-groupe d'indice premier minimal

On montre ici que si p est le nombre premier minimal divisant l'ordre d'un groupe G et si H est un sous-groupe d'indice p de G, alors H est distingué dans G. Ce sera l'occasion de montrer l'utilité de l'action de G sur l'espace, dit homogène, G/H.

2.53 Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On va montrer dans un premier temps que le groupe orthogonal est compact, et même qu'il s'agit d'un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dans un deuxième temps, on passer à un théorème plus difficile, mais fondamental : tout sous-groupe compact est conjugué à un sous-groupe de O_n. Ce morceau de bravoure nous demandera d'utiliser le théorème de l'ellipsoïde de John-Loewner. Voir https ://www.youtube.com/watch ?v=yPIMWFTSwxA

On peut trouver ce développement dans Oraux X ENS Algèbre 3.

2.54 Etude des groupes finis $\mathcal{A}_4$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$

D'après une suggestion de Rached Mneimné, on propose d'étudier ces deux groupes, non simples, qui ne possèdent pas de sous-groupe d'indice 2.

2.55 Erreurs dans les calculs d'intégrales

Vidéo 1 : Nous allons parler des différentes méthodes pour les calculs d'intégrales (rectangle, trapèze, méthode de Simpson). On commence par une approche algébrique des différentes méthodes connues.

Vidéo 2 : Nous parlons ici des différentes méthodes pour les calculs d'intégrales (rectangle, trapèze, méthode de Simpson, et une introduction à la méthode de quadrature de Gauss). Voici cette fois-ci le pendant analytique de la première vidéo. On calcule, à l'aide de l'inégalité des accroissement finis, un encadrement des erreurs que l'on fait en appliquant ces méthodes à une fonction "suffisamment dérivable" sur un intervalle $[a, b]$.

2.56 Les classes de similitude en dimension 2 (sur corps fini)

Rien de mieux pour comprendre les classes de similitude que de les décrire en totalité dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et de les dénombrer dans le cas où le corps est fini. Une vidéo qui se vit comme un beau voyage, sans (trop d')émission de CO2, et dont on se sort grandi.

2.57 Les classes de conjugaison du groupe $\mathcal{S}_n$

Vidéo 1 : Voici une preuve à bien connaître dans la leçon sur les groupes de permutation : celle du théorème qui stipule que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même partition associée. On va partir de la formule de conjugaison des permutations pour définir cette partition associée, et montrer qu'il s'agit bien de ce que l'on appelle un "invariant total de conjugaison". Invariant total, vous ne viendrez plus chez nous par hasard !

Vidéo 2 :

Nous venons de voir dans une vidéo précédente que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ étaient paramétrées par les partitions de n. Voici maintenant une preuve pour la formule du cardinal de la classe de conjugaison associée à une partition.

2.58 Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini

Un petit développement pour l'externe. En suivant Carnet de Voyage en Algébrie, on calcule de nombre de matrices diagonalisables sur un corps à q éléments. On en déduit que la probabilité de piocher une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tend vers $1/n!$ quand $|\mathbb{K}|$ est grand.

2.59 Nombre de matrices semi-simples sur un corps fini.

On va attaquer un problème un peu ardu, mais qui ne demande que des choses solubles dans l'agrégation. On va montrer que la probabilité de choisir une matrice semi-simple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ fini, tend vers 1 quand le cardinal de $\mathbb{K}$ tend vers l'infini. Le plus long finalement dans la preuve est de faire un inventaire des pré-requis.

Errata : petite coquille à 13'30". Il faut mettre un factoriel à $a_j(\lambda)$ au dénominateur.

2.60 Nombre de matrices nilpotentes sur un corps fini

Le cardinal du cône nilpotent sur un corps fini fournit une formule bien intrigante (c'est le cardinal d'un espace vectoriel du corps fini alors que tout le monde sait que ce cône n'est pas un sous-espace vectoriel !). On tente une méthode sous forme "développement 15 minutes" que l'on peut trouver dans H2G2 tome 2 (2015) Chapitre IV-Théorème 4.1. Une autre méthode est disponible dans Carnet de Voyage en Algébrie, en utilisant le lemme de Fitting.

2.61 Dénombrement et réduction sur un corps fini-quelques séries génératrices

On résume ici les formules de dénombrement trouvées dans les vidéos précédentes (matrices diagonalisables, nilpotentes, semi-simples) sur un corps fini. On ajoute, pour le plaisir, les matrices trigonalisables, et des versions synthétiques sous forme de séries génératrices.

2.62 Les formes de Hankel (à leur état naturel)

Vidéo 1 : Voici une présentation des formes de Hankel (associée à un polynôme P réel) vue dans leur élément naturel, c'est-à-dire, sur un espace de polynôme réel. Dans un premier temps, nous présentons le cas où le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Vidéo 2 :
Voici une présentation des formes de Hankel (associée à un polynôme P réel) vue dans leur élément naturel, c'est-à-dire, sur un espace de polynôme réel. Nous présentons le cas général.

2.63 Isomorphismes exceptionnels de groupes finis

Vidéo 1 : On motive ici le problème des isomorphismes entre les groupes linéaires et groupes de permutations, en suivant le livre Nouvelles Histoires Hédonistes de groupes et de Géométries. Ces problèmes ont animés de grands mathématiciens, de Galois, dans sa lettre testamentaire, jusqu'aux grands mathématiciens du XXième siècles qui ont façonné la classification des groupes simples finis. Désormais, ces problèmes intéressent également nos étudiants à l'agrégation dans leur préparation de développements !

Vidéo 2 :
On attaque ici le cas des isomorphismes dits exceptionnels pour les corps $\mathbb{F}_4$, et $\mathbb{F}_5$. On conseille, pour ceux qui seraient intéressés de les comprendre tous (!) la lecture du chapitre XII de Histoires hédonistes de groupes et de géométries (2015)

2.64 L'image de l'exponentielle réelle. On fait le point (barre) !

On présente tout les outils pour comprendre si une matrice réelle donnée est ou non l'exponentielle d'une matrice réelle. Tous les outils sont bons pour cette tâche difficile : réduction, polynômes annulateurs, décomposition de Dunford additive, multiplicative. On termine avec un lien peut-être inattendu sur l'étude des structures complexes.

2.65 Le théorème de Cartan-Von Neumann

Le théorème de Cartan Von Neumann (ou tout simplement de Cartan) dit qu'un sous-groupe fermé du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ possède une structure de sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On va passer un peu de temps à prouver et commenter ce théorème, mais quand on en voit la puissance, on se dit que ce n'est pas du temps perdu !

2.66 Une nouvelle preuve du théorème spectral ?

Vidéo 1 : Une preuve nouvelle, et due à Clément de Seguins Pazzis, du théorème spectral, est tombée récemment sur les réseaux sociaux. C'est peut-être le moment de faire le point sur ce théorème et sur ses preuves.
Vidéo 2 : Une jolie proposition de Hugues Contini pour une preuve du théorème spectral : en fait une propriété bien connue des polynômes irréductibles réels font que la seule

obstruction au théorème spectral se situe en dimension 2. Le reste est une vérification de routine.

2.67 Test de primalité

Vidéo 1 : Le témoin de Solovay-Strassen - Un test de primalité. On présente un test élégant de primalité dû à Solovay et Strassen. On sait que le symbole de Legendre d'un entier a modulo un nombre premier impair p est égal à $a^{(p-1)/2}$. Quand on généralise par multiplicativité le symbole de Legendre à tout entier impair p, alors, on voit que cette égalité n'est plus vraie dès que p n'est pas premier. On peut donc utiliser cette propriété comme critère de primalité.

Vidéo 2 : Les menteurs de Miller-Rabin- test de primalité. Voici un test de primalité réellement efficace ! Il s'agit du test de Miller-Rabin qui dit que si n est un entier impair non premier, une certaine batterie d'équations dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ n'a que très peu de solutions, alors que tout élément est solution si n est premier. Pour voir si n est premier, on prend un certain nombre d'éléments au hasard dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, et si un élément ne vérifie pas une équation, n n'est pas premier. Mais peut on être sûr que n est premier si tous les nombres choisis ont passé le test ? Y a-t-il des menteurs ?

2.68 Le théorème (fort) de progression arithmétique de Dirichlet

Vidéo 1 : Le feuilleton (arithmétique) de l'été. On tente ici malgré la canicule de fournir une version motivée (et on l'espère, motivante) de la preuve de Jean-Pierre Serre du théorème de progression arithmétique de Dirichlet : si a et m sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo m. Cerise sur le gâteau : une petite clause d'équidistribution. Merci à vct nll de nous avoir suggéré de parler de ce joli problème qui mêle caractères et analyse complexe.

Vidéo 2 : Après avoir donné tout récemment la preuve de Serre pour le théorème de progression arithmétique de Dirichlet, il n'est peut-être pas inutile d'en faire un résumé succinct afin d'en dégager les points forts.

2.69 Le théorème de Polya sur les coloriages

Vidéo 1 : Colorier un ensemble fini X revient à fournir une application de cet ensemble vers un ensemble K de couleurs. Si G est un groupe fini qui agit sur X, on rappelle comment calculer le nombre de coloriages modulo l'action de G. On montre ensuite le théorème de Polya qui établit une formule synthétique pour les coloriages modulo G ayant un nombre prédéfini d'éléments de couleur donnée.

Vidéo 2 (coloriage et théorie des représentations) : On a trouvé une formule élégante, due à Polya, qui permettait de calculer assez facilement le nombre de coloriages possibles d'un ensemble X, modulo une action de groupes. Dans cette vidéo, on transforme cette formule en une formule équivalente, traduite en termes de théorie des représentations pour le groupe des permutations de X. On constate avec bonheur que la théorie de coloriages permet une introduction naturelle des polynômes de Schur, Graal des combinatoristes et des théoriciens de représentations. On illustre toute cette jolie théorie sur un exemple courant. P.S. cette vidéo ne demande pas une grande familiarité à la théorie des représentations, mais son but non avoué est de participer à cette familiarité !

2.70 Vitesse de convergence d'une suite récurrente (et méthode d'Archimède)

Vidéo 1 : On part d'une situation classique où une suite récurrente (u$_n$)$donneparunefonctionconverg$
$u_n estquivalenteunesuitegomtrique.Cecinousamneunexempledeuxfoismillnaire, aveclamthoded'Arch$

2.71 La dualité dans le théorème de Frobenius

Un beau développement dans une leçon sur la dualité consiste à prouver que, dans le contexte des endomorphismes, si le sous-espace u-stable engendré par un vecteur x de E est de dimension le degré du polynôme minimal de u, alors ce sous-espace possède un supplémentaire u-stable. On donne une preuve où l'on motive la nécessité de la dualité.

2.72 Questions de jury autour du rang en algèbre linéaire

Vidéo 1 : Deux questions de jury classiques au cours d'une leçon d'agrégation sur le rang. Une, sur la diagonalisabilité, et l'autre (plutôt esprit agrégation externe qu'interne) sur la stabilité du polynôme minimal par extension. Mais à la fin, une rencontre du troisième type :-) !

Vidéo 2 : Quelques questions classiques sur les propriétés topologiques du rang

Vidéo 3 : Une dernière question de jury autour des propriétés du rang, mais cette fois-ci le rang concerne les formes quadratiques sur un corps fini !

2.73 Comatrice, qui es-tu ?

On cherche une définition intrinsèque (sans calcul et liée à l'algèbre linéaire plutôt qu'au calcul matriciel) de la comatrice. Il y a une définition savante qui utilise les algèbres extérieures, mais celles-ci sont hors programme agreg-master. On en propose une "intermédiaire" assez amusante.

2.74 Formule de Binet-Cauchy (par la face sud)

Vidéo 1 : La formule de Binet-Cauchy (que l'on peut trouver dans Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, tome 2, Chap. II) peut être placée avec brio dans une leçon sur le déterminant. On propose une méthode douce pour cette formule dont nous verrons plus tard des applications.

2.75 Qui sont les coefficients du polynôme caractéristique ?

Vidéo 1 : On prouve une formule générale pour les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

2.76 Primitivable implique continue (ou bien) ?

Vidéo 1 : On sait depuis longtemps qu'une fonction continue sur un intervalle est possède une primitive. Mais est-ce bien nécessaire ? On va commencer par donner un contre-exemple (classique) d'une fonction primitivable non continue. Mais si admettre une primitive n'implique pas forcément la continuité, le théorème des accroissements finis prouve qu'il s'agit d'une fonction vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'on appelle également fonction de Darboux. Encore une fois, la réciproque est fausse et on va montrer qu'une fonction de Darboux n'est pas nécessairement primitivable.

2.77 Pourquoi une fonction injective continue sur un intervalle est-elle strictement monotone ?

On donne trois preuves pour cet énoncé. Une fausse (ou disons trop imprécise), une pour le niveau licence, et enfin une, assez séduisante, mais qui demande quelques bases de topologie de L3.

2.78 Multiplication à gauche par une matrice- analyse spectrale

Si A est une matrice carrée, la multiplication à gauche par A fournit un endomorphisme L_A de l'espace des matrices carrées (de même taille que A). On propose une analyse spectrale (spectre et vecteurs propres) lorsque A est diagonalisable. Bref, l'ambiance à son comble au Fab-Lab.

2.79 La formule de Dobinski (finie)

Une formule qui illustre parfaitement la puissance des actions de groupes. On part de la question suivante : on sait que le groupe de permutation S_n agit transitivement sur $X = [1, n]$. Combien y a-t-il d'orbites quand il agit naturellement sur X^m ?

2.80 Construire un automorphisme extérieur de S_6

Les actions de groupes permettent de construire des morphismes d'un groupe G vers un groupe de permutation S_n. Il suffit d'une belle coïncidence numérique pour construire un morphisme de S_n dans lui-même. Pour $n = 6$, on prouve que l'automorphisme obtenu est extérieur (ie. n'est pas intérieur).

2.81 Tout (ou presque) sur le groupe orthogonal !

On va faire le point sur le groupe orthogonal : définitions, premières propriétés, centre, sous-groupes distinguées, réduction, topologie, actions... Mais bien entendu, le groupe orthogonal, c'est aussi un groupe qui participe à des décompositions (polaires, QR) essentielles en mathématiques !

2.82 Nombre chromatique d'un graphe et théorème spectral

Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimal de couleurs que l'on peut attribuer à ses sommets pour que deux sommets connectés soient de couleurs différentes. On prouve une inégalité sur le nombre chromatique d'un graphe en fonction du spectre de sa matrice d'adjacence. L'inspiration provient de la jolie épreuve 1 de l'agrégation interne de 2019.

3 Exercices-Agreg interne et externe

3.1 Exercices de confinement Arithmétique

Vidéo 1 : Voici quelques petits exercices corrigés en arithmétique. Des exercices que l'on peut poser à l'oral, donc généralement plus facile que des exercices d'écrit. Au programme, le théorème fondamental de l'arithmétique, le lemme de Gauss, la fonction d'Euler, le théorème de Lagrange... On ne donne pas d'équations diophantiennes (celles-ci sont déjà dans la playlist "exercices d'arithmétiques").

Vidéo 2 : On résout des petits équations de congruence autour du lemme chinois, puis, lorsque le lemme chinois ne peut pas nous venir en aide (on travaille modulo 17^2), on a une variante avec une méthode de Newton p-adique. Enfin, deux exercices supplémentaires autour de la fonction indicatrice d'Euler.

Vidéo 3 : Réseaux. On a souvent besoin en arithmétique d'utiliser de choses élémentaires sur les réseaux. A l'écrit, la caractérisation des $\mathbb{Z}$-bases de $\mathbb{Z}^n$ et un "théorème de la $\mathbb{Z}$-base incomplète" peut être souvent utile. C'est ce que l'on va voir dans un petit exercice qui nous fera faire un premier pas dans le monde des réseaux.

Vidéo 4 : On revient sur les systèmes (affines) de congruences. On attaque les systèmes à trois équations et le cas où l'on sort du cadre classique du lemme chinois, c'est-à-dire, où les nombres ne sont pas premiers entre eux.

Vidéo 5 : On résout un petit système de congruence dans un cadre "hors lemme chinois" avant de modéliser ce type de système sous forme de suite exacte de groupes.

Vidéo 6 : Voici quelques petits exercices de réduction autour des propriétés arithmétiques du polynôme minimal. On cherche ici le polynôme minimal d'une matrice diagonale, puis, triangulaire, par blocs.

3.2 Trigonalisation simultanée, l'exercice coup de coeur !

Vidéo 1 et 2 : C'est un exercice (en plusieurs étapes) qui s'adresse aux candidats à l'agrégation externe. On montre que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, et que tout g de G a un spectre réduit à 1, alors les éléments de G sont simultanément trigonalisables. Au programme : trigonalisation, lemme de Cauchy, dénombrement de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, et enfin, théorèmes de Sylow !

3.3 Exercices de confinement- normes sur $\mathbb{R}[X]$

Vidéo 1 : On commence une série de petits exercices présentant des contre-exemples sur les normes non équivalentes lorsque les espaces vectoriels sont de dimension infinie.

Vidéo 2 : On continue avec un exercice qui relie certaines normes sur $\mathbb{R}[X]$ à des "compacts infinis" de $\mathbb{R}$. Notons que "compact infini" est une notion essentielle dans les problèmes de prolongements analytiques en analyse complexe.

Vidéo 3 : On attaque un petit dernier sur les normes de $\mathbb{R}[X]$. On introduit une norme un peu farfelue sur $\mathbb{R}[X]$ et on montre que l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour cette norme. Au final, on voit que c'est peine perdue puisqu'un espace à base dénombrable sur $\mathbb{R}$ peut pas être complet pour aucune norme.

3.4 Exercices sur les formes quadratiques (8 vidéos)

Vidéo 1 : Une généralisation de la formule d'Apollonius, deux exercices sur le gonflement hyperbolique, principe du min-max de Rayleigh, image d'une sphère par une surjection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$, deux vidéos sur l'étude affine des coniques à partir de leur équation cartésienne, les formes quadratiques entières binaires qui servent à voir si deux matrices sont $\mathbb{Z}$-semblables.

