
Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix.

L’utilisation de documents de toute nature et de calculatrices n’est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d’appréciation significatif.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *Ensembles* (3,5 points).

Soit E un ensemble et f une application de E dans E . On rappelle que pour tout sous-ensemble F, G de E , on note $F \setminus G$ l’ensemble constitué des éléments de F qui ne sont pas dans G .

Montrer que l’égalité suivante est vérifiée pour tout sous-ensemble A, B de E :

$$f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(A \setminus B).$$

On montre cela comme d’habitude à l’aide d’une double inclusion.

$f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \setminus B)$. Soit x dans $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. cela signifie $f(x) \in A$ mais $f(x) \notin B$. Ceci entraîne $f(x) \in A \setminus B$ c’est à dire $x \in f^{-1}(A \setminus B)$.

$f^{-1}(A \setminus B) \subset f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. Soit x dans $f^{-1}(A \setminus B)$. Cela signifie $f(x) \in A \setminus B$. C’est à dire $f(x) \in A$ et $f(x) \notin B$. Ceci entraîne $x \in f^{-1}(A)$ et $x \notin f^{-1}(B)$, c’est à dire $f(x) \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Exercice 2 *Nombres complexes* (6 points).

1. Résoudre l’équation suivante dans \mathbb{C} :

$$Z^3 = i.$$

On passe en coordonnées polaires. Soit $Z = re^{it}$, ou r est un réel positif et t un réel. L’équation donne

$$r^3 e^{3it} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

L’identification en polaire donne donc $r^3 = 1$ et $3t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

D’où, $r = 1$, et $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

Les solutions sont donc $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $Z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

2. Soit α un réel. On pose

$$x = \frac{e^{i\alpha} - 1}{i(e^{i\alpha} + 1)}.$$

Mettre x sous la forme $\tan(\beta)$ où β est un angle à préciser.

On élimine $e^{i\alpha/2}$ au numérateur et au dénominateur. Cela donne

$$x = \frac{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}}{i(e^{i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2})}.$$

On divise par 2 en haut et en bas et on reconnaît les formules du sinus et du cosinus (formules d'Euler).

$$x = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \tan(\alpha/2).$$

3. En déduire les solutions de l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = i.$$

On mettra les solutions sous la forme $\tan(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq 3$, où les α_i sont trois angles à préciser.

On pose le changement de variable $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$ dont le changement de variable inverse est donné par $z = \frac{Z-1}{i(Z+1)}$. Le 1) donne les solutions pour Z : $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $Z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Par 2) et par la formule du changement de variable inverse, il vient $x = \tan(\alpha_i)$, avec $\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12}$, $\alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Problème 1 Groupes (10,5 points)

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e . Pour tout x de G , on posera $x^2 := x * x$. On note H l'ensemble suivant :

$$H := \{x \in G \mid x^2 = e\}.$$

On se propose d'étudier H dans deux exemples. Les deux parties sont indépendantes.

A. On suppose dans cette partie que G est un groupe commutatif.

1. Montrer que pour tout x, y dans G , on a $(x * y)^2 = x^2 * y^2$.

*Facile ! à l'aide de la commutativité, on a $(x*y)^2 = x*y*x*y = x*x*y*y = x^2*y^2$.*

2. Soit ϕ l'application de G dans G telle que $\phi(x) = x^2$. Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.

*Il suffit de montrer $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$. C'est exactement le 1).*

3. En déduire que H est un sous-groupe de G .

Par définition, H est le noyau de ϕ . On sait que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe.

4. On suppose que $H = \{e\}$. Montrer que ϕ est injective.

Le théorème du cours dit que le morphisme ϕ est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre. Comme H est le noyau, on a l'assertion demandée.

QUESTION BONUS. On suppose de plus que G est d'ordre pair. Montrer que ϕ n'est pas injective.

Il suffit donc de montrer que H n'est pas réduit à l'élément neutre. Supposons l'inverse, dans ce cas, il y a un nombre impair d'éléments tels que $x^2 \neq e$, donc un nombre impair d'éléments tels que $x \neq x^{-1}$. On peut donc scinder $G \setminus \{e\}$ (de cardinal impair) en une partition constituée de paires $\{x, x^{-1}\}$, ce qui est évidemment, impossible.

B. On suppose maintenant que $(G, *)$ est le groupe de permutation (\mathcal{S}_3, \circ) de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

1. Combien \mathcal{S}_3 possède-t-il d'éléments? Décrire ces éléments.

C'est le nombre de permutation d'un ensemble à 3 éléments, c'est à dire $3! = 6$.

Il y a l'élément neutre $e = (123)$, les transpositions d'ordre 2 $t_1 = (213)$, $t_2 = (132)$, $t_3 = (321)$, et les 3-cycles $c_1 = (231)$, $c_2 = (312)$.

2. Combien H possède-t-il d'éléments? En déduire que H n'est pas un sous-groupe de \mathcal{S}_3 .

Les éléments de carré identité sont l'élément neutre et les trois transpositions. Ce qui fait quatre éléments en tout. Si H était un sous groupe, on aurait que 4 divise 6 par le théorème de Lagrange qui affirme que le cardinal d'un sous groupe divise le cardinal du groupe. ceci est bien sûr absurde. Donc H n'est pas un sous groupe.