Correction du controle continu
Novembre 2004

Exercice 1 1) On sait que $\phi(f) = (f(1), f(2))$. Soit α, β deux reels. On a

$$\phi(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g)(1), (\alpha f + \beta g)(2)) = (\alpha f(1) + \beta g(1), \alpha f(2) + \beta g(2)) =$$

$$\alpha(f(1), f(2)) + \beta(g(1), g(2)) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g).$$

Conclusion, ϕ est une application lineaire.
2) Soit $F = \{f \mid f(1) = f(2) = 0\}$. a) F est donc egal a $\{f \in E \mid \phi(f) = 0\}$. F est donc le noyau de E. F est donc en particulier un sous espace vectoriel de E.
b) F est non reduit a l'application nulle. Par exemple l'application $x \mapsto (x-1)(x-2)$ est dans F. Donc, comme le noyau n'est pas trivial, ϕ n'est pas injective.
c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On peut trouver une fonction (par exemple une application affine) telle que $f(1) = a$ et $f(2) = b$. On a alors, $\phi(f) = (a, b)$. Ceci implique que ϕ est surjective.

Exercice 2 1) On derive le polynome P pour obtenir

$$P' = 1 + X + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1}.$$

On a donc bien

$$P = P' + \frac{1}{n!}X^n.$$

2) Soit, par l'absurde, α une racine multiple de P. D'apres le theoreme du cours, il vient: $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. D'apres 1), cela entraine $\frac{1}{n!}\alpha^n = 0$, c'est a dire $\alpha = 0$. Or $P(0) = 1 \neq 0$, absurde. En conclusion, P ne possede pas de racine multiple.
3) P est un polynome complexe de degre n. Il possede donc, d'apres le theoreme de Dalembert-Gauss, n racines avec multiplicites. D'apres 2), P possede n racines distinctes.

Exercice 3 Quand on veut calculer un PGCD de deux polynomes, on se refere generalement a l'algorithme d'Euclide. L'ennui, c'est que les calculs sont ici difficiles sans machine et meme monstrueux... Donc, soit le prof est cruel, sadique, etc.. soit il s'est trompe. Absurde donc (si, si!). Conclusion, il y a forcement une autre methode. La seule chance est qu'un de ces polynomes soit factorisable. On peut aller donc en toute confiance vers la recherche de racines evidentes. On voit que 2 est racine de B et il en resulte apres une division de polynomes que

$$B = (X-2)(4X^2 + 14X + 6) = 2(X-2)(X+3)(2X+1).$$

Il s'agit de la decomposition de B en facteurs irreductibles. On verifie que 2 est racine de A, et que -3 et $-\frac{1}{2}$ ne sont pas racines de A. Le PGCD de A et B est donc $(X-2)$.

Exercice 4 1) On voit tout de suite que pour tout i,

$$C_{i+1} - C_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que pour tout couple (i,j),

$$C_j - C_i = (j-i)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2) On considere maintenant trois indices distincts i, j, k, en appliquant cette formule, on obtient

$$(k-j)(C_k - C_j) = (j-i)(C_j - C_i).$$

Ceci entraine que trois colonnes quelconques sont liees.
3) Comme le rang de A est egal a la dimension de l'espace engendre par ses colonnes, il vient que $\mathrm{rg}(A) < 3$. De plus, le rang d'une matrice est egal a la dimension maximale d'une sous-matrice inversible. Comme la sous-matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$$

est inversible (elle est de rang 2), on en deduit que $2 \leq \mathrm{rg}(A) < 3$, donc, le rang de A est 2.

Exercice 5 1) Soit y dans $\mathrm{im}(f)$. Il existe donc x tel que $f(x) = y$, il vient donc

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0.$$

Donc, $y \in \ker(f)$. Conclusion $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
2) On pose $r = \mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{im}(f)$, et $q = \dim \ker(f)$. D'apres la formule du rang, on a $r + q = n$, et d'apres 1), il vient $r \leq q$. On en deduit $2r = r + r \leq r + q = n$. D'ou l'inegalite demandee.
3) Comme G est un supplementaire de $\ker(f)$, on a

$$\dim G = \dim E - \dim \ker(f) = n - q = r.$$

4) Montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est une partie libre. Supposons donc qu'on ait la relation

$$\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_r f(e_r) = 0$$

Cela implique

$$f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r) = 0,$$

c'est a dire

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r \in \ker(f).$$

Or, les e_i appartiennent au sous espace G, donc

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r \in \ker(f) \cap G = \{0\}.$$

Comme la partie des e_i est libre on obtient que $\alpha_i = 0$ pour tout i.
5) D'apres 4) $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est une partie libre, on peut donc la completer en une base de $\ker(f)$ par le theoreme de la base incomplete. On obtient une base $(f(e_1), \ldots, f(e_r), e'_1, \ldots e'_s)$ de $\ker(f)$. Comme $\ker(f)$ et G sont supplementaires,

$$(e_1, \ldots, e_r, f(e_1), \ldots, f(e_r), e'_1, \ldots, e'_s) \text{ est une base de } E.$$

Donc, 2r+s=n, ce qui entraine $s = n - 2r = m$. La matrice de f dans cette base est donnee par

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\I_r & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$