Vidéo 2 : Un autre exercice sur les formes quadratiques réelles (ou pas). Il permet de montrer comment déjouer le piège fréquent des formes non "définies positives" de la restriction dégénérée. On n'a plus des orthogonaux en somme directe. On sort alors le remède miracle du "gonflement hyperbolique".

Vidéo 3 : On va se servir du gonflement hyperbolique dans un cas simple : soit E un espace réel muni d'une forme quadratique non dégénérée q, on veut montrer que le groupe des isométries de q agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs isotropes non nuls de E. Comment faisait-on pour montrer que O_n agit transitivement sur la sphère, on prenait un élément de norme 1 et on le complétait en une base orthonormée. Là, c'est pareil, sauf qu'il n'y a pas de base orthonormée.

Vidéo 4 : On présente progressivement le principe de Rayleigh ou principe du minimax en petite dimension. Il s'agit d'une caractérisation géométrique des valeurs propres. On en donne une application amusante sur une fonction trigonométrique.

Vidéo 5 : On veut montrer qu'en "écrasant" une sphère de façon linéaire sur un plan, on tombe sur l'intérieur d'une ellipse, et l'on voudrait aussi relier les éléments caractéristiques de l'ellipse avec la transformation linéaire. Encore une fois, le théorème spectral agit de façon magistrale sur les éléments.

Vidéo 6 : On attaque en deux vidéos la reconnaissance d'une conique à partir de son équation. On peut juger des coniques non dégénérées à partir de la donnée de deux données : une signature en dimension 2 et un déterminant de taille 3. Cette première vidéo permet d'éliminer les cas dégénérés.

Vidéo 7 : On donne un tableau qui permet une classification affine des coniques à partir de leur équation algébrique. Cette classification se fait grâce au théorème de Sylvester et à partir des trois mineurs principaux associés à la forme quadratique homogénéisée provenant de l'équation de départ.

Vidéo 8 : On connaissait un lien fort entre formes quadratiques et réduction avec le théorème spectral. En voici un autre en arithmétique qui permet de voir si deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sont $\mathbb{Z}$-semblables en leur associant des formes quadratiques. La $\mathbb{Z}$-similitude s'interprète alors sous forme de congruence des formes quadratiques.

3.5 Exercices de confinement : homographies

Un petit exercice de transformation homographique dans le style de la partie I de l'épreuve EP1 de l'agrégation interne 2017. On montre que la transformation de Cayley envoie la droite réelle sur le cercle unité. On montre ensuite que cette transformation envoie le demi-plan de Poincaré sur le disque ouvert unité, par deux méthodes, une calculatoire, et l'autre topologique.

3.6 Exercices en Arithmétique (12 vidéos)

(Equations diophantiennes $x^2+y^2-29z^2=0$, $x^2+y^2-31z^2=0$, divisibilité d'un nombre de Fibonacci par un nombre premier, nombre d'automorphismes polynomiaux en une matrice fixée sur un corps fini, cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, divisibilité d'un nombre de Fibonacci par un nombre m, en particulier, n tel que F_n se termine par k zéros en décimal, équation de Pell-Fermat et structure de groupe monogène, puis équation de Pell-Fermat et fractions continues, puis la bataille de hastings : $x^2-13y^2=1$, le problème du nombre de racines m-ièmes d'une matrice compagnon avec le lemme de Hensel)

Vidéo 1 : On résout ici l'équation diophantienne $x^2+y^2-29z^2=0$ en mettant l'accent sur la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Vidéo 2 : On avait déjà vu dans une vidéo sur les "Structures quotient" que $x^2 + y^2 - 31z^2 = 0$ avait pour seule solution $(0, 0, 0)$. Ici, on le montre à la suite de la vidéo "Arithmétique 1" comme application immédiate de la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Vidéo 3 : On avait déjà vu dans une vidéo sur les "Structures quotient" que $x^2 + y^2 - 31z^2 = 0$ avait pour seule solution $(0, 0, 0)$. Ici, on le montre à la suite de la vidéo "Arithmétique 1" comme application immédiate de la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Vidéo 4 : On étudie la divisibilité de la suite des nombres de Fibonacci F_n par un nombre premier fixé p. On montre qu'il existe une fonction telle que p divise F_n si et seulement si (p) divise n... Et nous voici embarqués dans de curieuses considérations de savoir si 5 est un carré modulo p. Pas si curieuses au final, si l'on sait que l'équation caractéristique de la suite récurrente qui définit les nombres de Fibonacci est $X^2 - X - 1$, de discriminant 5. Errata, à un moment je dis que $b^2 + ab - a^2 = (b + a/2)^2 - 5a^2$, alors que c'est $b^2 + ab - a^2 = (b + a/2)^2 - 5(a/2)^2$.

Vidéo 5 : On présente dans arithmétique 4 et 5 deux exercices qui ont pour but de présenter l'utilisation classique du lemme chinois. Le premier exercice consiste à calculer le nombre d'endomorphismes polynomiaux inversibles en un endomorphisme fixé, sur un corps fini. Le lemme chinois est ici dans sa version polynomiale. La notion d'anneau local est sous-jacente.

Vidéo 5 : Voici un autre exercice sur le lemme chinois. Cette fois-ci on le retrouve dans une version matricielle. Ceci permet de calculer le nombre de matrices inversibles de taille d sur l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Vidéo 6 : Dans la vidéo Arithmétique 3, on regardait le problème de connaître l'ensemble des entiers n tels que le nombre de Fibonacci F_n soit divisible par un entier premier p. On passe maintenant du nombre premier p à un nombre entier quelconque m. On tombe sur une fonction arithmétique telle que m divise F_n si et seulement m divise n.

Vidéo 7 : Toute petite vidéo que je n'ai pas pu intégrer dans la précédente... On récolte ce que l'on a semé dans la vidéo Arithmétique 6 : on donne tous les nombres n tels que F_n se termine par exactement k zéros dans son écriture décimale. On rappelle que l'on a construit une fonction telle que m divise F_n si et seulement m divise n. Pour connaître m, il suffit donc de connaître p^k pour tout p de la décomposition en facteurs premiers de m. Et ceci est donné par une récurrence qui différencie les pas p =3 et $p = 2$.

Vidéo 8 : On présente ici l'équation de Pell-Fermat. Un résultat dit que, si d est un entier positif non carré, alors l'ensemble des solutions positives de l'équation diophantienne $x^2 - dy^2 = 1$ a une structure de groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$. On montre ici, que cet ensemble est soit trivial, soit isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Vidéo 9 : Un peu parce que l'on veut avoir le dernier mot avec l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$, un peu pour la culture générale, mais aussi, pour la beauté de la chose, on va donner un mini-cours (en deux vidéos) sur les fractions continues. Ici, on montre que si x est un irrationnel, il possède une écriture sous forme de fraction continue et que celle-ci fournit une suite de rationnels qui tend vers x et, qu'elle approxime même x de façon remarquable (on parle d'approximation quadratique).

Vidéo 10 : Certaines équations diophantiennes comme l'équation de Pell-Fermat posent des problèmes d'approximation d'un réel par un rationnel. Plus particulièrement, l'équation de Pell-Fermat pose le problème d'approche d'un nombre quadratique par un rationnel. Il est alors temps de montrer ce joli théorème de Lagrange qui dit qu'un réel est quadratique si et seulement si sa décomposition en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

Vidéo 11 : On finit par montrer, à l'aide des fractions continues, que l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ possède des solutions non triviales ! Attention à la fin, "faute de frappe" $324 + 325 = 649$ au lieu de 349 !

Vidéo 12 : Comme prétexte à présenter le petit lemme de Hensel, qui vient souvent épauler le lemme chinois, on se donne comme objectif de trouver un majorant pour le nombre de matrices M vérifiant $M^m = C$ sur un corps quelconque, où C est la matrice compagnon d'un polynôme P tel que $P(0) = 0$. Attention, errata, la borne du nombre de racines est évidemment m^s et non pas ms comme annoncé !

3.7 Un (non-)calcul de déterminant

On se propose de calculer le déterminant de la représentation réelle d'une matrice complexe. Selon comment on attaque ce déterminant, le calcul peut devenir inextricable... ou simple comme bonjour.

3.8 Entiers de Gauss, factorialité, et cercle rationnel

Vidéo 1 : On introduit tout d'abord la paramétrisation rationnelle du cercle, qui possède l'avantage de pouvoir se définir sur tout corps, contrairement à la paramétrisation trigonométrique, spécifiquement réelle. En comparant les deux paramétrisations sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, on arrive à se demander quels sont les points rationnels du cercle, dont l'angle associé est commensurable avec π. On montre que ce sont juste les points cardinaux du cercle. Il se trouve que la factorialité de l'anneau des entiers de Gauss (et ses inversibles) se cache derrière ce phénomène.

Vidéo 2 : A l'aide d'une jolie preuve qui utilise l'anneau des entiers de Gauss et sa factorialité, on a montré récemment que les points rationnels du cercle dont l'angle associé est commensurable avec pi sont les quatre points cardinaux. On montre ce même résultat par une autre méthode, proposée par Jérôme Germoni, qui utilise les polynômes cyclotomiques et l'indicatrice d'Euler.

3.9 Moyenne et variance du nombre d'invariants par la formule de Burnside

On sait que le groupe de permutation $\mathcal{S}_n$ agit sur l'ensemble des entiers de 1 à n. Combien une permutation a-t-elle, en moyenne, d'éléments fixés ? Et quelle en est la variance ? Nous allons voir que toutes les réponses à ces questions proviennent de la formule de Burnside...

3.10 Endomorphismes de l'espace des matrices qui commutent à la transposée

Un petit exercice qui se décline bien selon si on se retrouve dans le contexte d'une leçon sur la dualité, de la diagonalisabilité, ou de la trigonalisabilité. Bref, un exo mais trois méthodes !

3.11 Trouver la caractéristique de $\mathbb{K}$

Un petit exercice taquin pour occuper cette longue journée à attendre des résultats... Soit a_i, i de 1 à 27 des éléments non nuls d'un corps $\mathbb{K}$. On suppose que la suite b_i ,des sommes des a_j pour j différent de i, est une permutation des a_i. On doit montrer que cela n'est possible (et que ça l'est effectivement) pour certaines caractéristiques de $\mathbb{K}$.

3.12 Petit exercice ludique sur les matrices entières inversibles

Cinq minutes sur un petit exercice étonnant de Patrice Lassère, qui fait intervenir des matrices à coefficients entiers.

3.13 Un exercice (de style) sur les coordonnées barycentriques d'un triangle

On présente une fonction du plan affine qui s'exprime en termes de coordonnées barycentriques à partir de trois points d'un triangle, et on cherche l'image du triangle de points milieux. Je vous donne en mille de l'objet image que l'on va rencontrer...

3.14 Un exercice sur le thème "polynôme, racines et multiplicités"

Un exercice d'apparence anodine sur une racine d'un polynôme P dans $\mathbb{Q}[X]$, et une condition nécessaire sur sa multiplicité pour que cette racine soit dans le corps de base ($\mathbb{Q}$). Cet exercice résiste (car il existe !) aux approches naïves, et ce pour une bonne raison : une notion important se cache derrière le corps de base.

3.15 Le théorème de Kronecker

Voici un développement assez classique : la preuve d'un théorème de Kroenecker qui décrit les polynômes unitaires à coefficients entiers et dont les racines sont de module inférieur ou égal à 1. Ici, la preuve est axée sur la matrice compagnon.

3.16 Forme quadratique sur l'espace des matrices carrées

Un petit exercice autour d'une forme quadratique intrigante sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, elle est définie par un coefficient du polynôme caractéristique de la matrice (celui en X^{n-2}). Une fois rapportée à la forme trace, on répond à toutes les questions classiques du genre (non dégénérescence, signature sur $\mathbb{R}$).

3.17 Sous-groupes d'indice 2 d'un groupe fini

Voici un petit exercice sur l'existence d'un sous-groupes d'indice 2 dans un groupe fini d'ordre $2n$, n impair. Une application remarquable du théorème de Cayley.

3.18 Factorisez $X^{16} - X$ en irréductibles sur le corps à deux éléments

Vidéo 1 : Un exercice instructif qui nous oblige à bien maitriser la théorie des corps finis.

Vidéo 2 : Voici une autre méthode instructive pour factoriser un polynôme sur un corps fini. On a besoin ici d'un théorème, qui fournit un joli développement, qui donne des renseignements précieux sur la décomposition des polynômes cyclotomiques en irréductibles.

3.19 Sous-espaces de matrices stables par conjugaison

On va trouver tous les sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Evidemment, il sera question ici de réduction, mais aussi, curieusement, de décomposition en base 2, et on rencontrera également la jolie forme bilinéaire trace. On trouvera cet exercice dans le chapitre III de Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.

3.20 $x^3 + 7$ peut-il être un carré ?

Encore un petit exercice d'arithmétique dont nous donnerons deux méthodes. Une, élémentaire (l'utilisation du petit théorème de Fermat en est le point culminant) mais très astucieuse, et une autre, qui utilise la factorialité et la connaissance des unités de certains anneaux d'entiers quadratiques.

3.21 Equation diophantienne, estivale... et cyclotomique

Une petite équation diophantienne proposée par notre collègue Bodo Lass. Elle pourra nous apprendre à mieux comprendre les diviseurs premiers des polynômes cyclotomiques ainsi que leur utilisation.

3.22 Loi complémentaire de réciprocité quadratique (un exercice du cours de D. Perrin)

Vidéo 1 : Une preuve très simple pour montrer que 2 est un carré modulo p (impair) si et seulement si p est congru à 1 ou -1 modulo 8.

Vidéo 2 : Nous venons de voir dans une vidéo précédente que 2 est un carré modulo p (différent de 2) si et seulement si p est congru à 1 ou -1 modulo 8. Nous allons voir une méthode très analogue qui nous montre que 5 est un carré modulo p (différent de 5) si et seulement si p est congru à 1 ou -1 modulo 5. Pour finir, nous verrons que cette approche nous fait découvrir au loin, tel un sommet enneigé, un immense théorème : le théorème de Kronecker-Weber.

3.23 Sous-espaces stables et idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Un exercice élégant qui part du dénombrement de sous-espaces stables d'un espace E muni d'un certain endomorphisme et aboutit à une étude de l'arithmétique des polynômes.

3.24 Exercices sur le thème "arithmétique au secours de la réduction"

Deux exercices (plus une variante) où l'arithmétique des polynôme vient délivrer la réduction de ses problèmes de diagonalisabilité !

3.25 Un exercice qui utilise des polynômes

Comment, à l'aide de polynômes, prouver que les fonctions x^{a_i}, où les a sont des réels distincts, sont indépendantes ? A vous de jouer !

3.26 Décomposition de Dunford pour de "petits" polynômes minimaux

Un exercice instructif sur la décomposition de Dunford qui utilise Bezout, la formule de Taylor polynomiale, Cayley-Hamilton, et un certain monsieur Newton (mais ça c'est un peu spoiler). Le but du jeu est ici de calculer explicitement la décomposition de Dunford d'une matrice à "petit" polynôme minimal. Petit... au sens de la divisibilité.

3.27 Un exercice qui utilise le lemme chinois

Un petit exercice qui a l'avantage de faire le point sur toutes les techniques autour du lemme chinois. Combien y a-t-il d'entiers premiers à 120 et congrus à 3 modulo 4 ?

3.28 Utilisation de la réduction en géométrie affine- un exemple

La droite de Newton fournit un exercice classique qui peut se résoudre de plusieurs manières. Mais celle que nous proposons utilise les liens indispensables qui autorise la théorie de la réduction à venir nous sauver des problèmes de l'affine.

3.29 Utilisation de la réduction en géométrie affine- un exemple

Un exercice donnés aux oraux X-ENS et présenté par Luca Castelli. Trouver tous les groupes G tels que $\mathrm{Aut}(G)$ est réduit à l'identité. Cet exercice peut paraître surprenant, mais Luca nous va nous faire la lumière sur ce problème.

3.30 Utilisation des fractions rationnelles (dérivées de l'arctangente)

Il faut souvent se gratter la tête pour trouver des exercices ou des exemples d'utilisation dans les énoncés d'oraux de l'agrégation interne. En particulier pour l'utilisation de fractions rationnelles ! Voici un petit exemple d'application...

4 QCM, Cahiers de Vacances et propédeutique

4.1 Propédeutique

Vidéo 1 : Les nombres complexes (décomplexés) pour l'agrégation interne. Histoire de partir d'un bon pied, on passe en revue tout ce qui est utile de savoir sur les nombres complexes (constructions du corps des complexes, calcul complexe, équations en complexe, géométrie des complexes).

4.2 QCM-Roger Mansuy

Retrouvez le site des questionnaires Roger Mansuy sur www.rogermansuy.fr/HX2/

Vidéo 1 : QCM-Espaces vectoriels

Vidéo 2 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les déterminants

Vidéo 3 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur la réduction-1

Vidéo 4 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur la réduction-2

Vidéo 5 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur la réduction-3

Vidéo 6 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy-Ensembles et Applications.

Vidéo 7 : Agrégation interne- questionnaire Roger Mansuy sur les polynômes.

Vidéo 8 : Agrégation interne- questionnaire Roger Mansuy sur les suites.

Vidéo 8 : Agrégation interne- questionnaire Roger Mansuy sur les séries.

Vidéo 9 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy- Structures algébriques.

