ACADÉMIE DE PARIS.

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'AN 1828.

(*) Indiquer ici les nom et prénoms.

(**) Les élèves de la classe de Rhétorique indiqueront s'ils sont vétérans.

(***) Placer ici la devise.

(*) Galois

né le an a département d

Élève du Collége (**)

(***)

1ère Question. 1re Méthode

Soit $Fx=0$ l'équation pour laquelle on demande la limite supérieure K des racines, et dans laquelle nous supposerons pour plus de simplicité le plus haut terme positif. Comme l'hypothèse $x=+\infty$ donne pour résultat $Fx>0$, et qu'aucune racine ne doit être comprise entre $+\infty$ et une limite supérieure des racines, il s'ensuit que toute limite supérieure des racines substituée dans l'équation doit donner un résultat positif. Mais K étant une limite, $K+z$ (z étant positif) en est encore une. Donc $F(K+z)$ doit être positif pour toute valeur positive de z. Et réciproquement si $F(K+z)$ est positif pour toute valeur positive de z, K sera limite. Car aucune valeur supérieure à K n'annullera Fx.

Il faut donc et il suffit que pour toute valeur positive de z, on ait $F(K+z)$ ou bien

$$FK+F'K.z+\tfrac{1}{2}F''K.z^2+\tfrac{1}{2.3}F'''K.z^3+\ldots$$

positif. Et cette condition sera évidemment remplie, si l'on suppose que tous les coëfficients de z dans cette fonction soient positifs.

Ainsi, on n'a qu'à résoudre le système d'inégalités

$$FK>0,\quad F'K>0,\quad F''K>0,\quad \ldots\ldots,\ F^{(m-1)}K>0$$

Pour cela on cherchera le plus petit nombre entier qui satisfasse à la dernière, puis le plus petit nombre entier qui satisfasse à la fois aux deux dernières, puis aux trois derniers, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait le plus petit nombre qui rend tous ces termes positifs. Arrivé à ce nombre, on aura la limite supérieure cherchée.

Si l'on demandait au contraire la limite inférieure l des racines, on ferait dans Fx, $x=-y$, on chercherait la limite supérieure K des racines de l'équation $F(-y)=0$, et l'on ferait $l=-K$, et comme K est plus ~~petit~~ grand que toutes les valeurs de y, il s'ensuit que $-K$ ou l est plus petit que toutes celles de $-y$ ou de x.

On peut présenter cette règle, appelée Méthode de Newton, d'une manière un peu plus simple.

Puisque K est plus grand et l plus petit que toutes les racines de l'équation $Fx=0$, il faudra que l'équation en z, $F(K+z)=0$ n'ait pas de racines >0, sans quoi $Fx=0$ aurait des racines $>K$; et de même, que l'équation en z, $F(l+z)=0$

Répétition du numéro et de la devise.

n'ait pas de racine < 0, sans quoi $Fx=0$ aurait de racine $< l$. Les conditions à exprimer sont donc que $F(K+z)=0$ n'ait pas de racines positives, et que $F(l-z)=0$ n'en ait pas de négatives. Il suffit pour cela que la première n'ait que des permanences, et la seconde, que des variations de signe. C'est qui donnera encore deux systèmes d'inégalités à résoudre dont l'un donnera K et l'autre l.

2^e Méthode.

La 1^re Méthode donne en général des approximations assez serrées, mais on voit qu'elle est longue et pénible dans la pratique. En voici une plus expéditive.

Soit m le degré de l'équation, $n+1$ le rang du premier terme négatif, N le plus grand des coëfficients des termes négatifs, pris positivement, on sait que l'équation ~~débarrassée~~ de coëfficients fractionnaires, soit de la forme

$$x^m + \dots + Hx^{m-n+1} - Kx^{m-n} \dots\dots - Nx^p \dots\dots = Fx = 0 \qquad (1)$$

Il s'agit d'abord de trouver un nombre positif qui donne dans ce polynôme un résultat positif ainsi que tout nombre plus grand. Or l'inégalité $Fx > 0$ est évidemment satisfaite par toute solution positive de l'inégalité

$$x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} \dots\dots\dots - Nx - N > 0 \qquad (2)$$

savoir $x^m - N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0$. Cette inégalité n'étant pas satisfaite en général par 1, la marche que nous suivons ne peut nous faire espérer de limite < 1.

