1) Sujet :

1) Exposer, sur une équation de degré quelconque, le moyen d'obtenir :

1) une limite supérieure des racines positives

2 une limite inférieure des racines négatives, c'est-à-dire un nombre plus grand <u>numériquement</u> que toutes les racines de ce dernier genre.

Puis appliquer ce résultat à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tout dénominateur : $\frac{x^3-12}{x^2-2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2-2}$

2) Exposer sur l'équation générale des courbes du second degré la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe :

$$y^2+3x^2-4xy+x+2y-1=0,$$

dont il faudra d'ailleurs construire les lignes ou points remarquables tels le centre, les diamètres, les axes, etc…

2) Copie d'Évariste Galois au concours d'entrée de l'École Préparatoire (1829) :

1ère question :

1ère méthode.

Soit Ex=0 l'équation pour laquelle on demande la limite supérieure K des racines, et dans laquelle nous supposerons pour plus de simplicité le plus haut terme positif. Comme l'hypothèse x=+∞ donne pour résultat Ex>0, et qu'aucune racine ne doit être comprise entre +∞ et une limite supérieure des racines, il s'ensuit que toute limite supérieure des racines substituée dans l'équation doit donner un résultat positif. Mais K étant une limite, K+z (z étant positif) en est encore une. Donc E(K+z) doit être positif

pour toute valeur positive de z. Et réciproquement, si E(K+z) est positif pour toute valeur positive de z, K sera limite. Car aucune valeur supérieure à K n'annulera Ex.
Il faut donc et il suffit que pour toute valeur positive de z, on ait E(K+z) ou bien

$$EK + E'Kz + \frac{1}{2}E''Kz^2 + \frac{1}{2.3}E'''Kz^3 + ...$$

positif. Et cette condition sera évidemment remplie, si l'on suppose que tous les coefficients de z dans cette fonction soient positifs.
Ainsi, on n'a qu'à résoudre le système d'inégalités

$$EK>0 \ , \ E'K>0 \ , \ E''K>0 \ , ..., \ E^{(m-1)}K>0$$

Pour cela, on cherchera le plus petit nombre entier qui satisfasse à la dernière, puis le plus petit nombre entier qui satisfasse à la fois aux deux dernières, puis aux trois dernières, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait le plus petit nombre qui rende tous ces termes positifs. Arrivé à ce nombre, on aura la limite supérieure cherchée.
Si l'on demandait au contraire la limite inférieure l des racines, on ferait dans Ex x=-y, on chercherait la limite supérieure K des racines de l'équation E(-y)=0, et l'on ferait l=-K, et comme K est plus grand que toutes les valeurs de y, il s'ensuit que –K ou l est plus petit que toutes les valeurs de –y ou de x.
On peut présenter cette règle, appelée méthode de Newton, d'une manière un peu plus simple.
Puisque K est plus grand et l plus petit que toutes les racines de l'équation Ex=0, il faudra que l'équation en z, E(K+z)=0 n'ait pas de racine >0, sans quoi Ex=0 aurait une racine >K ; et de même, que l'équation en z E(l+z)=0 n'ait pas de racine <0, sans quoi Ex=0 aurait des racines<l. Les conditions à exprimer sont donc que E(K+z)=0 n'ait pas de racine positive, et que E(l+z)=0 n'en ait pas de négatives. Il suffit pour cela que la première n'ait que des permanences, et la seconde, que des variations de signe. C'est [ce] qui donnera encore deux systèmes d'inégalités à résoudre dont l'un donnera K et l'autre l.

2e Méthode

La 1ère méthode donne en général des approximations assez sures, mais on voit qu'elle est longue et pénible dans la pratique. En voici une plus expéditive.

Soit m le degré de l'équation, n+1 le rang du premier terme négatif, N le plus grand des coefficients des termes négatifs, pris positivement, en sorte que l'équation débarrassée des coefficients fractionnaires soit de la forme

$$x^m + ... + Hx^{m-n+1} + Kx^{m-n} ..... - Nx^p ...... = Ex = 0 \qquad (1)$$

Il s'agit d'abord de trouver un nombre positif qui donne dans ce polynôme un résultat positif ainsi que tout nombre plus grand. Or l'inégalité Ex>0 est évidemment satisfaite par toute solution positive de l'inégalité

$$x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - .... - Nx - N > 0 \qquad (2)$$

savoir $x^m - N\dfrac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0$. Cette inégalité n'étant pas satisfaite en général par 1, la marche que nous suivons ne peut nous faire espérer de limite **<0 ??**