Vidéo 10 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les matrices

Vidéo 11 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur la topologie

Vidéo 10 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les séries entières

4.3 Cahiers de Vacances-Roger Mansuy

Vidéo 1 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Théorie des ensembles

Vidéo 2 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-suites réelles et complexes

Vidéo 3 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-fonctions continues

Vidéo 4 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Polynômes

Vidéo 5 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Espaces vectoriels

Vidéo 6 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Applications linéaires

Vidéo 7 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Dimension

Vidéo 8 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Matrices

Vidéo 9 : Cahier de vacances-Roger-Mansuy-Matrices 2

4.4 Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur l'arithmétique

Vidéo 1 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur l'arithmétique-1

Vidéo 2 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur l'arithmétique-2

4.5 Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les espaces euclidiens

Vidéo 1 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les espaces euclidiens-1

Vidéo 2 : Agrégation interne- Questionnaire Roger Mansuy sur les espaces euclidiens-2

4.6 Questionnaire sur les formes quadratiques

Vidéo 1 : Questionnaire sur les formes quadratiques-1

Vidéo 2 : Questionnaire sur les formes quadratiques-2

Vidéo 3 : Questionnaire sur les formes quadratiques-3

4.7 Questionnaire Groupes : Action (ou vérité)

L' avantage d'une série de questions sur les actions de groupes, c'est qu'en même temps qu'on s'entraîne groupes, on révise tout le programme d'algèbre ! Avec les groupes, jouez à plusieurs ! It's more fun to compete.

5 Correction d'épreuves

5.1 Agrégation interne Epreuve 1 2018

Correction du problème de 2018 en Algèbre que l'on peut trouver sur https ://interne.agreg.org/data/ ep1.pdf

Vidéo 1 : Dans cette vidéo, on corrige (oralement) la partie I (sauf la densité de GL_n et la question 5).

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on corrige la densité de GL_n et la question 5 de la partie I. Ce qui achèvera la partie I, et nous mettra en bonne voie vers la partie II.

Vidéo 3 : On attaque la partie II du problème. Au programme : le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA (par densité de GL_n sur les complexes), et comme conséquence, le fait que le polynôme caractéristique de $C\bar{C}$ est à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour finir, on montre que $\det(I_n + C\bar{C})$ est positif sur un ensemble Ω de matrices C.

Vidéo 4 : Correction du problème de 2018 en Algèbre que l'on peut trouver sur https ://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/18-ep1.pdf On attaque ici les parties suivantes où l'on montre que l'ensemble Ω, sur lequel il était bien agréable de travailler, est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce qui va répandre la propriété (2) dans tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Au programme : résultant, discriminant d'un polynôme, et densité d'un ouvert algébrique (on montre en fait que si P est un polynôme non nul à n variables, l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ tels que $P(x)$ est non nul, est dense dans $\mathbb{R}^n$).

5.2 Epreuve Math Géné 2020 Agreg externe (12 vidéos)

(Suites arithmético-géométriques de matrices, Gram-Schmidt, décomposition QR, inégalité d'Hadamard, Cantor-Zassenhaus pour une méthode probabiliste visant à factoriser un polynome sur corps fini, inégalité de Minkowski pour trouver un vecteur dans un réseau, algorithme LLL)

Vidéo 1 : En attendant les résultats (demain normalement)... On présente le problème de l'épreuve de mathématiques générales 2020 en mathématiques. On présente les différentes composantes du problème, ses qualités et ses défauts, autant dans son intérêt mathématique que dans ses capacités évaluatrices. Dans les prochaines vidéos (de 2 à 11), on rentrera dans les détails, sans toutefois se substituer à un corrigé.

Vidéo 2 : On présente les suites arithmético-géométriques dans$\mathbb{C}^n$. Ce sont des suites de vecteurs de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$, où A est une matrice carrée et B un vecteur. Si 1 n'est pas dans le spectre de A, alors, c'est moralement une suite géométrique (à changement de variable près) et si A est la matrice identité, c'est une suite arithmétique. Dans les cas qui vont nous intéresser, c'est le lemme des noyaux qui fera le tri.

Vidéo 3 : On montre l'inégalité dite de la borne de Cauchy qui donne un bon majorant pour les module des racines d'un polynôme complexe P. On va en donner un corollaire qui donne une borne aux modules des coefficients des polynôme unitaires qui divisent P.

Vidéo 4 : Voici un lien classique (déjà discuté dans la vidéo 2 du "théorème du confinement") entre la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, la décomposition QR, et l'inégalité d'Hadamard.

Vidéo 5 : Une factorisation d'un polynôme sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ peut être une bonne étape pour la factorisation sur $\mathbb{Z}$. On commence pour cela par factoriser le polynôme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ en polynômes u_d, non nécessairement irréductibles, tels que leurs facteurs irréductibles soient de degré d. On montre dans cette vidéo comment effectuer cette première étape. Cette "stratification" par les polynômes u_d utilise le fait que $\mathbb{F}_p$ est un corps parfait, ou, plus simplement, que les polynômes $X^{p^d} - X$ n'ont pas de multiplicité quand on les décompose en facteurs de degré 1. Ensuite, on utilise un simple algorithme d'Euclide. On verra la seconde étape dans la prochaine vidéo.

Vidéo 6 : On procède maintenant à la seconde étape de la factorisation d'un polynôme sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La première étape nous ramène au cas où f se décompose en facteurs irréductibles de même degré d. On utilise une méthode probabiliste audacieuse due à Cantor et Zassenhaus : on choisit un polynôme g de degré strictement inférieur à celui de f. Si $\mathrm{pgcd}(f, g)$ est non trivial, on casse le polynôme en deux et on continue sur ses morceaux. Si $\mathrm{pgcd}(f, g) = 1$, on remplace g par $g^k - 1$ avec $k = (p^d - 1)/2$ et on voit que l'on toutes les chances d'obtenir $\mathrm{pgcd}(f, g)$ est non trivial avec ce nouveau polynôme g.

Vidéo 7 : On présente ici succinctement le résultant. Il s'agit d'un déterminant qui permet de voir si deux polynômes sont ou non premiers entre eux. Lorsque les deux polynômes sont à coefficients entiers, on peut les réduire modulo p premier et voir, grâce à la réduction du résultant, si les deux polynômes réduits sont ou non premiers entre eux. Si p est assez grand par rapport aux coefficients des deux polynômes, l'inégalité d'Hadamard va montrer que les deux polynômes sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il sont premiers entre eux sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. C'est d'autant plus fort que la décomposition modulo p est plus simple à vérifier que dans $\mathbb{Z}$.

Vidéo 8 : On attaque l'articulation du problème d'agrégation MG 2020. Il s'agissait de comprendre un algorithme permettant de factoriser les polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$. On commence par regarder la factorisation du polynôme donné modulo p assez grand par la méthode de Cantor-Zassenhaus (vue précédemment), puis les inégalités d'Hadamard sur le résultant permettent de remonter des informations de $\mathbb{Z}/pZ$ à $\mathbb{Z}$! On est amené à déterminer un vecteur de norme minimale dans un réseau.

Vidéo 9 : On a vu comment passer d'un problème de factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$ à un problème de recherche d'un vecteur de norme minimale dans un réseau de $\mathbb{R}^n$. Dans cette vidéo on donne une borne min et une borne max pour ce plus petit vecteur, bornes qui s'expriment en fonction de la norme des vecteurs de la base orthonormalisée (par Gram-Schmidt) d'une base fixée du réseau. La borne min va utiliser encore une fois la décomposition QR et la borne max l'inégalité de Minkowski dans les réseaux.

Vidéo 10 : Une preuve simple de l'inégalité de Minkowski qui majore le plus petit vecteur d'un réseau.

Vidéo 11 : On expose très brièvement un algorithme qui permet de transformer une base d'un réseau de $\mathbb{R}^n$, en une base du même réseau permettant d'obtenir une base d'orthogonalisation à la Gram-Schmidt dont les vecteurs ne décroissent pas trop rapidement en norme. Cet algorithme a été motivé dans la vidéo 9 lorsque l'on voulait déterminer, en un temps polynomial en n, un vecteur de norme assez petite dans un réseau.

5.3 Epreuve EP1 Agrégation interne 2020

Vidéo 1 : On va parler ici du problème d'agrégation interne 2020 (EP1). Au programme, la définition d'un drapeau total (suite emboitée de sous-espaces E_i tels que $\dim E_i = i$), l'existence d'une base adaptée pour un drapeau total, et orthonormée adaptée dans le cadre d'une espace euclidien. Enfin, on montre donne de trigonalisabilité : un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si l'on peut trouver un drapeau stable pour cet endomorphisme.

Vidéo 2 : On vient de voir qu'un drapeau (total) possède une base adaptée. On va l'appliquer au drapeau des noyaux emboîtés d'un endomorphisme, ce qui va nous fournir un drapeau stable par l'endomorphisme en question. On en profite pour prouver ce résultat souvent utile qui stipule que la suite des dimensions des noyaux emboîtés "s'essouffle". On montre ensuite que le groupes des matrices triangulaires supérieures unitaire est distingué dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles. Toutefois, il n'est en général pas distingué dans le groupe linéaire.

5.4 Epreuve 1 de l'agrégation interne 2021

Vidéo 1 : Voici une petite présentation du problème proposé pour la première épreuve de l'agrégation interne 2021. Nous ne parlerons ici que des préliminaires sur la réduction, avant de présenter ce qui sera prouvé dans les prochaines vidéos, c'est-à-dire le théorème de Burnside à l'aide d'un théorème de densité dû à Jacobson.

Vidéo 2 : On attaque le moment le plus intense de ce début de problème (qui en sera peut-être aussi la fin pour le candidat qui n'aura pas osé sauter ces questions). On transporte des problèmes d'irréductibilité dans $End(E)$ à des problèmes de semi-simplicité dans $End(E^n)$. C'est dans les deux dernières questions de la partie 2 que la beauté du raisonnement se révèlera au grand jour. Mais ce sera pour la vidéo prochaine...

Vidéo 3 : On finit en beauté la partie 2 avec la preuve du théorème de Burnside grâce à un résultat de semi-simplicité.

Vidéo 4 : Nous voici arrivé à la partie 3 et il semble, au moins dans un premier temps, que l'orage est passé. Tels de petits écureuils, nous allons en profiter pour grappiller quelques points avant que cela ne se couvre.

Vidéo 5 : On achève la partie 3 avec la question 13. On bascule ici dans l'arithmétique et on en profite pour réviser nos classiques.

Vidéo 6 : On finit ce volet sur cette épreuve EP1-2021 de l'agrégation interne. On parlera en diagonale des corollaires du théorèmes de Burnside : 1) le groupe unitaire engendre comme espace l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, 2) un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué d'éléments unipotent est co-trigonalisable, 3) le sous-espace des matrices magiques est engendré par les matrices de permutations. Tout se résume finalement en une alternative "semi-simplicité" ou "résolubilité" que l'on retrouve partout dans le monde de l'algèbre.

5.5 Epreuve Agrégation Externe-MG-2021

Vidéo 1 : Exercice 1. On commence une petite correction, à la volée, du problème de math géné 2021 à l'agrégation externe de mathématiques. Au menu, une intéressante incursion dans la problématique des polynômes respectant un anneau fixé. Les polynômes de Hilbert constituent un petit apéritif pour nous montrer qu'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ respectant $\mathbb{Z}$, n'est pas forcément dans $\mathbb{Z}[X]$.

Vidéo 2 : Exercice 2. L' exercice 2 portait sur une preuve "polynomiale" du déterminant de Vandermonde. Amusant, c'était justement dans les Carnets de Voyage en Algèbrie (remarque 1.3.4). Ceci nous permet de comprendre pourquoi, si $\mathbb{K}$ est une extension du corps k, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoient k sur k, sont automatiquement dans $k[X]$.

Vidéo 3 : Exercice 3. Un petit exercice qui, tout en restant dans la thématique du problème, nous permet de faire un petit tour du côté des matrices, utiliser le morphisme d'évaluation et même Cayley-Hamilton (soyons fous).

Vidéo 4 : Exercice 4. L'exercice 4 (le dernier avant d'attaquer le problème vise à montrer que si p est premier toute fonction de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans lui-même se réalise à l'aide d'un polynôme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Mais c'est tout de suite faux si p n'est pas premier, à commencer par $p = 4$.

Vidéo 5 : Partie I-Q1-2-3. C'est fou ce que peut faire un carré de chocolat dans un cerveau fatigué par quatre exercices d'agreg !

Vidéo 6 : Partie I-Q4-5-6-7. On reste concentré !

Vidéo 7 : Fin de la partie I. On achève ici la partie I, où l'on utilise les propriétés des polynômes de Hilbert pour caractériser les polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n qui prennent des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.

Vidéo 8 : Partie II (Q1 à 4). On attaque la partie II du problème, questions de 1 à 4. Le but est de montrer que si A est principal (et infini), on peut toujours trouver une A-base échelonnée (appelée base régulière) de $\mathrm{Ent}(A)$ (les polynomes de $\mathrm{Frac}(A)[X]$ à valeurs dans A pour tout a de A). C'est une généralisation des polynômes de Hilbert.

Vidéo 9 : Partie II (Q5). Dans ce monde confiné, il ne faut jamais bouder son plaisir ! On trouve les premiers "polynômes de Hilbert généralisés" c'est-à-dire une base régulière pour les "petits" polynômes qui envoient un entier de Gauss sur un entier de Gauss.

Vidéo 10 : Résumé sur l'épreuve MG-2021-1

Vidéo 11 : Résumé sur l'épreuve MG-2021-2

5.6 2014-EP1-Agrégation interne-parties-I-II-Discussions sur l'épreuve

5.7 Endomorphismes nilpotents à l'écrit de l'agreg (2017)

Vidéo 1 : On s'intéresse à la question I 6) de l'écrit MG-2017 de l'agrégation externe. Il s'agit de classifier les classes de similitudes de certains endomorphismes nilpotents. Cela nous donne l'occasion de faire le point sur les techniques de réduction dans le cadre nilpotent. Deux mots d'ordres : suite des noyaux itérés et scindage de ces noyaux, voir Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, chap. III.

Vidéo 2 : Après avoir résolu cette question sur la classification des classes de matrices nilpotentes d'indice 2 en dimension 4, on tente quelques variantes (pour le plaisir). Quelles sont les classes de similitudes de matrices nilpotnetes a) d'indice 2 en dimension n b) dont le noyau est de dimension 1 c) d'indice 3 en dimension 6.

5.8 Polynômes d'Hermite-EP2-Agrégation interne-2019

Vidéo 1 : La seconde épreuve à l'agrégation interne de 2019 parlait des polynômes d'Hermite en première partie. Nous allons suivre la trame de l'épreuve pas à pas, à la découverte de l'univers des polynômes orthogonaux. Au menu, Gram-Schmidt et intégration par partie.

Vidéo 2 : La seconde épreuve à l'agrégation interne de 2019 parlait des polynômes d'Hermite en première partie. Nous allons suivre la trame de l'épreuve pas à pas, à la découverte de l'univers des polynômes orthogonaux. Au menu, petites formules classiques, mais surtout une jolie technique qui marche tout le temps pour montrer que les polynômes orthogonaux sont scindés simples sur $\mathbb{R}$.

Vidéo 3 : On sort ici du cadre de l'épreuve EP2- Agrégation interne de 2019, pour parler pour parler justement des classiques du genre auxquels nous avions échappés cette année-là. Tout d'abord l'entrelacement des racines entre deux polynômes orthogonaux successifs, et ensuite l'application historique des polynômes orthogonaux aux calculs d'intégrales par la méthode de quadrature de Gauss.

5.9 Epreuve 1-2022 de l'agrégation interne

Vidéo 1 : On se propose ici de donner des éléments de correction de l'épreuve 1 de l'agrégation interne 2022, et ce, jusqu'à la partie IV, car il serait étonnant que quelqu'un soit allé plus loin. L'objectif ici est plutôt de voir un peu ce qui était faisable plutôt que de regarder ce joli problème dans son ensemble. Dans cette première partie, je vais donner de cette épreuve ma vision en tant que préparateur.

Vidéo 2 : On attaque le "vrai-faux", une nouveauté dans l'épreuve.

Vidéo 3 : Voici maintenant l'exercice préliminaire (on devrait dire l'enquête préliminaire ?) où il était question de prouver, si besoin est, le théorème de Cayley-Hamilton.

Vidéo 4 : Voici maintenant la partie I où il était question de racine n-ième d'une matrice symétrique positive réelle de taille p.

Vidéo 5 : Voici maintenant la partie II, avec au programme des fonctions symétriques élémentaires, des fonctions invariantes par similitude, et surtout, de l'arithmétique modulaire. C'est malgré tout une partie assez simple (quand on s'y connaît un minimum).

Vidéo 6 : Voici maintenant la partie III, qui concerne l'étude d'une extension de corps (mais sans vraiment le dire, car ce n'est pas au programme, et en plus, on n'a pas besoin de l'outillage habituel de la théorie)

Vidéo 7 : Voici maintenant la partie IV, qui demandait une certaine expérience sur les extensions de corps. On arrêtera les corrections détaillées sur cette partie.

Vidéo 8 : Après avoir corrigé en détail jusqu'à la partie IV, on finit par un grand balayage, façon salon de coiffure, des parties de l'épreuve 1 de l'agrégation interne 2022. Le bonheur est-il au bout de l'ascension ? On verra tout de même que la fin proposait des idées intéressantes sur des théorèmes de descente sur $\mathbb{Z}$ par la théorie des réseaux.

Vidéo 9 : On a déjà fait une série de vidéos sur les réseaux à l'agrégation, mais quoi de mieux que de le faire sur l'exemple ! ici, il s'agit de la partie VIII de l'épreuve 1 de l'agrégation interne de 2022.

5.10 MG-2018-les exercices préliminaires

Une correction de la partie "exercices préliminaires" du problème de mathématiques générales de 2018.

5.11 Epreuve MG-2022

Vidéo 1 : Cette année, de la théorie des représentations dans le problème, mais était-il possible en 6 heures d'y accéder pour la plupart des candidats, avec des exercices à tiroirs et parmi eux, quelques questions où l'on pouvait facilement s'embourber. Vous allez me dire, il n'y a qu'à les sauter, et hop ! Pas si simple quand le jury annonce une politique anti-grapillage...