~~Nous pouvons y faire $x = 1+z$, elle devient z étant >0; elle devient~~

$$\cancel{(1+z)^m - \frac{N}{z}\left[(1+z)^{m-n+1}-1\right] > 0} \qquad \cancel{(4)}$$

Nous supposerons donc dans l'équation (2), $x-1$ positif et nous pourrons faire disparaître le dénominateur: elle deviendra, en faisant passer N dans l'autre membre,

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > N \qquad (3)$$

Inégalité qui sera satisfaite par toute solution de l'inégalité

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n-1} > 0 \quad \text{ou} \quad x^{n-1}(x-1) - N > 0$$

Et cette dernière sera satisfaite tant que $(x-1)^n - N$ ne sera pas < 0, savoir quand $x =$ ou $> 1+\sqrt[n]{N}$. Donc $1+\sqrt[n]{N}$ est une limite supérieure des racines de l'équation (1).

Si l'on demandait la limite inférieure, on ferait la transformation indiquée ci-dessus et l'on en déduirait cette règle:

N ~~étant~~ le plus grand des termes négatifs de rang impair et positifs de rang pair pris positifs, et $n+1$ étant le moindre des rangs de ~~ces~~ ces termes, $1+\sqrt[n]{N}$ sera, en signe contraire, la limite inférieure cherchée.

Exemple

On a l'équation

$$x^3-\frac{12}{x^2-2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2-2}$$

Elle devient, multipliant par $x^2(x^2-2)$ et ordonnant

$$x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6=0 \qquad (1)$$

Si l'on demande la limite supérieure des racines de cette équation, et qu'on emploie d'abord la première méthode, on cherchera d'abord les coefficients de z dans $F(x+z)$, ~~et remontant~~ on supposera tous ces coëfficients >0 et remontant des dernières inégalités aux premières, on aura le plus petit nombre qui les satisfait toutes. Voici le type du calcul.

$x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6$ 3
$7x^6-10x^4-12x^2-24x+8$ 2
$21x^5-20x^3-12x-12$ 2
$35x^4-20x^2-4$ 1
$35x^3-10x$ 1
$21x^2-2$ 1
x 0

3 est donc la limite supérieure demandée. Dans cet exemple, c'est la limite entière la plus approchée car 2 donne un résultat négatif dans l'équation. L'autre méthode donnerait pour limite $1+\sqrt[2]{12}$ qui tombe entre 4 et 5, et est, comme on voit, moins approchée.

Occupons-nous de la limite inférieure et faisons pour cela $x=-y$, l'équation devient $x^7-2x^5-4x^3+12x^2+8x+6=0$

La première méthode donnera les résultats suivants

$x^7-2x^5-4x^3+12x^2+8x+6$ 2
$7x^6-10x^4-12x^2+24x+8$ 2
$21x^5-20x^3-12x+12$ 1
$35x^4-20x^2-4$ 1
$35x^3-10x$ 1
$21x^2-2$ 1

-2 est donc la limite cherchée. La seconde méthode donne $-(1+\sqrt[2]{4})$ ou -3 qui est encore moins approchée.

~~L'équation~~ $\cancel{x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6=0}$ ~~n'ayant que deux permanences elle ne saurait avoir que~~

L'équation $x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6=0$ n'ayant, si l'on veut, que deux permanences n'aura tout au plus deux racines entre -2 et 0; n'ayant de même que trois variations, elle aura tout au plus trois racines positives.

2e Question

De Asymptotis.

Une asymptote d'une courbe est une droite qui s'approche indéfiniment d'une cou[rbe] et se confond avec elle à l'infini. Cherchons, d'après cela, une règle pour dét[er]miner les asymptotes d'une courbe donnée.

Supposons d'abord que l'équation de la courbe soit du $m^{ième}$ degré, et de la for[me]

$$T_m + T_{m-1} + T_{m-2} + \cdots = 0 \qquad (1)$$

T_m, T_{m-1}, &c, étant des fonctions homogènes de x et y dont l'indice marq[ue] le degré. Soit $y = ax + b$ (2) une asymptote de cette courbe. ~~Supposons que~~ (Nous supposons que l'asymptote ne soit pas parallèle à l'axe des y, parce qu'on peut éviter ce cas en ~~mot~~ changeant partout y en x).