[plusieurs lignes biffées]

Nous supposerons donc dans l'équation (2), x-1 positif et nous pourrons faire disparaître la dénominateur : elle deviendra, en faisant passer N dans l'autre membre,

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > N \qquad (3)$$

Inégalité qui sera satisfaite par toute solution de l'inégalité

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > 0 \qquad \text{ou} \qquad x^{n-1}(x-1) - N > 0$$

Et cette dernière sera satisfaite tant que $(x-1)^n - N$ ne sera pas <0, savoir quand x= ou > $1+\sqrt{N}$. Donc $1+\sqrt{N}$ est une limite supérieure des racines de l'équation (1).

Si l'on demandait la limite inférieure, on ferait la transformation indiquée ci-dessus et l'on en déduirait cette règle :

N étant le plus grand des termes négatifs de rang impair et positif de rang pair, pris positifs, et n+1 étant le moindre des rangs de ces termes, $1+\sqrt[n]{N}$ sera, en signe contraire, la limite inférieure cherchée.

Exemple

On a l'équation

$$x^3 - \frac{12}{x^2-2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^2-2}$$

Elle devient, multipliant par $x^2(x^2-2)$ et ordonnant

$$x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 6 = 0$$

Si l'on demande la limite supérieure des racines de cette équation, et que l'on emploie d'abord la première méthode, on cherchera d'abord les coefficients de z dans E(K+z), on supposera tous ces coefficients positifs et remontant des dernières inégalités aux premières, on aura le plus petit nombre qui les satisfait toutes.

Voici le type des calculs

$x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6$	3
$7x^6-10x^4-12x^2-24x+8$	2
$21x^5-20x^3-12x-12$	2
$35x^4-20x^2-4$	1
$35x^3-10x$	1
$21x^2-2$	1

3 est donc la limite supérieure demandée. Dans cet exemple, c'est la limite entière la plus approchée car 2 donne un résultat négatif dans l'équation.

L'autre méthode donnerait pour limite $1+\sqrt{12}$, qui est entre 4 et 5, et est, comme on le voit, moins approchée.

Occupons nous de la limite inférieure et faisons pour cela x=-y, l'équation devient

$$x^7-2x^5-4x^3+12x^2+8x+6=0$$

La première méthode donnera le résultat suivant :

$x^7-2x^5-4x^3+12x^2+8x+6$	2
$7x^6-10x^4-12x^2+24x+8$	2
$21x^5-20x^3-12x+12$	1
$35x^4-20x^2-4$	1
$35x^3-10x$	1
$21x^2-2$	1

-2 est donc la limite cherchée. La seconde méthode donne $-(1+\sqrt{4})$ ou –« qui est encore moins approchée.

L'équation $x^7-2x^5-4x^3-12x^2+8x-6=0$ n'ayant, si l'on veut, que deux permanences aura tout au plus deux racines entre -2 et 0 ; n'ayant de même que trois variations, elle aura tout au plus trois racines positives.

2^e question :

Des asymptotes

Une asymptote d'une courbe est une droite qui s'approche indéfiniment d'une courbe et se confond avec elle à l'infini. Cherchons, d'après cela, une règle pour déterminer les asymptotes d'une courbe donnée.

Supposons d'abord que l'équation de la courbe soit du $m^{\text{ième}}$ degré, et de la forme :

$$T_m+T_{m-1}+T_{m-2}+\ldots\ldots=0 \qquad (1)$$

T_m, T_{m-1}, etc, étant des fonctions homogènes de x et y dont l'indice marque le degré. Soit y=ax+b (2) une asymptote de cette courbe (Nous supposons que l'asymptote ne soit pas parallèle à l'axe des y, parce qu'on peut éviter ce cas en changeant partout y en x).

Si l'on divise l'équation (1) par x^m, l'équation (2) par x, et qu'on y suppose x infini, elles se réduisent à $\frac{1}{x^m}T_m=0$, $\frac{y}{x}=a$. Or, pour que les deux lignes se confondent en l'infini, il faut évidemment que leurs équations aient lieu en même temps, c'est à dire que a doit être une racine de l'équation en $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{x^m}T_m=Q(\frac{y}{x})$ en d'atres termes y-ax doit être un diviseur de T_m. C'est la première condition pour que la droite y-ax soit une asymptote de la courbe (1).