Vidéo 2 : Pas si simple cet exercice 1... Mais enfin, fallait regarder ma chaîne où l'on a dévoilé tous les arcanes des équations matricielles :-)

Vidéo 3 : L' exercice 2 était sympathique jusqu'à la question 6 qui a dû renvoyer pas mal de candidats dans les cordes ! Mais abandonner est parfois plus dur que persévérer, et il faut parfois savoir sauter des par dessus les questions, quitte à transformer l'épreuve en un 110 mètres haie.

Vidéo 4 : Une fois passés les embouteillages des deux premiers exercices, la circulation devient plus fluide : avec un minimum d'habitude des corps finis et des p-groupes, on circulait sans encombre dans les exercices 3 et 4.

Vidéo 5 : Un retour d'Arthur Meyer qui nous a fait une proposition convaincante sur la question 6a, et qui utilise la question précédente dans l'esprit du problème, réglant à la fois un problème mathématique et la paix dans le monde !

Vidéo 6 : Nous avons corrigé les 4 exercices de l'épreuve maths géné de l'agrégation externe 2022. Nous allons maintenant tenter de corriger le problème qui se trouve être le premier (et certainement pas le dernier) problème sur la théorie des représentations à l'agrégation externe. Mais, dans cette théorie, il est surtout important de se familiariser avec les objets et les méthodes. Ce que nous allons faire dans un premier temps...

Vidéo 7 : Correction des parties I et II du problème de mathématiques générales 2022

Vidéo 8 : Correction des parties III et IV du problème de mathématiques générales 2022

Vidéo 9 : Correction des parties V et VI du problème de mathématiques générales 2022.

5.12 Sujet EP1-Agrégation interne–2008

Vidéo 1 : Le sujet EP1 d'agrégation interne de 2008 est particulièrement confondant : il ne demande que très peu de connaissance (projection, matrices élémentaires, sommes directes, dualité) mais une bonne maîtrise du sujet. Voici déjà la correction d'une partie I très instructive qui nous mènera au théorème de Skolem-Noether.

Vidéo 2 : Voici maintenant la correction de partie II, on l'on verra que sur le corps des complexes, une sous-algèbre de End(E) n'ayant pour sous-espace stable que les sous-espaces triviaux est égale à End(E). On verra à la fin un contre-exemple sur R, avec une sous-algèbre irréductible bien connue depuis la terminale (!).

6 Leçons et développements

6.1 Leçon 113 (ou 152) sur le déterminant

Vidéo 1 : Le déterminant est l'outil central de l'algèbre linéaire. On propose ici un 6 minutes (en fait, 6'40") dans le cadre d'une leçon à l'agrégation externe (ou interne). Tout doit reposer sur le caractère n-linéaire alterné du déterminant qui lui permet de détecter les relations linéaires.

Vidéo 2 : On passe ici à des petites questions de savoir-faire sur le déterminant dans le cadre de questions à un oral d'agrégation.

Vidéo 3 : compléments et développements

6.2 Leçon 107-Représentations linéaires d'un groupe fini

Vidéo 1 : Il s'agit d'une vidéo de conseils sur la leçon 107 sur la théorie des représentation. Le principal conseil est de ne pas perdre pied avec l'aspect concret des choses. On fait ici la différence entre caractère et représentations, entre caractère irréductible et fonction centrale de norme 1. On donne des contre-exemples au théorème de Maschke et enfin, on décrit matriciellement toutes les définitions de base de la théorie ainsi que le théorème de Maschke.

Vidéo 2 : Un petit 6 minutes (qui dure en fait dix minutes) sur la théorie des représentations à l'oral de l'agreg externe .

Vidéo 3 : On propose ici deux petits exercices simples qui mettent le théorème de Maschke en relation avec la réduction. On propose ensuite quelques développements bienvenus dans la leçon.

6.3 Leçon 161-Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Vidéo 1 : La leçon 161 porte sur les isométries et distances en géométrie euclidienne (affine, mais on verra que c'est un pléonasme). On essaie de tailler un choix parmi les innombrables sujets que l'on pourrait exposer.

Vidéo 2 : On amorce la première partie du plan, que l'on appelle en général... généralités. Une petite preuve du fait que toute isométrie est affine et une autre sur la réduction des endomorphismes orthogonaux. On parle aussi de la décomposition réduite des isométries avant d'attaquer le tableau de classification des isométries en dimensions 2 et 3.

Vidéo 3 : On passe maintenant au chapitre II du plan. Une étude de type "groupe et topologie" des isométries, en fait, plus précisément, du groupe orthogonal. On donne la preuve (classique) que le groupe spécial orthogonal est engendré par des retournements.

Vidéo 4 : On continue sur l'étude du groupe O_n, avec, d'une part les sous-groupes finis, qui se trouvent être, à conjugaison près, les sous-groupes finis de GL_n,et enfin l'indispensable apport de la topologie qui va nous amener à l'homéomorphisme de décomposition polaire et de la simplicité de SO_3. On clôt le chapitre avec l'apport des corps dans l'étude des isométries en dimension 2 et 3.

Vidéo 5 : Nous voici rendu au chapitre III du plan sur l'optimisation des distances. Une affaire de goût bien entendu, mais qui nous amènera à des problèmes de compacité, d'extrema liés, calcul différentiel, et vers des problèmes de billards et de lois de la réflexion.

Vidéo 6 : On s'attaque progressivement au problème du billard, en une bande, puis trois bandes, et on finit par parler du billard elliptique (en finissant par une référence). Dans les deux premières situations, on donnera une preuve utilisant la géométrie synthétique, qui utilise les symétries, et une autre avec la géométrie analytique, en utilisant le calcul différentiel et les extrema liés.

Vidéo 7 : Voici le dernier volet sur la leçon 161. On parle de la distance à un convexe fermé, le point de Fermat, la distance d'une matrice au groupe orthogonal... On passe alors à des petites questions de jury dont le but est de tester quelques connaissances, mais surtout quelques réflexes.

6.4 Leçon 126-Agrégation externe-équations en arithmétique

Vidéo 1 : La leçon 126 est une modification de la leçon sur les équations diophantiennes. Mais avec le nouveau titre "équations en arithmétique" le spectre s'élargit considérablement. Il est temps de mettre de l'ordre dans nos idées !

Vidéo 2 : On tente un plan possible pour cette leçon. Parler tout d'abord, des équations linéaires, puis quadratiques, et enfin, le rôle des groupes dans les équations de l'arithmétique. Ce vole traîte rapidement (mais y -t-il beaucoup plus à dire ?) du cas linéaire.

Vidéo 3 :On se consacre aux équations quadratiques en arithmétique. En fait, pas toutes, parce qu'on garde le meilleur pour la fin, c'est-à-dire pour la partie III sur le thème groupes et géométries.

Vidéo 4 : Quelques premiers liens entre groupe et arithmétique et qui peuvent se placer dans la leçon 126

Vidéo 5 : On regarde ici les problèmes d'équations quadratiques qui peuvent se régler à l'aide de groupes (comme la loi de réciprocité quadratique, ou le cardinal d'une quadrique). Enfin, on parle de résultats en vrac, difficile à classer dans cette leçon (théorème de Chevalley-Warning, cardinal du cône nilpotent, équation de Fermat à l'ordre n)

Vidéo 6 : Quelques équations typiques autour des techniques de base de la leçon (lemme de Gauss, lemme d'Euclide, Bezout, dénombrement de solutions à l'aide de séries génératrices, existence de solutions par cardinal d'une réunion, passage au quotient, cyclicité de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$...)

Vidéo 7 : Pour finir avec la leçon 126, une question de jury plus difficile (mais authentique !). Il s'agit d'une équation de Mordell, où il faut balayer le programme. Tout y passe, anneaux euclidiens, principaux, factoriels, unités de l'anneau, normes, éléments premiers entre eux... Mais ceci n'est que pretexte à discussion, personne ne s'attend à ce que vous puissiez résoudre une telle équation, où alors, ça cacherait quelque chose !

Leçon 122-Anneaux principaux et applications-1

Vidéo 1 : La leçon sur les anneaux principaux constitue une belle occasion de réviser tout le programme d'algèbre. On peut en effet se demander ce qui échappe à l'ubiquité de cette belle notion.

Vidéo 2 : On regarde des petites propriétés générales (et des non propriétés également) des anneaux principaux. Passage à la localisation, (non)-passage à l'extension par une indéterminée. On exhibe des anneaux principaux, avec leurs inversibles, puis des anneaux non principaux, avec des (contre-)exemples d'idéaux non principaux.

Vidéo 3 : On peut évaluer des polynômes dans plusieurs contextes : l'évaluation de P dans $\mathbb{K}[X]$ en un élément a de $\mathbb{K}$, en plusieurs éléments a_i, l'évaluation en un élément algébrique sur $\mathbb{K}$, en une matrice (ou un endomorphisme), ou en un matrice localement en un éléments de l'espace. Dans tous les cas, des idéaux principaux apparaissent naturellement.

Vidéo 4 : Voici venu l'instant d'émotion de la convergence des pôles. La théorie des groupes abéliens finis n'est en fait qu'une théorie de la réduction déguisée, et réciproquement. Cayley et Hamilton ne sont que des pseudos de Lagrange.

Vidéo 5 : On commence maintenant dans cette vidéo et la suivante des petits exercices de jury (cad peu techniques, ni prise de tête, juste pour tester les réflexes et surtout la capacité de discuter avec un jury). Un exercice sur les polynômes qui s'annulent sur un corps fini, puis un problème d'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs variables. C'est ici l'occasion de travailler sur un anneau principal bien choisi proche de l'anneau de départ (qui n'est pas principal).

Vidéo 6 : Encore deux petits exercices assez rapides à poser et à résoudre dans le cadre des anneaux principaux.

6.5 Leçon 191-Agrégation externe-Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

Vidéo 1 : On présente ici quelques pistes pour cette nouvelle leçon qui peut en déstabiliser plus d'un mais qui ne manque pas d'intérêt lorsque l'on veut faire le point sur les applications de l'algèbre à la géométrie. Au programme : réduction, déterminant, formes quadratiques, groupes de transformation et leurs invariants, solides platoniciens, corps des complexes, des quaternions, homographies et cercles, théorie des représentations, théorie des corps et constructions à la règle et au compas, géométrie finie, etcetera jusqu'à plus soif !

Vidéo 2 : On va parler plus précisément de cette leçon 191, et le bon ménage que constituent algèbre et géométrie. Dans un premier temps, on parle de l'algèbre linéaire : équations de variétés, utilisation du déterminant, réduction, application à la décomposition canonique en affine.

Vidéo 3 : Toujours dans le cadre de la leçon 191. Voici que débarquent les formes quadratiques avec leur lot de coniques, quadriques, cônes d'Apollonius, et j'en passe.

Vidéo 4 : On s'intéresse ici aux nombreuses applications des groupes à la géométrie. On attaque d'abord l'utilisation de sous-groupes particuliers du groupe affine, avec le problème inverse des milieux. Ensuite, on parle de groupes d'isométries de solides platoniciens, et enfin de la recherche de sous-groupes finis de SO_3.

Vidéo 5 : On insiste ici sur les groupes de transformation. On en donne rapidement le principe : se ramener par action de groupe, et à l'aide d'un invariant de préférence, à une situation plus simple d'un problème de géométrie, tout en préservant les invariants du problème. On en donne trois exemple avec comme invariants l'alignement/barycentre, la métrique, et enfin, la cocyclicité.

Vidéo 6 : Voici le dernier volet de cette longue histoire. Il n'y aura ensuite plus qu'à faire son marché... On termine donc sur les complexes qui rendent plus digestes les similitudes du plan. Il y a des exemples à foison : théorème de Thébault, théorème de Napoléon, cocyclicité, foyers de l'ellipse de Steiner... Si à la place du plan, on veut travailler dans l'espace réel de dimension 3 ou 4, on se sert du corps de quaternions... Ensuite, on parle pêle-mêle de théorie des représentations, de théorie des corps et de la construction à la règle et au compas, de géométrie finie et de géométrie discrète...

Graphes (a minima) pour l'oral de l'agrégation

Vidéo 1 : On propose ici une petite discussion informelle sur les graphes. D'abord, on parlera de définitions, vocabulaire. Ensuite, de ce que les graphes veulent bien modéliser, et des problèmes que les outils développés dans la théorie veulent bien résoudre. Après avoir passé rapidement sur les algorithme, on attaque le lemme des poignées de mains, avec un joli problème... de poignées de mains.

Vidéo 2 : On regarde les longueurs de chemins le long des arêtes d'un graphe, ce qui nous amène naturellement du côté théorique, vers des problème de puissances de matrices, donc de réduction, et du côté de la modélisation, vers des problèmes de type "évolution probabiliste". Ensuite, on s'intéresse aux graphes sous-jacents de polyèdre. On peut alors, rien qu'avec la structure de graphe, classifier les solides platoniciens, et voir que l'on ne pourra jamais paver un ballon de foot avec des hexagones, ce qui ne nous a pas empêcher de gagner le mondial en 1998...

Vidéo 3 : On termine avec quelques petites choses sur le nombre chromatique et des petites choses afférentes.

6.6 Leçon 125-Extension de corps-exemples et applications

Vidéo 1 : On commence par quelques conseils, un 6 minutes, et quelques éléments à placer dans un plan pour cette leçon difficile.

Vidéo 2 : On passe (de façon progressive) aux questions de jury pour cette leçon 125.

Vidéo 3 : La chance ! Lipschitz, qui suit notre chaîne (continûment of course !), est passé l'an dernier (si je ne me trompe) sur la leçon, et il nous a envoyé la liste exhaustive des questions que le jury lui a posé. On fait en a sélectionné les plus intéressantes (il y avait aussi par exemple, comment montre-t-on Steinitz et fallait juste invoquer le nom sulfureux de Zorn).

Vidéo 4 : Cinq développements, sur la leçon 125 "extensions de corps, exemples et applications", un peu commentés, extraits de Cours d'Algèbre (Perrin), Carnet de Voyage en Algébrie (Caldero-Peronnier), et Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries (Caldero-Germoni)

6.7 Leçon 150-Actions de groupes sur les espaces de matrices

Une quinzaine de minutes sur la présentation de la leçon 150 : Actions de groupes sur les espaces de matrices à l'oral d'agrégation externe.

6.8 Leçon 144-Racines d'un polynôme fonctions symétriques élémentaires

Vidéo 1 : Voici une petite présentation des éléments à mettre (selon affinités) dans une leçon sur les racines d'un polynôme.

Vidéo 2 : On continue sur la leçon 144 : racines d'un polynômes. On y propose les fondamentaux de la leçon, quelques petits exercices, et certains développements.

Vidéo 3 : Questions de jury. Voici 8 questions de jury d'horizons diverses sur la leçon 144- sur les racines d'un polynôme et fonctions symétriques élémentaires

6.9 Leçon 158 Opération d'un groupe sur un ensemble, par Magali

https ://www.youtube.com/playlist ?list=PLI-uIUgbJUl5EYg-PM7cItnjMkKoteOTf

6.10 Leçon 171-Formes quadratiques réelles, coniques, exemples et applications

Vidéo 1 : Cette leçon est considérée comme "facile" pour le jury et "difficile" pour les candidats. Quel grand écart ! Peut-être le plus grand de toutes les leçons d'algèbre. On donne ici quelques indications pour le 6 minutes.

Vidéo 2 : Voici présentés ici les pièges dangereux de la leçon...

Vidéo 3 : Nous voici rendus aux questions de jury (qui ont réellement été posées à l'oral !)

Vidéo 4 : Voici quelques développements raisonnables, que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Algébrie et Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.

6.11 Leçon 149-Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres.

Vidéo 1 : Une nouvelle leçon est tombée à l'agrégation externe "Valeurs propres-Vecteurs propres. Calculs exacts et Approchés des éléments propres. Applications." On va donc commencer une petite série de vidéos sur le sujet. On commence par quelques commentaires au sujet du rapport sur cette leçon.

Vidéo 2 : Une nouvelle leçon est tombée à l'agrégation externe "Valeurs propres-Vecteurs propres. Calculs exacts et Approchés des éléments propres. Applications." Voici donc une petite série de vidéos sur le sujet. Pour commencer, voici quelques généralités qui permettent de bien démarrer sur cette leçon.

Vidéo 3 : Une nouvelle leçon est tombée à l'agrégation externe "Valeurs propres-Vecteurs propres. Calculs exacts et approchés des éléments propres. Applications." Voici donc une petite série de vidéos sur le sujet. Pour commencer, voici ce qui semble être le coeur de la leçon : localiser les valeurs propres, approximer les éléments propres. Au programme : rayon spectral, suites géométriques de matrices, méthode des puissances (et déflation si affinité), Perron-Frobenius, le tout, suivi de la méthode QR, et, pourquoi pas, le théorème d'entrelacement de Cauchy.

Vidéo 4 : Une nouvelle leçon est tombée à l'agrégation externe "Valeurs propres-Vecteurs propres. Calculs exacts et approchés des éléments propres. Applications." Voici donc une petite série de vidéos sur le sujet. En voici donc quelques applications : Calcul approchés de racines de polynômes (via la matrice compagnon), suites récurrentes linéaires, allure de courbes solutions d'équations différentielles linéaires dans le plan réel, théorème de Kronecker, et bien sûr, une pléthore d'applications en théorie des représentations. Nous avons gardé pour une prochaine vidéo le lien entre valeurs propres et conditionnement d'une matrice.

6.12 Leçon 351 (interne)-Exercice avec utilisation de polynômes irréductibles.

Vidéo 1 : Voici un exercice extrait de Histoires hédonistes de groupes et géométries tome 2 (2015), (exercice II-B.15) où l'on cherche l'ordre de matrices rationnelles de taille 2. Cela fournit un bel exemple pour la leçon 351 à l'agrégation interne. Mais c'est aussi très joli juste pour le plaisir.

Vidéo 2 : Encore un exercice, plus classique, inspiré d'un exercice de l'oral en poche de Franchini, qui dit que si $P(M)$ est une matrice nilpotente, avec P un polynôme irréductible, alors le polynôme caractéristique de M est une puissance de P.