Si l'on divise l'équation (1) par x^m, l'équation (2) par x, et qu'on y sup[pose] x infini, elles se réduisent à $\frac{1}{x^m} T_m = 0$, $\frac{y}{x} = a$. Or pour que deux lignes se confondent à l'infini, il faut évidemment que leurs équations aient lieu en même temps ~~à l'inf.~~ quand x est infini (parce que la droite n'est pas parallèle aux y). Donc les deux équations $\frac{1}{x^m} T_m = 0$, $\frac{y}{x} = a$, doivent avoir lieu en même temps, c'est à dire que a doit ~~&~~ être une racine de l'équation en ~~x~~ $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{x^m} T_m = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, en d'autres termes $y - ax$ doit être un diviseur de T_m. C'est la première condition pour que la droite $y - a[x]$ soit une asymptote de la courbe (1).

Soit donc $T_m = (y - ax) \times Q$, et mettons l'équation (1) sous la forme

$$(y - ax) \times Q + T_{m-1} + T_{m-2} + \cdots = 0$$

Si on divise cette équation par x^{m-1} et qu'on y suppose x infini, elle se réduit à $(y - ax) \times \frac{Q}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^{m-1}} T_{m-1} = 0$. Mais $\frac{Q}{x^{m-1}}$ et $\frac{1}{x^{m-1}} T_{m-1}$ sont des fonctions entières de $\frac{y}{x}$ ou de a, et ces fonctions ne sont autre chose que ce que deviennent Q et T_{m-1} quand on y fait $x = 1$, $y = a$. Faisant donc ces substitutions l'équation ~~devient~~ ci-dessus donnera $y - ax = -\frac{T_{m-1}}{Q}$. C'est la va[leur] de b. Cette valeur sera toujours réelle et finie quand Q ne sera nul et qu'il n'y aura pas plusieurs facteurs de T_m égaux à $y - ax$.

Au lieu de substituer dans $\frac{Q}{x^{m-1}}$, a pour $\frac{y}{x}$, on peut prendre la fonct[ion] dérivée de $\frac{T_m}{x^m}$ par rapport à $\frac{y}{x}$ et y substituer a; car Q n'est aut[re] chose que $\frac{\frac{T_m}{x^m}}{\frac{y}{x} - a}$ ce qui devient $\frac{0}{0}$ quand $\frac{y}{x} = a$.

Voici donc la règle générale: soit $y - ax$ un facteur de T_m; substituez dans T_m pour x, 1, pour y, a, et prenez la dérivée par rapport à a. Substituez dans T_{m-1} pour x, 1, pour y, a ~~et prenez la fonction dérivée par rapport~~ Divisez ce résultat pris en signe contraire par le précédent, et vous aurez la valeur de b.

Nous allons appliquer cette règle générale aux courbes du second degré dont l'équation est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

ACADÉMIE DE PARIS.

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'AN 1827.

(*) Indiquer ici les nom et prénoms. (*)

né le an à département d

(**) Les élèves de la classe de Rhétorique indiqueront s'ils sont vétérans.

(***) Placer ici la devise.

Élève du Collége (**)

(***)

L'on a ici ~~x~~ $m=2$, $T_2 = Ay^2+Bxy+Cx^2$, $T_1 = Dy+Ex$. Les deux facteurs de la forme $y-ax$ dans lesquels se décompose T_2 sont déterminés par les deux valeurs de a, $a = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$. On en déduit par la règle générale, $b = -\frac{Da+E}{2Aa+B}$. Les valeurs de a n'étant réelles que dans le cas où B^2-4AC n'est pas <0, l'ellipse n'a pas d'asymptotes. De plus quand $B^2-4AC=0$, la valeur de b étant infinie, la parabole n'a pas non plus d'asymptotes. Dans le cas de l'hyperbole, les valeurs de a étant toujours réelles et les valeurs de b toujours finies, les asymptotes sont réelles et au nombre de deux.

On voit ici, comme dans le cas général, que les asymptotes ne dépendent que des termes du $m^{ième}$ et du $m-1^{ième}$ degrés, c'est à dire dans ce cas des termes dépendants des variables.

Donc l'équation qui représente, dans le cas de l'hyperbole, le système des asymptotes, aura les mêmes termes dépendants que l'équation de l'hyperbole. On peut donc obtenir ~~déterminer~~ à priori cette équation ~~par~~ en déterminant le dernier terme de manière que l'équation se décompose en facteurs du premier degré.