Vidéo 3 : On utilise l'irréductibilité, dans le cas des polynômes réels cette fois, pour montrer que tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés de polynômes réels. Une espèce de "théorème des deux carrés" en mode polynomial.

Vidéo 4 : Cet exercice fait le lien entre degré de polynômes irréductibles et dimension de sous-espace stable. On montre que sur $\mathbb{R}$, un endomorphisme possède toujours un sous-espace stable de dimension inférieur ou égal à 2. Ceci est en lien avec le fait qu'un polynôme irréductible réel est de degré inférieur ou égal à 2.

6.13 Leçon- Formes linéaires, dualité. Exemples et Applications

Vidéo 1 : Leçon 159 pour l'agrégation externe, 109 pour l'interne. Il s'agit d'une leçon délicate où les candidats peinent à trouver l'approche pertinente. Voici un 6 minutes et un session de questions de jury afin de préciser les choses.

Vidéo 2 : Développements-Leçons formes linéaires, dualité.
Vidéo 3 :

6.14 SO_3 est simple par Benjamin

https ://www.youtube.com/playlist ?list=PLI-uIUgbJUl5y43gcpbr8u0g8YpD9EtV

6.15 Leçon 355 (interne) : Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.

Vidéo 1 : On fait le point sur les nombreuses propriétés et caractérisations des matrices orthogonales qui leur permettent d'intervenir en algèbre linéaire (normes euclidiennes, normes subordonnées, décomposition polaire, décomposition QR, systèmes linéaires, topologie, actions de groupes, aires et volumes...)

Vidéo 2 : Après avoir vu dans une première vidéo, les propriétés des matrices orthogonales, on présente deux exercices qui mettent, à eux deux, en avant les propriétés annoncées.

6.16 Méthode de quasi-Newton par Patrick Sam Al Habobi

Vidéo 1 : Dans le format d'un développement à l'oral de l'agrégation, Patrick Sam Al Habobi nous propose une méthode de quasi-Newton pour inverser une matrice réelle. Au programme : suites de matrices, méthode de Newton, théorème spectral et normes subordonnées. Référence : Carnet de voyage en Analystan.

Vidéo 2 : On aborde ici la séance de questions sur le développement.

6.17 Méthode des puissances par Patrick Sam

Vidéo 1 : Patrick Sam Al Habobi nous présente, sous le format de développement à l'agrégation (interne ou externe), la méthode des puissances pour l'approximation de valeurs propres d'une matrice symétrique réelle. On peut trouver ce développement dans une version récente de Carnet de Voyage en Analystan. Une typo toutefois dans la récurrence, il faut lire $x_{n+1} = Sy_n$ au lieu de $x_n = Sy_n$.

Vidéo 2 : Voici le moment des questions de jury sur le développement.

6.18 Le théorème de Korovkin par Patrick Sam Al Habobi

Vidéo 1 : Le théorème de Korovkin est un théorème d'approximation de fonctions sur un compact. Il permet de prouver une convergence uniforme d'une certaine famille de fonctions à partir de très faibles hypothèses.

Vidéo 2 : Questions de jury sur ce développement.

6.19 La décomposition LU par Patrick Sam Al Habobi

Vidéo 1 : Patrick Sam nous présente la décomposition d'une matrice en une matrice triangulaire inférieure unipotente "L" et une matrice triangulaire supérieure "U".

Vidéo 2 : Patrick Sam nous a présenté la décomposition d'une matrice en une matrice triangulaire inférieure unipotente "L" et une matrice triangulaire supérieure "U". Voici des questions de jury. Il manque peut-être la question sur la complexité de l'algorithme.

6.20 La suite de polygones par Caroline

Caroline nous présente le développement sur la suite de polygones du plan complexe (Carnet de Voyage en Algébrie, 1.3.28). Au programme : réduction, convexité, barycentres, et limites de suites de matrices. Qui dit mieux ?

6.21 La décomposition LU par Patrick Sam Al Habobi

Vidéo 1 : Patrick Sam nous présente la décomposition d'une matrice en une matrice triangulaire inférieure unipotente "L" et une matrice triangulaire supérieure "U".

Vidéo 2 : Patrick Sam nous a présenté la décomposition d'une matrice en une matrice triangulaire inférieure unipotente "L" et une matrice triangulaire supérieure "U". Voici des questions de jury. Il manque peut-être la question sur la complexité de l'algorithme.

6.22 Théorème de Gauss-Lucas et application- par Patrick Sam Al Habobi

Vidéo 1 : Le théorème de Gauss-Lucas stipule que les affixes des racines de la dérivée d'un polynôme complexe (non constant) se situent dans l'enveloppe convexe des affixes des racines du polynôme. On va en déduire que si la dérivée seconde de P divise P, alors toutes les racines de P sont alignées.

Vidéo 2 : La séance de questions de jury ! Séance qui pourra en éclairer quelques uns sur la convexité.

6.23 Le collier de perle (version Kétrane)

Vidéo 1 : Sam Patrick Al Habobi nous présente la version du collier de perles du Kétrane. On compte un nombre de colliers de perles modulo l'action du groupe diédral, avec un nombre fixé de perles de couleurs données.

Vidéo 2 : Sam Patrick Al Habobi nous a présenté la version du collier de perles du Kétrane. Voici les questions de jury. Âmes sensibles s'abstenir.

6.24 Méthode de quadrature de Gauss par Caroline

Vidéo 1 : La méthode de quadrature de Gauss donne des nombres réels permettant d'intégrer un polynôme sur un intervalle à partir d'une combinaison linéaire de ce polynôme en ces réels. Le plus étonnant dans cette histoire est que l'on n'a besoin que de n réels pour un polynôme de degré 2n-1. C'est ce que va nous raconter Caroline.

Vidéo 2 : Je propose sur cette chaîne trois types de contenus. Des cours d'agrégation externe de mathématiques, des cours d'agrégation interne, et des vidéos de mathématiques pour le plaisir (qui s'adresse en général à un public possédant un master de maths ou en cours de masterisation).

6.25 Sous-groupes de R. L'alternative dense/monogène par Caroline

Vidéo 1 : Un théorème essentiel pour l'approximation des nombres réels que nous présente Caroline, sous forme de développement à l'agrégation. Il est tiré de Carnet de Voyage en Analystan.

Vidéo 2 : Quelques questions à Caroline. On parlera approximation de réels, groupes circulaire, et même fractions continues.

6.26 Les tutos de la prépa : le théorème de Riesz par Raphaël

Vidéo 1 : Le théorème de Riesz dit que si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors la boule unité de E n'est pas compacte. Voici la preuve de Raphaël dans le plus pur exercice de style du développement à l'oral de l'agrégation.

Vidéo 2 : Après le développement de Raphaël sur le théorème de Riesz, voici le moment des questions du jury. Cela donne une bonne idée de comment les choses se passent le jour J.

6.27 Nombre de solutions d'une équation dans un groupe fini et table de caractères

Vidéo 1 : Luca propose le développement de Nouvelle Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries Tome 2, Chap. XIV-A.14. Soit G un groupe fini, on veut trouver, à l'aide de la table de caractères de G, le nombre de solutions d'une équation dans G^k, où l'on impose les g_i dans des classes de conjugaison fixées.

Vidéo 2 : Questions de jury sur le développement de Luca.

6.28 Théorème de Dirichlet faible

Vidéo 1 : Théorème de Dirichlet faible- développement
Vidéo 2 : Théorème de Dirichlet faible- questions de Jury

6.29 Sous-groupes à 1 paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Vidéo 1 : On présente un développement qui peut être utile également aux épreuves écrites (voir Agreg interne EP1-2014) sur les morphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suit l'exercice III-F-17 de Nouvelles Histoires Hédonistes de Géométries.

6.30 Résoudre un système de congruence par Caroline

Vidéo 1 : Système de congruences tel qu'il est fait dans Carnet de Voyage en Algébrie, Exercice 4.2.8. Attention, on n'est pas dans la situation "premiers entre eux".

6.31 Les tutos de la prépa : le théorème de Bohr-Mollerup par Audrey 1 et 2

6.32 Les tutos de la prépa : méthode de Newton pour la décomposition polaire par Antoine 1 et 2

6.33 Les tutos de la prépa : le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{F}_p)$ par Clément

6.34 Les tutos de la Prépa : le groupe du tétraèdre par Rozenn

6.35 Les tutos de la prépa : $Y' = AY$, les courbes solutions par Aurélien

6.36 Les tutos de la prépa : L'ellipse de John-Loewner par Myriam

6.37 Les tutos de la prépa : la décomposition polaire par Dom

6.38 Optimiser l'aire d'un triangle inscrit dans deux cercles tangents

Un petit développement qui mêle savamment, cercles, triangles, géométrie, calcul différentiel, trigonométrie et topologie...

6.39 Condition de cocyclicité de quatre points par Caroline

Voici un critère de cocyclicité de quatre points A,B,C,D : l'existence d'un quadruplet de réels non tous nuls a,b,c,d tels que pour tout point M, $aAM^2+bBM^2+cCM^2+dDM^2 = 0$.

6.40 Fonction zeta sur les entiers naturels pairs par Caroline

La fonction zeta associe à s supérieur à 1 la somme des $1/n^s$. On sait souvent montrer en licence que l'image de 2 est le fameux $\pi^2/6$. La généralisation de cette formule aux entiers pairs demande les nombres de Bernoulli, et plus généralement un mélange d'intégration de polynômes de Bernoulli et de décomposition en séries de Fourier.

6.41 Fonction Gamma, premières propriétes par Caroline

Caroline présente ici les propriétés de base de la fonction Gamma sous un format de développement. On peut trouver la source dans Carnet de Voyage en Analystan.

6.42 Les nombres de Bell par Séverine

Séverine nous présente une formule donnant le n-ième nombre de Bell, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n, dans sa version analytique. Le format est celui d'un développement et il s'en suit une petite séance de questions.

6.43 Noyau de Fejér par Florence

Florence propose de nous parler du noyau de Fejér dans le cadre de la convergence des séries de Fourier. Il suivra de ce développement une petite séance de questions.

6.44 Volumes et décomposition polaire

Un petit développement pour l'utilisation de la décomposition polaire, cette fois-ci appliquée à la préservation des volumes. On refait ici la preuve de l'existence de la décomposition polaire pour une matrice (inversible ou pas).

6.45 Critère de nilpotence par la trace et application

Voici une preuve express du critère de nilpotence par la trace que l'on peut trouver dans Carnet de Voyage en Algébrie. Tellement express qu'on peut se permettre d'y ajouter une application, courte, mais élégante.

6.46 Lemme de Zolotarev- 2 est-il un carré modulo p ?

Le lemme de Zolotarev crée un lien entre le symbole de Legendre de a modulo p et la signature de la multiplication par a. Voici une brêche entre arithmétique et groupes de permutation !

6.47 Théorème de Kronecker. La preuve la plus simple ?

Voici, à un niveau où le pré-requis serait le programme de master (on va dire, à un niveau "agreg externe", ma preuve préféré du théorème de Kronecker , classique parmi les développements à l'oral, qui dit que tout polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ ayant des toutes ses racines de normes inférieures ou égales à 1, possède des racines soit nulles soit racines n-ième de l'unité.

6.48 Volume de la n-boule et intégrale de Wallis

Comment évolue le volume de la boule de rayon 1 en dimension n ? Pour $n = 1$, on a $V = 2$, pour $n = 2$, le merveilleux nombre π, et pour $n = 3$, le célèbre $4/3\pi$. Et quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?

6.49 Décomposition en carrés.

Vidéo 1 : Théorème des quatre carrés. Un développement technique mais toutefois élémentaire : tout entier naturel peut se décomposer en somme de quatre carrés. On utilisera une méthode de descente de Fermat. On discutera ensuite d'une preuve alternative plus savante qui généralise une preuve du théorème des deux carrés bien connue des agrégatifs !

Vidéo 2 : Théorème des deux carrés par les réseaux du plan. Une suggestion de notre follower "Pastix51" dont un de ses développements préférés a été cette jolie méthode de géométrie arithmétique pour prouver le théorème des deux carrés.

Vidéo 3 : Décomposition en carrés et réseaux cubiques. A la suite d'une conversation avec Pastix51, je constate que les théorèmes de décompositions en carrés peuvent être prouvés élégamment, de façon uniforme, et surtout de façon assez élémentaire, à l'aide de réseaux "cubiques". En épilogue, dans une tentative d'appel à l'aide, je constate un lien avec les sous-espaces totalement isotropes maximaux (SETIM).

6.50 Diagonalisabilité : le critère de Klarès

Vidéo 1 : Une preuve ravissante qui peut fournir un développement agréable dans le cadre d'une leçon sur la réduction ou sur les formes quadratiques. On peut le trouver dans le chapitre II de Carnet de Voyage en Algébrie.

6.51 Leçon 105- Groupe de permutations d'un ensemble fini, applications

Vidéo 1 : La leçon 105 (102 pour l'agrégation interne) parle d'un groupe, et pas n'importe lequel : le groupe des permutations d'un ensemble fini. On verra pourquoi ce groupe peut être vu comme la mère porteuse de tous les groupes finis, puis on en détaillera l'étude, selon la procédure à suivre pour tout bon groupe qui se respecte : générateurs, classes de conjugaisons, sous-groupes distingués, caractères, avant d'attaquer les nombreuses (et surtout diverses !) applications.

Vidéo 2 : Quelques exercices simples ou parfois (clairement !) moins simples, tout en restant classiques, autour de la leçon sur le groupe symétrique. On utilise de façon essentielle : les systèmes de générateur de S_n, la formule de conjugaison, les centres, les groupes dérivés, l'ordre d'une permutation, la simplicité de A_n ainsi que les sous-groupes distingués de S_n, et bien sûr la signature, le hobbit de l'algèbre !

Vidéo 3 : On présente une série de développements classiques et moins classiques autour de la leçon sur les groupes de permutations. On tentera pour chaque développement de décrire les grandes lignes de la preuve.

6.52 Leçon 101- Groupe opérant sur un ensemble- Applications

Vidéo 1 : Une leçon aussi riche que passionnante à laquelle on va se confronter au mépris du danger ! Et le danger ici, c'est qu'il y a tellement de belles choses à raconter qu'on pourrait s'y perdre. On commence ici avec un 6 minutes sur la leçon. Allez, 9 minutes...

Vidéo 2 : Quelques questions de jury autour de la leçon 101. Elles tournent autour de l'utilisation de la définition des actions de groupes, via les morphismes de groupes, la formule des classes, le principe de conjugaison-translation, la possibilité de ramener un problème à sa forme normale, l'utilisation de l'isomorphisme canonique associé au morphisme d'action, le dénombrement d'une orbite par le calcul de l'ordre du stabilisateur...

Vidéo 3 : Quelques développements sur cette leçon 101 (groupe opérant sur un ensemble) que l'on pourra trouver dans Carnet de Voyage en Algébrie et Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.

7 Petites questions de jury et gestes-barrière.

7.1 Questions d'oral à l'agreg externe (arithmétique)

Vidéo 1 : Deux petits exercices étonnants autour d'une leçon sur les anneaux factoriels. Un qui illustre une application de l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[i]$, et l'autre, plus simple est un application du critère d'irréductibilité d'Eisenstein.

7.2 Questions d'oral à l'agreg externe (algèbre linéaire)

Vidéo 1 : On donne des petits exemples de questions de jury en insistant sur la façon dont ces questions peuvent être présentées. On est partis sur une série sur le thème (ouvert dense) de l'algèbre linéaire.

Vidéo 2 : On regarde de plus près les propriétés de la comatrice. Tout d'abord, on va aller plus dans le cas particulier de la matrice carré A de rang n-1. On sait que com(A) est de rang 1, mais comment caractériser les coefficients de proportionnalité dans la comatrice ? Ensuite, nous discutons de petits problèmes afférents : trouver det(com(A)), com(com(A)), résoudre com(A) $= A$. A chaque fois, face au jury, l'abordage du problème par les cas extrémaux (A nulle, A inversible) est un bon moyen de négociation.

Vidéo 3 : Quelques questions de jury pour tester des réflexes sur les problèmes de dimensions d'espaces vectoriels.

Vidéo 4 : Voici une petite liste d'exercices pour s'entraîner sur la dualité. Il faut arriver dans cette leçon avec une solide notion du rôle de l'orthogonalité dans les transformations d'un problème vers un "problème dual", une fois sur deux, plus facile à résoudre.

Vidéo 5 : On pose des petits exercices sur les endomorphismes diagonalisables en insistant sur une panoplie de réflexes à avoir. Parfois les problèmes de multiplicités algébriques et géométriques peuvent aider, mais ce sont surtout l'aide des polynômes d'endomorphismes qui va nous sauver dans des situations difficiles.

Vidéo 6 : On continue sur le thème de petits exercices de jury sur les matrices diagonalisables en lien avec le critère du polynôme annulateur scindé simple.

Vidéo 7 : Voici des petites questions de jury autour du thème "réduction et topologie". Beaucoup de choses s'articulent autour du fait que l'application qui, à une matrice carrées complexe A, associe son polynôme caractéristique, est continue. La densité des matrices diagonalisables (en complexe !) est un incontournable du genre.

Vidéo 8 : On continue sur les petites techniques de topologie en réduction. On commence avec les deux contre-exemples clef à bien connaître et ce qu'ils impliquent topologiquement. Ensuite, on disserte sur ce schéma classique qui consiste à étudier un problème lié à la réduction : 1. sur $\mathbb{C}$, 2. sur ses matrices diagonales, 3. sur ses matrices diagonalisables et enfin, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.

Vidéo 9 : Au programme du jour : les matrices nilpotentes. Il y sera abordé les aspects "invariants de similitude", topologie, dénombrement sur corps fini, critères par les drapeaux, et cotrigonalisation.

Vidéo 10 : Dans cette dernière vidéo en algèbre linéaire, on se prépare à une question emblématique de la leçon sur les sous-espaces stables (réputée difficile). Pour cela, on observe comment le lemme des noyaux peut nous aider, à l'aide d'une propriété (et on n'insistera jamais assez sur le caractère exceptionnel de la distributivité) du lemme des noyaux, et de deux situations extrêmes sur les sous-espaces stables d'endomorphismes nilpotents.

7.3 Question d'oral à l'agreg externe (Groupes finis)

Vidéo 1 : On va s'intéresser aux petites questions de jury autour des groupes finis. Dans ce premier volet, on s'intéresse particulièrement aux groupes abéliens finis, et leur rapport, via le théorème de structure, à l'arithmétique des nombres. En suite, toujours lié au théorème de structure, l'omniprésence des groupes cycliques nous entraîne vers l'étude des homomorphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. C'est un véritable exercice de synthèse où se mêlent une pléthore de techniques à bien connaître sur les groupes (annulateurs, réciproque de Lagrange dans le cas cyclique, passage au quotient).

Vidéo 2 : Cette fois-ci on se concentre sur les actions de groupes (finis) sur des ensembles finis, qui donnent lieu à des propriétés arithmétiques (divisibilité) prêtes à être exploitées. On travaille en particulier sur les p-groupes et les p-Sylow.

Vidéo 3 : Ici, on s'intéresse à des petits problèmes de commutation dans le groupe des permutations. Ils se règlent en général à coup de "formule de conjugaison". On traite aussi de la question de l'étude de $\mathcal{S}_4$ et ses p-Sylow.

Vidéo 4 : On mélange les plaisirs avec des exercices transversaux demandant des techniques de groupes finis (Lagrange, formule des classes...) et réduction (trigonalisation, diagonalisation, matrices compagnon, polynômes d'endomorphismes...). Bref, on étudie certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

7.4 Question d'oral à l'agreg externe (Réciprocité quadratique)

Vidéo 1 : Toujours dans la série des questions de jury. Quelles sont les thèmes développés autour de la réciprocité quadratique ?

Vidéo 2 : On regarde plus particulièrement le développement de la loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (il faut rendre à César ce qui appartient à César). On le regarde dans ses petits détails que pourraient questionner un jury, et dans ses extensions.

7.5 Question d'oral à l'agreg externe (Anneaux et corps)

Vidéo 1 : Quelques questions de jury de plus sur les anneaux et les corps. Au programme, extension, degré, polynôme minimal, factorialité, PGCD-PPCM, polynômes symétriques élémentaires, polynômes cyclotomiques modulo p...

Vidéo 1bis : L'injection du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{p^2})$ dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_p)$ est totalement naturelle et pourtant elle a été assez mal comprise, si j'en crois les retours de ceux qui ont visionné la vidéo 1. J'essaie d'expliquer que tout repose ici sur "l'oubli" que $\mathbb{F}_{p^2}$ est un corps, en se concentrant uniquement sur sa structure de $\mathbb{F}_p$-espace. C'est peut-être dans ce lâcher prise que réside toute la difficulté...

Vidéo 2 : Ici, il sera question de polynômes annulateurs d'un entier algébrique, irréductibilité, et donc critères par le degré d'une extension, et surtout le théorème de la base télescopique. On verra comment le phénomène d'unicité d'une extension de degré fixé dans le monde des corps finis, fait que le polynôme irréductible trouvé sur $\mathbb{Z}$ se décompose modulo p pour tout p. On passera ensuite en revue les corps algébriquement clos à connaître pour l'oral.

Vidéo 3 : Un dernier pour la route (de l'oral). Des polynômes cyclotomiques, la limite de la fonction indicatrice d'Euler, un lemme de Gauss pour les extensions de corps et son application au maintien de l'irréductibilité d'un polynôme par extension.

7.6 Exercice sur la leçon "déterminant"

Vidéo 1 : Sur la leçon déterminant, un type d'exercice dans la discussion avec le jury consiste à vérifier si le candidat a bien compris l'importance et l'utilisation de l'unicité, à scalaire près, d'une n-forme linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n. L'exercice que l'on présente ici fait est emblématique de ce type de question.

8 Goodies, pepitos et autres divertissements mathématiques

8.1 Divisibilité dans les nombres de Fibonacci et de Lucas

Vidéo 1 : Un petit exposé de Denis Roussillat. Pour un nombre premier p fixé, Denis étudie la condition "p divise F_n" et "p divise L_n", où (F_n) et (L_n) désignent respectivement la suite de Fibonacci et la suite de Lucas, cette dernière étant à la première ce que le sinus est au cosinus. Dans un premier temps, après avoir fait quelques remarques d'ordre empirique, on explique une jolie propriété de périodicité pour la première condition.

Vidéo 2 : Et voici un critère portant sur le rang pour qu'un nombre premier divise un nombre de Lucas.

Vidéo 3 : On veut montrer que l'ordre $b(p)$ d'apparition d'un nombre premier p dans la suite de Fibonacci divise $p-1$ ou $p+1$ selon les congruences de p modulo 5. Même si on pourra trouver des méthode plus directes, celle-ci fait visiter un bon nombre de parties du programme de l'agrégation et peut devenir un joli développement. Au programme : nombre premiers, corps finis, et formes quadratiques.

8.2 Géométrie des cercles (ou droites)-Débuter avec la géométrie anallagmatique

Vidéo 1 : On va, à partir de ce que nous savons tous sur les cercles et droites, créer un lien entre leur géométrie et celle de l'espace de Lorentz, c'est-à-dire, l'espace $\mathbb{R}^4$ muni d'une forme quadratique de signature $(3, 1)$. On écrit ici tous les résultats dans un tableau à double entrée pour cette belle correspondance, et on fera les preuves dans une prochaine vidéo.

Vidéo 2 : On a donné, dans une première vidéo, un tableau qui mettait en relation des cercles du plan euclidien et des droites de l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la forme de Lorentz. Dans cette vidéo, on passe aux preuves, que l'on peut retrouver dans [NH2G2, XI-3.3.8].

Vidéo 3 : On commence à minutieusement mettre en place une correspondance entre droites et cercles du plan complexe, d'une part, et droites de l'espace $\mathbb{R}^4$. On peut, par section hyperplane, voir tout cela assez agréablement dans $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa boule unité.

Vidéo 4 : Par cette correspondance que nous avons construite en transformant un cercle en une "droite de l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^4$" grâce à son équation, on utilise Sylvester pour classifier les faisceaux de cercles et les faisceaux orthogonaux.

Vidéo 5 : On a pour l'instant un joli modèle pour l'étude des cercles, qui sont représentés comme des points d'un espace projectif de dimension 3. Dans cet espace, nous allons voir que les points d'un cercle donné se voient sur une sphère, puis, par projection stéréographique, on va retrouver le cercle dans la géométrie de $\mathbb{R}^4$.

Vidéo 6 : Dans cette vidéo, on introduit l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur les cercles par homographie. Nous l'avons déjà dans une playlist, mais cette fois-ci, l'origibalité vient du fait que cette action provient de l'action par congruence sur les formes hermitiennes, et donc leurs cônes isotropes. Nous sommes à deux doigts de conclure à une des plus belles correspondances de la géométrie, qui fait toute la richesse de la géométrie anallagmatique.

Vidéo 7 : On prouve un isomorphisme entre les groupes simples $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{PSO}(q)$, qui sera ensuite prolongé par un isomorphisme un peu plus complet. On finit alors sur un tableau de correspondance entre deux versions de la même géométrie, dite anallagmatique, en indiquant comment ces deux versions se complètent pour créer une géométrie puissante.

8.3 Cercles tangents

Vidéo 1 : On étudie un petit exercice sur les cercles tangents. But du jeu : trouver trois cercles distincts du plan et 8 cercles tangents à ces trois cercles. Ce petit exercice qui semble anodin ouvre un champ vers la géométrie anallagmatique (que nous rappelons à l'occasion) et même (mais on ne visitera pas cet aspect des choses) aux arcanes profonds de la théorie d'intersection et de l'édifiant théorème de Chasles sur les 3264 coniques tangentes à 5 coniques données.

Vidéo 2 : On vient de résoudre le problème de trouver trois "cercles-droites" possédant 8 cercles tangents. Maintenant, il est temps de transformer les (deux) droites en cercles et le cercle en un autre cercle. On le fait en utilisant des translations et des inversions. A la suite de quoi, on discute de choses afférentes cachées derrière ce problème, comme le problème de la triple transitivité du groupe engendré par les inversions (homographies et antihomographies) sur les "droites ou cercles" ainsi que la théorie d'intersection, qui sera à peine évoquée.

Vidéo 3 : Alternative de Steiner. On présente sous forme d'exercice corrigé (la correction dans une prochaine vidéo) l'alternative de Steiner. Encore une fois, les groupes de transformations et leurs invariants jouent un rôle central.

Vidéo 4 : Alternative de Steiner. On résout l'exercice sur l'alternative de Steiner. Il suffisait de se ramener, par homographie, à deux cercles concentriques, et le problème se résout miraculeusement à l'aide de tout petits calculs.

8.4 Nombres de Bernoulli

Vidéo 1 : On présente ici les nombres et les polynômes de Jacques Bernoulli. Ces nombres se retrouvent miraculeusement à la fois en algèbre, en combinatoire, en théorie des nombres, en arithmétique, mais aussi en analyse, en théorie de Fourier, en topologie, K-théorie, et il se rencontre de façon naturelle en algèbre non commutative. On va introduire ces nombres par analyse-synthèse par la recherche de polynômes permettant de calculer des sommes de Newton.

Vidéo 2 : Maintenant que l'on a appris à écrire sans faute le mot "Bernoulli" dans la première vidéo (entre autres, grâce au pense-bête "Bernoulli n'est pas une nouille"), on prouve une formule non totalement triviale qui permet de calculer explicitement les fascinants nombres de Bernoulli. La preuve passe par la formule donnant le nombre $s_{n,m}$ de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à m éléments (via la formule du crible), puis un résultat surprenant (et intéressant en soi) qui prouve que $s_{n,m}$ est le coefficient de la base canonique des polynômes dans la base des polynômes de Hilbert !

Vidéo 3 : On établit, à l'aide de la formule de Dirichlet sur les séries de Fourier, un lien entre les nombres de Bernoulli et la fonction zeta de Riemann.

Vidéo 4 : Mais pourquoi les nombres de Bernoulli apparaissent-ils ainsi, comme en génération spontanée, dans divers domaines des mathématiques ? Finalement, c'est peut-être cette famille $B_n(t)/n!$ qui s'apparente à la famille $x^n/n!$ dans son comportement vis-à-vis de la dérivée... Il est alors normal que les nombres de Bernoulli se retrouvent dans les développements limités de la famille des exponentielles. On donne ici le développement de $x\cot(x)$ en 0. On saluera en passant les fécondes méthodes de déformation en analyse.

Vidéo 5 : On fait un résumé succinct de l'utilité des nombres de Jacques Bernoulli en analyse (développements limités, trigonométrie, formule de Stirling, approximations d'une intégrale, précision dans la méthode des rectangles)

Vidéo 6 : On prouve une formule qui fournit le dénominateur de tous les nombres de Bernoulli. C'est le théorème de de Clausen-Von Staudt.

8.5 Perles d'Indra- 1-L'univers est fractal (mais cool !)

Vidéo 1 : Dans la mythologie védique de l'Inde ancienne, Indra est le dieu des dieux et son collier est constitué de perles se reflétant les unes aux autres, jusqu'à l'infini, et au-delà. Cette représentation poétique de l'univers, Felix Klein en a rêvé. David Mumford, Caroline Series et David Wright l'ont fait ! Dans un livre chaudement recommandé : Indra's pearls- the vision of Felix Klein.

Vidéo 2 : Une petite mise en place pour entrer de plain pied dans l'univers d'Indra. Quelques prérequis très sommaires sur l'action des homographies sur l'ensemble des cercles (ou droites). Puis, on construit nos premières perles du collier ainsi que leurs reflets.

Vidéo 3 : On met en place le ping-pong entre a et b, ce qui donne lieu à de jolies images pleines de couleurs, qui peuvent également se voir à l'aide du graphe de Cayley d'un groupe libre à deux générateurs (y a plus de flèches, mais moins de couleurs). On donne un exemple simple d'homographies a et b qui vérifient les "règles du ping-pong".

Vidéo 4 : On veut maintenant que le collier de perles soit constitué de disques tangents entre eux. Cela demande déjà au départ que les quatres disques initiaux le soient. Mais cela ne suffit pas. On trouve alors une condition nécessaire : que les points de tangence soient globalement conservés par les homographies a et b. Cela va impliquer par symétrie cyclique que les points de tangence sont fixés par des commutateurs. On en profite pour un petit exercice de santé : montrer que si quatre cercles sont cypliquement tangents, alors les points de tangence sont cocyliques.

Vidéo 5 : On arrive enfin à axiomatiser notre collier d'Indra. Tout d'abord, de façon géométrique, avec la notion de commutateur parabolique, puis, de façon purement algébrique, avec la formule des traces de Markov. On rencontre au passage l'équation classique $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 0$.

Vidéo 6 : Le dernier volet de ce "reader's digest" d'un des plus beaux livres que j'ai eu entre les mains. On va maintenant, jouer avec les paramètres, et même dérégler la machine afin de construire à l'envi de jolies des courbes fractales.

8.6 Equations grégophantiennes

Vidéo 1 : Nous allons voir en trois vidéos comment résoudre des équations sur le calendrier grégorien. Par exemple : une année de municipales à Lyon est tombée un dimanche 21 avril. Quelle est cette année ?

Vidéo 2 : On trouve une formule explicite pour calculer n'importe quel jour de la semaine est associé à une date. Mais les formules ne sont pas encore prêtes pour résoudre des équations "grégophantiennes".

Vidéo 3 : On finit par résoudre l'énigme du Dimanche 21 avril. Etonnament, c'est un système de congruence qui va nous y amener.

8.7 Le théorème du confinement (2 vidéos)

(pièce cylindrique à n personnes, comment se tenir assez éloigné, preuve de l'inégalité d'Hadamard et cas d'égalité)

On prouve qu'il n'y a rien de mieux que le n-gone régulier pour nous protéger de la contagion. Au programme, inégalité d'Hadamard pour les déterminants, et identités de Newton.

8.8 Structure de groupe sur une conique (9 vidéos)

(classification des coniques, puis des coniques munies d'un point, ce qui se passe en forme normale, cas général, l'hexagramme mystique, les courbes elliptiques)

Vidéo 1 : Voici une petite série de vidéos où l'on présente une construction de groupe sur les coniques. Il s'agit d'une construction qui fait le point sur des propriétés géométriques des coniques bien cônues depuis Pascal, et dont les applications à la cryptographie (que l'on effleurera seulement) sont apparues de façon relativement récente. Cette première vidéo est avant tout un teaser.

Vidéo 2 : Dans cette vidéo, on donne la construction générale pour la structure de groupe sur une conique non dégénérée. On montre que l'on a bien un groupe dans trois cas particuliers. Et ces groupes ne sont pas anodins. Il s'agit du groupe additif (pour la parabole), du groupe multiplicatif (pour l'hyperbole), et le groupe additif modulaire, comme les groupe des angles, (pour l'ellipse). Si on ajoute à cela que ces groupes géométriques sont à la fondation de la cryptographie actuelle, on se dit qu'il n'y a que les maths pour nous faire traverser, dans une logique implacable, l'histoire antique, notre monde actuel, et les souvenirs nostalgiques des premières opérations de notre enfance.

Vidéo 3 : Après avoir mis une opération sur une conique (munie d'un point), et après avoir montré que cette opération fournit une structure de groupe sur trois exemples représentatifs de la classification affine, on montre que la structure de groupe se transmet d'une conique à l'autre par une transformation affine. Et contre cette transmission, il n'y a ni masque, ni geste barrière !

Vidéo 4 : On attaque le théorème principal. Sur le fait que notre opération géométrique confère une structure de groupe qui caractérise le type affine de la conique. Au passage, on montre, à l'aide de changements de variables, le résultat souvent mal digéré sur la fameuse classification affine des coniques. Ce résultat sera parachevé dans une vidéo suivante.

Vidéo 5 : On finit ici la preuve du théorème de classification des coniques non dégénérées par les trois groupes classiques réels.

Vidéo 6 : On a montré le théorème de structure de groupe sur une conique, à l'aide d'un mélange de petit calculs dans trois cas simples et de groupes de transformations. On veut maintenant une preuve plus directe en travaillant sur la géométrie de la conique. L'associativité pose un petit problème, qui va être résolu grâce au théorème de l'hexagramme mystique de Pascal.

Vidéo 7 : On a eu besoin d'une version projective du théorème de l'hexagramme mystique de Pascal. Voici quelques notions de projectif pour mieux comprendre ce que veut dire "envoyer une droite (ou un point) à l'infini" dans les manipulations de géométrie (projective). On verra également que le projectif confond paraboles, ellipses et hyperboles, alors que l'affine les distingue.

Vidéo 8 : On pensait s'arrêter là, mais l'arithmétique a mis le pied dans la porte, et on est repartis sur deux autres vidéos. Ici, on s'intéresse toujours à la structure de groupe sur une conique, mais cette fois-ci sous l'angle de l'équation diophantienne dite de Pell-Fermat. On verra trois groupes isomorphes : la conique de l'ensemble des solutions entières de l'équation, l'ensemble des unités positives d'un anneau quadratique réel, et tout bonnement, le groupe monogène des entiers.

Vidéo 9 : Dernier volet de la série où l'on montre (en mode DSK) comment les coniques, en leur ajoutant une droite, sont des dégénérescences d'une famille de courbes elliptiques. On finit sur des explications (à détailler avec de bonnes références !) sur les applications de ces dernières à la cryptanalyse et à la cryptographie.

8.9 Le groupe S_4 par Alain Debreil et Rached Mneimné (5 vidéos)

Vidéo 1 : Lecture d'été du joli livre d'Alain Debreil et Rached Mneimné chez Calvage et Mounet. Un livre qui ouvre toutes les fenêtres du groupe S_4 sur divers domaines des mathématiques. Dix-sept chapitres, et autant de notes fleuries qui embaumeront cette fin d'été.