On trouvera ainsi l'équation

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+\frac{AE^2-BDE+CD^2}{4AC-B^2}=0$$

qui est la forme la plus générale d'un système de deux droites et qui représentera les asymptotes de toute courbe qui n'en diffère que par les ~~aura mêmes~~ termes indépendants. Cherchant donc les points où ce système coupe les axes, on construira les asymptotes, sans ~~passer par des radicaux~~ avoir à construire de radicaux.

Telle est la marche générale à suivre quand on a l'équation de la courbe. Mais si elle est résolue par rapport à y, et que l'on ait

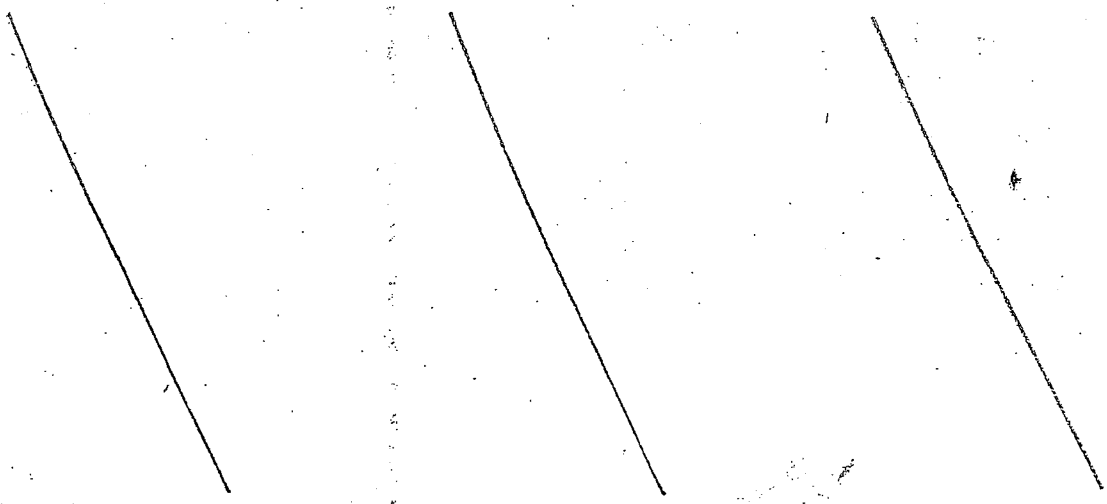
$$y = cx+d \pm m\sqrt{(x-K)^2+n}$$

Voici la ~~raisonnement~~ méthode dont on peut se servir.

Développant le radical en série : il vient

$$y = cx+d \pm m(x-K) \pm \frac{P}{x} \pm \frac{Q}{x^2} \ldots$$

Si l'on fait $x=\infty$ dans cette équation elle devient $y = cx+d \pm m(x-K)$, et représente deux lignes droites qui sont précisément les asymptotes de l'hyperbole. On peut faire voir ici que l'asymptote peut s'éloigner aussi peu



que l'on veut de l'hyperbole. ~~pour~~ Soit en effet p une quantité dont doivent tout au plus différer les ordonnées des deux lignes, il suffit de poser,

$$\frac{P}{x} + \frac{Q}{x^2} + \dots < p$$

inéquation toujours résoluble.

Exemple.

On a l'équation

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - 1 = 0$$

On trouve ici, $a = 2 \pm 1$, $b = -\frac{2a+1}{2a-4}$. Les deux asymptotes sont donc

$$y = x + \frac{3}{2} \qquad y = 3x - \frac{7}{2}$$

Ces deux équations multipliées donnent

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - \frac{21}{4} = 0$$

C'est aussi ce qu'on aurait pu trouver par la ~~sect~~ formule générale donnée ci dessus.

Enfin si l'on veut se servir du développement en série, la valeur de y en fonction de x est

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}$$

et on en déduit pour les équations des asymptotes $y = 2x - 1 \pm \left(x - \frac{5}{2}\right)$; ce qui revient à ce que nous avons trouvé.

L'intersection des asymptotes $y = x + \frac{3}{2}$, $y = 3x - \frac{7}{2}$ donnera pour les coordonnées du centre $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$.

Si l'on veut avoir ~~deux~~ système de diamètres conjugués, il faudra prendre une parallèle à l'axe des y passant par le centre, $y = 4$, et la droite $y = 2x - 1$, qui est la ~~valeur~~ partie de la valeur de y hors du radical.

Pour avoir les axes, il suffira de partager également les angles des asymptotes.

Répétition du numéro et de la devise.