Vidéo 2 : On feuillette ici le livre des métamorphoses du groupe symétrique S_4.

Vidéo 3 : On continue à feuilleter chapitre par chapitre les pages du livre d'Alain Debreil et Rached Mneimné sur les nombreux avatars du groupe S_4 en géométrie affine, euclidienne, avec les polytopes, les graphes de Cayley, les treillis d'extensions de corps et enfin la géométrie projective. Ces deux derniers méritent un traitement à part qui figurera dans des vidéos prochaines.

Vidéo 4 : Le livre d'Alain Debreil et Rached Mneimné propose dans le chapitre II une série d'exercices d'un type nouveau. On veut savoir, si l'on se donne une permutation de S_4, de combien de manières peut-on décomposer cette permutation en un produit de 4-cycles, resp. 3-cycles, resp. d'un trois-cycle et d'une double-transposition. On donne une formule qui permet de calculer ce nombre dans un cadre très général : dans S_n, on fournit le nombre de décompositions en produit de m permutations appartenant chacune à une classe de conjugaison donnée. On montre cette formule dans une prochaine vidéo, et on se content d'exposer et d'illustrer cette formule, qui exploite la théorie des caractères.

Vidéo 5 : On prouve le résultat annoncé sur le nombre de décomposition dans S_n en types donnés. Cela demande de la théorie des caractères (lemme de Schur et surtout l'utilisation classique de la représentation régulière comme fonction caractéristique de l'élément neutre).

8.10 Algèbre éclectique de Danila-Eiden-Mneimné

Vidéo 1 : Quelques mots (sans rentrer dans les détails) sur ce livre d'algèbre éclectique (niveau master) qui vient de paraître pour notre plus grand bonheur !

Vidéo 2 : On ouvre le livre et on pioche dedans comme dans une boîte de chocolats.

Vidéo 3 : On étudie les idéaux premiers de l'anneau (intègre) $\mathbb{Z}[X]/(X^4+1)$. Cela va nous permettre d'affiner nos outils pour les anneaux non principaux et se familiariser avec des morphismes qui nous ramènent gentiment à des anneaux principaux assez proches (comme $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_p[X]$).

Vidéo 4 : Voici une petite équation matricielle, extraite du livre "Algèbre éclectique" de Danila-Eiden-Mneimné, faisant intervenir un polynôme irréductible sur Q. Vous ne verrez plus jamais de la même manière le petit théorème de l'existence des bases !

8.11 Triangle de Pascal modulaire

Vidéo 1 : Pour le 398ème anniversaire de Blaise Pascal, voici un petit aperçu d'une preuve de la structure fractale de triangle de Pascal, vu modulo p premier. Pour $p = 2$, nous avons le fameux triangle de Sierpinsky, mais pour les autres ? Dans cette vidéo nous voyons que le triangle modulaire cache une auto-similarité tensorielle...

Vidéo 2 : On prouve la propriété d'auto-similarité tensorielle du triangle de Pascal modulo un nombre premier p, qui donnera dans une prochaine vidéo la structure fractale du triangle de Pascal. On montre en particulier que cette propriété repose essentiellement sur le morphisme de Frobenius, et donc, n'a que peu de chance de se généraliser tel quel pour tout entier n (non premier) et même pour toute puissance de p.

Vidéo 3 : Et l'auto-similarité se fait fractale. Il suffit pour cela d'étendre le triangle vers l'intérieur au lieu de la faire vers l'extérieur. On s'intéresse donc aux fractales, qui auraient pu être mieux exploitée durement le confinement, en créant des kilomètres de parcours de santé dans un périmètre restreint. On présente (assez modestement) la structure fractale du carré de Pascal et du triangle de Pascal modulo p. On calcule facilement la dimension fractale de la jolie "structure triangle", par invariance, en la calculant sur la structure carrée (moins jolie mais forcément plus pratique).

8.12 Divine proportion et méthode des puissances (2 vidéos)

Vidéo 1 : Une construction classique consiste à partir d'un rectangle et lui associer un autre rectangle en plaçant un carré sur son côté. En itérant cette méthode (et en normalisant) on obtient à la limite le fameux rectangle d'or. On fait ici le lien entre cette construction et la méthode des puissances en algèbre linéaire, bien connue (oupa) des agrégatifs.

Vidéo 2 : On cherche une "divine proportion en dimension 3", pour faire plaisir aux architectes, mais également pour mettre à profit la méthode des puissances. Cette fois-ci, il faut résoudre l'équation $X^3 - X - 1$ dans le corps des complexe. On en profite pour montrer comment le discriminant permet de voir le nombre de solutions de l'équation. On tente de faire un lien de parenté entre nombre d'or et nombre plastique, pour tomber sur la notion de suite géométrique presqu'entière. On verra plus tard que ces deux nombres appartiennent à une famille remarquable de nombres réels : les nombres de Pisot.

8.13 Suites de presqu'entiers et nombres de Pisot

Vidéo 1 :On va s'intéresser aux suites géométriques de réels dont les termes sont des "presqu'entiers" à partir d'un certain rang. On aboutit à une définition des "nombres de Pisot".

Vidéo 2 : On va présenter, en tentant de motiver, la théorie de Charles Pisot. Tout d'abord en montrant l'utilité de ces nombres dans l'approximation diophantienne. Ensuite, en montrant que ces nombres sont à la fois rares (et donc chers), de par une caractérisation via les suites géométriques de presqu'entiers, et en même temps suffisamment présents dans la nature, puisque toute extension algébrique réelle de $\mathbb{Q}$ est engendrée par un nombre de Pisot.

Vidéo 3 : Les mathématiciens confirmés connaissent par coeur la formule du déterminant de Vandermonde, mais peu d'entre eux savent inverser la matrice de Vandermonde. Une astuce qui utilise les polynômes permet de le faire élégamment. On aura ensuite besoin de cette inversion pour montrer le théorème de Pisot dans une prochaine vidéo.

Vidéo 4 : On prouve le théorème de Pisot. Un nombre algébrique réel supérieur à 1 qui est la raison d'une suite géométrique presque entière est un nombre de Pisot. La preuve est instructive et utilise pas mal de classiques de l'agrégation externe (théorème de Cayley-Hamilton, système de Vandermonde, sous-réseaux de $\mathbb{Z}^n$, morphisme de multiplication dans un anneau, morphismes de conjugaison dans un corps).

8.14 Triangles équilatéraux et nombre d'or

Vidéo 1 : Un bel exercice, proposé par Jean-Jacques Juré, et donné aux Olympiades mathématiques sur une construction d'un triangle équilatéral à partir d'un autre, selon une égalités de surfaces. On en propose ici une preuve de type "Master" avec de la réduction de matrices, et une autre, plus élémentaire, qui peut, théoriquement, être faite en lycée. On pourra en tirer, une construction à la règle et au compas pour les nostalgiques et une formule matricielle par affixes qui a permis à Jean-Jacques d'intégrer la construction dans la rétine du héros de manga Itachi Uchiwa.

8.15 Ampoules et interrupteurs formes quadratiques en caractéristique 2 (5 vidéos)

Vidéo 1 : On va introduire deux problèmes autour d'ampoules et interrupteurs sous forme de quizz (niveau minimal L3 pour le premier et M1 pour le second). Dans les deux cas, la solution doit son salut à l'intervention de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$. Ou plutôt, de formes bilinéaires symétriques sur l'espace $\mathbb{F}_{2^n}$, ce qui, en caractéristique 2, est assez différent.

Vidéo 2 : On introduit deux problèmes autour d'ampoules et interrupteurs sous forme de quizz (niveau minimal L3 pour le premier et M1 pour le second). Dans les deux cas, la solution doit son salut à l'intervention de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$. Ou plutôt, de formes bilinéaires symétriques sur l'espace $\mathbb{F}_{2^n}$, ce qui, en caractéristique 2, est assez différent.

Vidéo 3 : On introduit deux problèmes autour d'ampoules et interrupteurs sous forme de quizz (niveau minimal L3 pour le premier et M1 pour le second). Dans les deux cas, la solution doit son salut à l'intervention de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$. Ou plutôt, de formes bilinéaires symétriques sur l'espace $\mathbb{F}_2^n$, ce qui, en caractéristique 2, est assez différent.

Vidéo 4 : On introduit deux problèmes autour d'ampoules et interrupteurs sous forme de quizz (niveau minimal L3 pour le premier et M1 pour le second). Dans les deux cas, la solution doit son salut à l'intervention de formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$. Ou plutôt, de formes bilinéaires symétriques sur l'espace $\mathbb{F}_2^n$, ce qui, en caractéristique 2, est assez différent.

Vidéo 5 : On compte maintenant le nombre de solutions au problème des rampes de spots et on se ramène à dénombrer le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{F}_2)$, ce qui se fait par récurrence.

8.16 Le théorème de Fermat de taille moyenne

Vidéo 1 : Qui pouvait se douter que l'on puisse attaquer à l'équation de Fermat modulaire à l'aide du simple principe des tiroirs ? Certainement un immense mathématicien comme Issaï Schur ! Voici, coincé entre le (trop) petit théorème de Fermat et le (trop) grand, prouvé par Andrew Wiles, le théorème de Fermat de taille moyenne. Une belle histoire de Noël, pour les grands et les petits...

Vidéo 2 : On montre que pour un entier strictement positif k fixé, l'équation de Fermat $x^k + y^k = z^k$ possède une solution modulo p premier, pour p assez grand. Il s'agit là d'une preuve purement combinatoire, n'utilisant aucun (ou presque) ingrédient de la théorie des nombres.

8.17 Des voeux de bonne année selon une tradition familiale...

... dans les familles de mathématiciens ! Pour une bonne année 2021, on va visiter ce nombre et une propriété particulière qui nous fera passer, pour le plaisir, par les sommes de Cauchy, les formes quadratiques réelles, et même les disques de Gershgorin... Tout un programme !

8.18 Une preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton

Voici une preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton sur le corps des complexes. Elle est toutefois montrée de manière élémentaire pour pouvoir en faire profiter à la fois à ceux qui ne connaissent pas la théorie de fonction holomorphes, et à ceux qui la connaissent et qui sauront en trouver des raccourcis. On passe par un jolie formule de résidus matriciels qui permet de définir, en général, l'analogue matriciel d'une fonction (analytique) complexe.

8.19 Empilement de sphères

Vidéo 1 : Dans un style récréatif, nous allons parler de tentatives d'empiler des sphères les unes sur les autres en minimisant les pertes d'espace. Il s'agit là d'une problématique qui remonte (au moins) à Kepler en passant par Minkowski et, bien sûr, mon épicier. On propose différentes façons d'empiler des sphères dans un espace et on fait quelques calculs de densité.

Vidéo 2 : On propose maintenant d'interpréter les densités d'empilements de sphères. En dimension 1 (une évidence), en dimension deux (où on a comparé deux options). Jusque là, les mathématiciens ont su prouver qu'il s'agissait des empilements les plus efficaces (même si on ne décide pas de se limiter aux empilements basés sur un réseau). On va alors comparer deux façons d'empiler des oranges, la façon dite de l'épicier, et une autre qui semble plus logique au mathématicien. On constate la même densité, et on en donnera deux petites explications, une géométrique (un héxagone inscrit dans le cube, plus précisément dans un cuboctaèdre) et une, plus algébrique, par les deux matrices de Gram des réseaux qui se trouvent être $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$-congruentes.

Vidéo 3 : On termine cette petite fenêtre sur les empilements de sphères avec le cas des dimensions supérieures,. On y rencontrera, en dimension 4, l'icositétrachore, qui optimise le placement d'hypersphères sur un réseau, puis, en dimension 8 le système de racines E_8 qui a fait les beaux jours de la jeune chercheuse Maryna Viazovska.

8.20 Le corbeau et le renard, une fable mathématique

Vidéo 1 : Le corbeau et le renard expliqué à une machine ! Mais les machines ont-elles de l'humour ? Peut-on traduire, "il était une fois", par "il existe" ? et la morale de l'histoire, par un théorème ?

P.S. Après avoir posté la vidéo, j'ai reçu un message de l'auteur. Il s'agit de Mickael Launay. Merci à lui pour cette fine analyse de texte, cette fidèle traduction et ce bel hommage à Monsieur de la Fontaine.

8.21 2021 et le jour de pi

Vidéo 1 : La racine carrée de 98723 est 314,2021..., ce qui en fait un nombre emblématique pour le jour de pi (surtout en 2021). Mais, au fait, comment trouver tous les entiers dont la racine carrée a ses premières décimales qui commencent par 2021 après la virgule ? Ce petit problème d'approximation diophantienne est le point de départ d'un joli voyage en arithmétique.

Vidéo 2 : Et nous voici partis dans une histoire de recherche de points entiers entre deux droites. Malheureusement, les pentes de ces droites ont des vecteurs entiers trop grands pour que les choses soient bien visibles. On a alors recours aux fractions continues pour approcher au mieux ces pentes.

Vidéo 3 : Et la lumière fut ! On utilise le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour voir plus finement les choses sans changer la nature entières du problème. On retrouve toutes les solutions avec aisance et un minimum de calcul.

8.22 Distribution des puissances en base 10 et loi de Benford

Vidéo 1 : Peut-on justifier la loi de Benford qui prévoit la distribution de chiffres en base 10 dans une suite de nombres ? On va le faire dans une série de vidéos en partant de la suite des puissances de 2, on continue avec celle des puissance de 3, sans oublier les nombres de Fibonacci. Pour l'instant, pas de preuve, mais un premier énoncé.

Vidéo 2 : La loi de Benford que l'on a pu observer sur quelques suites comme 2^n, 3^n, et la suite de Fibonacci, n'est pas un loi vraie en général pour toutes les suites. Dans cette vidéo, on formalise cette loi en la ramenant à des propriétés dans un espace de fonctions continues par morceau. C'est le début d'une voie royale vers une jolie théorie qui sera abordée dans la vidéo qui suit.

On part donc d'une suite de réels que l'on ramène à un suite de réels de [0,1[(quitte à retirer la partie entière). On introduit le critère de Weyl qui caractérise les suites équidistribuées, c'est-à-dire les suites a_n telles que si A est un intervalle et 1_A sa fonction caractéristique, la moyenne des $1_A(a_k)$ pour k de 1 à n, tend vers la mesure de A. Ce critère demande tout simplement que pour tout s positif, la moyenne des $\exp(2s\pi a_k)$, k de 1 à n, tend vers 0.

Après avoir prouvé le critère de Weyl dans la vidéo précédente, on se propose de fixer un petit cadre pour la loi de Benford, ce sera le cadre de certaines suites géométriques, qui se généralise sans peine au cadre de certaines suites linéaires récurrentes, comme la suite de Fibonacci.

On termine ce volet sur la loi de Benford en "rebondissant sur le billard". En effet, la suite $n\log(2)$ correspond à des rebondissement d'une boule sur un billard circulaire. On passe alors à un billard torique, pour voir que l'on peut, pour tout chiffre t, trouver un n tel que 2^n et 3^n commencent simultanément par t, avec le critère de Weyl multidimensionnel. En revanche, 2^n et 5^n commencent simultanément par t si et seulement si $t = 3$. Par exemple, si $n = 5$, on a à la fois $2^n = 32$ et $5^5 = 3125$.

8.23 Le nombre 20160 et un non-isomorphisme exceptionnel

Vidéo 1 : 20160, 196884, et quelques monstres... Nous allons aujourd'hui parler de coïncidences numériques, et en particulier, parmi les ordres des groupes simples. Dans le prochain volet, on montrera ce scandaleux résultat que, malgré les indices et les apparences, les deux groupes simples $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ ne sont pas isomorphes.

Vidéo 2 : On montrera ce scandaleux résultat que, malgré les indices et les apparences, les deux groupes simples $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ ne sont pas isomorphes. Il faut profiter de ce nombre 20160, parce qu'il n'y en aura pas d'autres comme cela avant 4.585.351.680.

8.24 Table de caractères intégralité et nombre d'or

Vidéo 1 : Cette vidéo est une présentation des vidéos qui vont suivre. On y explique un schéma général fécond entre représentations, classes de conjugaison et géométrie. Le but ici est double : présenter d'une part un développement sur les groupes à table de caractères entière (dont fait partie le groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$) et l'ubiquité du nombre d'or à travers divers point de vue : algébrique, géométrique, théorie de Galois, et enfin dans les classes de conjugaison des groupes finis, via la théorie des représentations.

Vidéo 2 : On attaque donc un critère permettant de voir si la table de caractère d'un groupe fini est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On passe par un petit lemme sur les extension cyclotomiques, puis, une étude des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$. Curieusement, les choses s'enchaînent sans nécessiter de connaissances particulières sur la théorie des représentations.

Vidéo 3 : On commence notre traque au nombre d'or ϕ. Tout d'abord, dans les équations algébriques, puis dans la géométrie (avec le pentagone régulier et l'icosaèdre) et enfin dans la théorie des corps. Nous prouverons une caractérisation, dont nous aurons besoin par la suite, des éléments de $\mathbb{Q}(\omega)$ (où ω est une racine primitive 5-ième de l'unité) qui s'écrivent sous la forme $a * \phi + b$, avec a, b rationnels et a non nul.

Vidéo 4 : On voit comment apparaît le nombre d'or dans les classes de conjugaison de groupes finis via la théorie des représentations. Ici, on le voit sur l'exemple des groupes D_5 et $\mathcal{A}_5$.

8.25 Représentation d'entiers par une forme quadratique-somme de carrés

Vidéo 1 : Dans cette première vidéo, nous allons parler des entiers qui se réalisent comme sommes de deux carrés. Mais plus généralement, nous allons voir quels sont les entiers qui s'écrivent sous la forme $x^2 + dy^2$, avec x, y entiers, et $d = 1, 2, 3, 5$. Nous allons voir comment le cas $d = 5$ diffère des trois premier cas.

Vidéo 2 : On vient de voir empiriquement certaines relations entre la réalisation d'un entier p premier par une forme quadratique $x^2 + dy^2$ (pour $d = 1, 2, 3, 5$) et certaines congruences de p. Nous montrons l'implication (facile) dans un premier temps.

Vidéo 3 : On a vu que la représentation d'entiers de la forme $m = x^2 + dy^2$, impliquaient certaines congruences de p. On montre dans les cas factoriels une réciproque. Les cas $d = 1$ ou 2 se font sans trop de difficulté, mais le cas $d = 3$ résiste un peu pour finalement céder. Pour le cas $d = 5$, il faudra tout reprendre à zéro !

Vidéo 4 : Il faut se rendre à l'évidence que la factorialité ne sera pas toujours là pour nous venir en aide. Gauss, dans ses disquisitiones, propose une autre méthode, que nous exposons ici sur l'exemple $d = 5$, et qui passe par les classes de congruences de formes quadratiques sur $\mathbb{Z}^2$.

Vidéo 5 : On a vu dans la vidéo précédente que la réciproque qui consiste à partir de p premier congru à 1 ou 9 modulo 20 implique que p est représenté par $x^2 + 5y^2$ demande une connaissance sérieuse des classes de congruences de formes quadratiques sur $\mathbb{Z}$. C'est un petit résultat de finitude qui va nous permettre cette classification. On prouve alors la réciproque, mais on n'est pas au bout de nos surprises !

Vidéo 6 : La trilogie. Une dernière vidéo sur les représentations d'entiers, où l'on explore la théorie des formes quadratiques binaires, leur lien avec les classes de conjugaison, les classes d'idéaux, et, sans vouloir faire d'idéologie en ce 14 juillet, un petit hommage à 350 polytechniciens qui rendent hommage à cet anniversaire de la révolution...

8.26 Fonctions qui préservent les sommes de carrés par Jamil

Vidéo 1 : Trouver les fonctions sur $\mathbb{N}$, qui préservent les sommes de carrés. Un joli petit exercice niveau lycée, ou plutôt olympiades, proposé par mon ancien (et sympathique) étudiant Jamil Berhila, qui continue malgré les années à me vouvoyer et m'appeler monsieur, comme quoi les études, ça laisse des traces ! On résout ici le problème, modulo un lemme qui sera prouvé dans la vidéo suivante.

Vidéo 2 : On finit ce joli exercice avec la preuve du lemme. Pythagoriciens, pythagoriciennes, bonsoir !

8.27 Les nombres pseudo-premiers de Perrin

Vidéo 1 : Voici, présentée sous forme de problème à l'agrégation interne, la jolie suite de Perrin, qui semble fournir un test de primalité. On va voir que si p est premier, alors le terme u_p de la suite est divisible par p. On a longtemps cru que la réciproque était vraie... Attention, comme le fait remarquer Maticawa (merci à lui !) 341 n'est pas un nombre de Carmichael, c'est juste un nombre tel que $2^3 41 - 2$ est divisible par 341. Le premier nombre de Carmichael est 561.

Vidéo 2 : On achève la preuve du fait que p premier implique que le p-ième terme de la suite de Perrin est divisible par p. On le montre par deux méthodes : une méthode plutôt "licence" qui utilise les relations coefficients-racines, et une méthode plutôt "master" qui utilise le morphisme de Frobenius en caractéristique p.

Vidéo 3 : On s'intéresse à la ressemblance entre nombres de Fibonacci et nombres de Perrin. En quoi sont-ils cousins ? Bien entendu, les relations de récurrence se ressemblent, mais on va chercher d'autres ressemblances dans leur réalisation en tant que nombres de parties d'un ensemble.

Vidéo 4 : On arrive à un moment particulièrement agréable où l'on a réalisé que les nombres de Perrin se réalisent comme cardinal d'un ensemble de parties stables par le groupe cyclique. La formule des classes va nous donner une troisième preuve du critère de (pseudo-)primalité de Perrin. On profite de cette grande cousinade pour inviter à la table les nombres de Lucas, qui se réalisent eux aussi comme cardinal d'un ensemble de parties stables par le groupe cyclique.

8.28 Dessins d'enfants par Alex Moriani

Vidéo 1 : Alex Moriani vient de présenter son mémoire sur les dessins d'enfants, sous la direction de François Labourie. Il s'agit là d'un pan important de la théorie de Grothendieck-Teichmüller qui permet de mieux comprendre le groupe absolu du corps $\mathbb{Q}$. Dans cette première vidéo, Alex nous présente les premières définitions et premiers exemples.

Vidéo 2 : Voici une présentation (sans preuves, mais avec illustration !) des résultats de Belyi et Grothendieck autour des dessins d'enfants.

8.29 La conjecture de sensitivité par Corentin Faipeur

Vidéo 1 : La conjecture de sensitivité parle de l'unification de la mesure de complexité des fonctions booléennes ; thème particulièrement pertinent en informatique théorique. Corentin Faipeur nous parle de ce qui est devenu désormais le théorème de Huang, après plus de trente années de résistance.

Vidéo 2 : Après avoir motivé la conjecture, Corentin définit les différentes mesures de complexité d'une fonction booléenne, complexité elle-même garante de sécurité. Il y a la sensitivité par blocs, la sensitivité, et enfin, le degré total de la fonction vue comme polynôme à plusieurs variables. On veut montrer que toutes ces mesures sont "équivalentes" pour une équivalence à définir. C'est là que le récent théorème de Huang intervient. Il ne reste plus qu'à le démontrer dans une prochaine vidéo.

Vidéo 3 : On prouve le théorème de Huang, qui démontre la trentenaire conjecture de sensitivité à l'aide du théorème d'entrelacement de Cauchy ainsi qu'une petite astuce basée sur une matrice d'adjacence "au signe près". Pour le théorème d'entrelacement, on pourra se référer à

8.30 La loi de réciprocité d'Artin

Vidéo 1 : Il est tentant de généraliser la loi de réciprocité quadratique aux degrés supérieurs. C'est Emil Artin qui va donner un résultat pertinent, mais en commençant par modifier l'énoncé de réciprocité, par l'énoncé d'Euler de "loi de périodicité quadratique". En quelques vidéos, je propose de raconter une petite partie de l'évolution, de Euler à Artin, en passant par Legendre et Gauss, de cette loi de réciprocité, au coeur de l'arithmétique et tout particulièrement, de la théorie du corps de classes.

Vidéo 2 : On prouve le théorème de réciprocité quadratique d'Artin qui tient compte de la périodicité proposée par Euler, mais en y ajoutant un morphisme de groupe. Résultat, on construit un morphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/4d\mathbb{Z})^*$ vers le groupe $\{1, -1\}$ qui envoie un nombre premier p ne divisant pas $4d$ vers le résidu quadratique de d modulo p.

Vidéo 3 :On va regarder de près deux exemples-clef : un dans le cas quadratique, et un autre en degré 3. Dans les deux cas, on constate la possibilité de relever l'automorphisme de Frobenius dans une extension de $\mathbb{Q}$. Mais on a besoin pour cela de deux hypothèses : 1) partir d'un polynôme f sur $\mathbb{Z}[X]$ dont le groupe de Galois est abélien, et 2) partir d'un nombre premier p qui ne divise pas le discriminant de f.

Vidéo 4 : On termine ce volet avec deux versions, dues à Artin, de la loi de réciprocité quadratique en degré supérieur. Une version pour les polynômes unitaires sur $\mathbb{Z}$, et une version pour les entiers de corps de nombres, qui nous amène à construire le "ray class group".

8.31 Diophante aux Olympiades

Une petite équation diophantienne astucieuse qui demande juste un niveau "terminale option maths" mais surtout beaucoup d'amour et de passion...

8.32 Le théorème de la corde universelle (problème d'olympiades)

Un petit problème de type "olympiades" que m'a indiqué Roger Mansuy, et qui demande juste un peu de réflexion et de TVI (théorème des valeurs intermédiaires). La partie positive du problème aboutit aux théorème de la corde universelle, et l'autre partie nous amènera à un contre-exemple bougrement tordu, mais sacrément intelligent.

8.33 Diophante aux Olympiades

Une petite équation diophantienne astucieuse qui demande juste un niveau "terminale option maths" mais surtout beaucoup d'amour et de passion...

8.34 Probabilité pour que deux éléments commutent dans un groupe fini

Vidéo 1 : On cherche à exprimer la probabilité p_G que deux éléments tirés indépendamment dans un groupe fini G, de façon équiprobable, commutent entre eux. On va voir que si G est non abélien (ie p_G différent de 1), alors p_G ne peut pas dépasser $5/8$, borne atteinte, par exemple, pour le groupe diédral et le groupe quaternionique. Mais on trouvera une formule particulièrement simple pour p_G mettant en relation l'ordre de G et le nombre de classes de conjugaison. Cet exercice figure dans Carnet de Voyage en Analystan.

Vidéo 2 : On vient de voir dans une vidéo précédente une formule simple qui relie ordre du groupe fini G, nombre de classes de conjugaison, et probabilité pour que deux éléments commutent dans G. On va donner une illustration de cette formule quand G est le groupe GL_2 sur un corps fini, ce qui va nous permettre d'utiliser nos connaissances sur la réduction !

Vidéo 3 : On vient de calculer la probabilité pour que deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ commutent sur un corps fini $\mathbb{K}$. La généralisation de ce résultat à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ demande un peu plus de savoir et de savoir-faire. De savoir tout d'abord, avec le théorème de décomposition de Frobenius qui va trouver son objectif plein-emploi dans cette vidéo, et de savoir-faire avec des techniques classiques (mais manifestement souvent ignorées des étudiants à l'agrégation) de séries génératrices.

8.35 Dernières décimales de n^{10^d} (aux olympiades ou plus si affinités)

Un petit exercice d'olympiades en arithmétique. Au programme : congruence, indicatrice d'Euler, groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

8.36 Le plein de super (premier !)

Un petit exercice fortement inspiré de "A fun number theory problem" de Dr Barker, nous donne prétexte à donner la preuve assez ignorée (mais non moins brillante, venue du cerveau fertile de Paul Erdös) d'un théorème célébrissime d'arithmétique, que nous ne nommerons pas pour ne pas spoiler (ou divulgâcher comme disent nos cousins québecois).

Pour la petite histoire, Paul Erdös a trouvé cette preuve à 18 ans, et en a profité pour écrire ce poème : "Chebychev said it, and I say it again, there is always a prime between n and 2n".

8.37 Formes quadratiques sur le corps des rationnels par Adem Zeghib

Adem nous propose une recherche guidée vers la question d'existence (ou non) de points rationnels solutions de l'équation $q(x) = 1$, où q est une forme quadratique définie positive à coefficients entiers. On va voir tout d'abord que l'existence d'un seul point rationnel implique toute une "sphère de points", puis, à l'aide de contre-exemples choisis, que cette existence n'est pas acquise en petite dimension.

8.38 Le théorème à la fin heureuse- la preuve de Paul Erdös

Un joli problème dans le plan affine qui donné naissance à une solution élégante de Paul Erdös, une théorie (et pas la moindre, la théorie de Ramsey), et un mariage...

8.39 Décimales et groupes cycliques- le nombre 142857 et ses amis

La magie revient à la mode avec le retour de Gérard Majax dans les débats politiques. Alors, voici un petit tour qui fait intervenir groupes cycliques et décimales.

8.40 Les suites de Farey

Vidéo 1 : Mathématiques récréatives aujourd'hui ! Avec les suites de Farey. Des suites si simples à définir, mais si profondes en conjectures.

Vidéo 2 : Les suites de Farey. Des suites si simples à définir, mais en ligne rouge avec les approximations de réels par des rationnels, et surtout, avec l'hypothèse de Riemann !

8.41 Le théorème des deux carrés par l'approximation rationnelle

Voici une preuve élémentaire du théorème des deux carrés qui utilise un théorème d'approximation rationnelle que l'on a prouvé (également de façon élémentaire) sur cette chaîne, voir https ://youtu.be/bvK7aSUDmjQ

8.42 Des formules polynomiales pour les nombres premiers ?

Vidéo 1 : On donne tout d'abord deux méthodes pour prouver que l'ensemble des nombres premiers est infini. Point de départ d'une quête deux fois millénaire.

Vidéo 2 : On présente ici deux formules explicites amusantes, une formule donnant le n-ième nombre premier, et une autre formule donnant le nombre de nombres premiers plus petits que n.

8.43 La formule du binôme quantique

Voici une formule de combinatoire qui généralise la formule bien connue du binôme de Newton. Mais cette formule, au lieu de s'interpréter avec les parties à m éléments dans un ensemble à n éléments, concerne les sous-espaces de dimension m dans un espace de dimension n sur un corps de cardinal q. On profitera du contexte pour introduire la notion de type d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ et de cellules de Schubert de la grassmannienne.

8.44 Pavage d'un ballon de foot par des hexagones ?

Amis footeux bonsoir ! On va montrer qu'il est impossible de paver un ballon par des hexagones. La même étude nous montrera que la chose est possible si le ballon est torique. Et cette possibilité n'est pas qu'une performance sportive, c'est également un moyen raffiné de voir un isomorphisme exceptionnel entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

8.45 Origines de la théorie des représentations

Vidéo 1 : Un résumé de l'excellent article "tout public" (!) de Keith Conrad "the origin of representation theory" que l'on peut trouver sur sa page web. On y découvre comment la factorisation d'une matrice circulante générique a permis à Dedekind d'aboutir au problème de déterminant d'une table de groupe, résolu il y a 120 ans par Frobenius, donnant ainsi naissance à la théorie des représentations.

Vidéo 2 : Dans ce second volet, on s'inspire du calcul pour le groupe symétrique $\mathrm{S}_3 pour comprendre la situation gnrale.$

8.46 Galois et la non résolubilité par radicaux

Vidéo 1 :Comment Evariste Galois a pu prouver cette non résolubilité par radicaux de certains équations en degré 5, la où Leonhard Euler s'était cassé les dents ? Et puis pourquoi 5 d'abord ? On fait le point détaillé sur les étapes de sa preuve qui consiste à transvaser le problème en un problème sur les groupes finis.

8.47 Un tour de magie (avec des nombres binaires !)

Nous recevons la visite de notre ami Antoine qui nous propose un tour de magie avec les nombres binaires.

8.48 Peut-on couper un gâteau (polygonal) en 6 parts égales avec trois coups de couteau ?

Une petite histoire extraite du livre très recommandable de Pascal Boyer "Algèbre et géométries". Une solution étonnante à ce problème très concret, qui utilise le TVI dans tous ses états.

8.49 Un problème de cinéphile !

Petit problème ludique de géométrie dans une salle de cinéma !

8.50 Un paquet cadeau, c'est pour offrir !

On veut montrer qu'un compact convexe X de $\mathbb{R}^n$ peut être "empaqueté" dans un hypercube circonscrit (chaque face touche X et X est inclus dans l'hypercube). La preuve pour $n = 2$ ne demande finalement que le théorème des valeurs intermédiaires. La preuve pour $n = 3$ nous permet de dévoiler la puissance des groupes d'homotopie. On présentera au passage le fameux principe de l'assiette à soupe.

8.51 Concours SMF-Junior 2022-Algèbre

Le concours SMF Junior est probablement le défi le plus haut perché pour nos étudiants en mathématiques. Je propose de faire de la retape ce concours prestigieux dans un premier temps, puis, de corriger le problème qui a été donné en algèbre. On parlera donc du dénombrement des sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent (sur un corps fini).

8.52 Carnet de Voyage en Analystan : la présentation

La dernière version de carnet de voyage en Analystan vient d'arriver avec son lot de nouveautés que l'on présente ici.

8.53 Carnet de Voyage en Algébrie : la présentation

La seconde édition de carnet de voyage en Algébrie vient d'arriver chez Calvage et Mounet avec son lot de nouveautés que l'on présente ici.

8.54 Combinatoire et placements de table

Une formule certainement utile pour les fêtes de fin d'années : de combien de façons peut-on placer n couples autour d'une table de sorte que chaque couple soit séparé. Et nous voici en route pour une aventure festive (et mathématique !)

8.55 Utilisation des configurations en théorie des groupes

Sur l'exemple de la configuration de Cremona-Richmond, on propose de donner un exemple édifiant de l'utilisation des configurations pour mieux comprendre certains groupes finis. En réalisant une configuration via deux "géométries" différentes, on peut réaliser de deux manières le groupe des automorphismes de la configuration et relier ainsi deux groupes finis classiques. On présente ensuite des situations analogues avec le plan de Fano et la configuration de Desargues. La présentation est un diaporama de ma collaboratrice Marie Péronnier et le texte provient d'un travail conjoint avec Jérôme Germoni dans le tome 2 d'Histoires hédonistes de groupes et de géométries.

8.56 Un 2-Sylow de S_4 en 6ème avec l'IREM

Je propose de présenter ici une de mes fiches "Galion" de sixième. On apprenait les groupes à cette époque, et je trouve admirable le travail de l'IREM pour faire passer ce que l'on appelait les maths modernes. On finit avec un peu de recul sur les maths de master qui se cachent derrière cette fiche. Mais tout de même, quelle utopie extraordinaire en cette fin des trente glorieuses.

8.57 $\zeta(2)$- Les plus belles preuves !

La formule qui affirme que la somme des $1/n^2$ vaut $pi^2/6$ est bien connue de tous les mathématiciens. Après avoir motivé les troupes, on se lance dans un florilège de preuves célèbres plus jolies les unes que les autres que l'on peut retrouver (pour certaines) sur https ://www.math.cmu.edu/ bwsulliv/basel-problem.pdf

8.58 United Choir of Baire Lovers

Vidéo 1 : Tarare (et on a fait des maths)

Vidéo 2 : La dernière échéance, United Choir of Baire Lovers

8.59 U-Turn (Philippe) par Guillaume Mallet

Une année belle année (2021-2022) de prépa pleine d'émotions, qui finit en chanson, avec Guillaume et sa cover de U-Turn (Lili)

En France, tout finit par des chansons !