Soit donc $T_m=(y-ax)\times Q$, et mettons l'équation (1) sous la forme

$$(y-ax)Q+T_{m-1}+T_{m-2}+\ldots\ldots=0$$

Si on divise cette équation par x^{m-1} et que l'on y suppose x infini, elle se réduit à $(y-ax)\times\frac{Q}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^{m-1}}T_{m-1}=0$. Mais $\frac{Q}{x^{m-1}}$ et $\frac{1}{x^{m-1}}T_{m-1}$ sont des fonctions entières de $\frac{y}{x}$ ou de a, et ces fonctions ne sont autre chose que ce que donnent Q et T_{m-1} quand on fait x=1, y=a. Faisons donc ces substitutions, l'équation ci-dessus donnera $y-ax=-\frac{T_{m-1}}{Q}$.

C'est la valeur de b. Cette valeur sera toujours réelle et finie quand a sera nul et qu'il n'y aura pas plusieurs facteurs de T_m égaux à y-ax.

Au lieu de substituer dans $\frac{Q}{x^{m-1}}$, a pour $\frac{y}{x}$, on peut prendre la fonction dérivée de $\frac{1}{x^m}T_m$ par rapport à $\frac{y}{x}$ et y substituer a, car Q n'est autre chose que $\frac{\frac{T_m}{x^m}}{\frac{y}{x}-a}$, ce qui devient $\frac{0}{0}$ quand $\frac{y}{x}$=a.

Voici donc la règle générale : soit y-ax un facteur de T_m Substituez dans T_m pour x,1, pour y, a, et prenez la dérivée par rapport à a. Substituez dans T_{m-1} pour x, 1, pour y, a. Divisez ce résultat pris en signe contraire par le précédent, et vous aurez la valeur de b.

Nous allons appliquer cette règle générale aux courbes du second degré dont l'équation est :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

L'on a ici m=2, T_2= $Ay^2+Bxy+Cx^2$, T_1=Dy+Ex. Les deux facteurs de la forme y-ax dans lesquels se décomposent T_1 sont déterminés par les deux valeurs de a, $a=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$. On en déduit par la règle générale, $b=-\frac{Da+E}{2Aa+B}$. Les valeurs de a n'étant réelles que dans le cas où B^2-4AC n'est pas <0, l'ellipse n'a pas d'asymptote. De plus, quand B^2-4AC=0, la valeur de b étant infinie, al parabola n'a pas non plus d'asymptote. Dans le cas de l'hyperbole, les valeurs de a étant toujours réelles et les valeurs de b toujours finies, les asymptotes sont réelles et au nombre de deux.

On voit ici, comme dans le cas général, que les asymptotes ne dépendent que des termes du $m^{ième}$ et m-$1^{ème}$ degrés, c'est-à-dire dans ce cas des termes de dépendants des variables.

Donc l'équation qui représente, dans le cas de l'hyperbole, le système des asymptotes aura les mêmes termes dépendants que l'équation de l'hyperbole. On peut donc obtenir a priori cette équation en déterminant le dernier terme de manière que l'équation se décompose en facteurs du premier degré.

On trouvera ainsi l'équation $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+\frac{AE^2-BDE+CD^2}{4AC-B^2}=0$

qui est la forme la plus générale d'un système de deux droites et qui représentera les asymptotes de cette courbe qui ne différera que par des termes indépendants. Cherchant donc les points où ce système coupe les axes, on construira les asymptotes sans avoir à construire de radicaux.

Telle est la marche générale à suivre quand on a l'équation de la courbe. Mais si elle est résolue par rapport à y et que l'on ait

$$y = cx + d \pm m\sqrt{(x-k)^2 + n}$$

Voici la méthode dont on peut se servir : il vient

$$y = cx + d \pm m(x-k) \pm \frac{P}{x} \pm \frac{Q}{x^2} \dots$$

Si l'on fait $x=\infty$ dans cette équation, elle devient $y=cx+d\pm m(x-k)$, et représente deux lignes droites qui sont par conséquent les asymptotes de l'hyperbole. On peut faire voir ici que l'asymptote peut s'éloigner aussi peu que l'on veut de l'hyperbole. Soit en effet p une quantité dont doit tout au plus différer les ordonnées des deux lignes, il suffit de poser

$$\frac{P}{x} + \frac{Q}{x^2} + \dots < p$$

inéquation toujours résoluble.

Exemple

On a l'équation

$$y^2+3x^2-4xy+x+2y-1=0$$

On trouve ici $a=2\pm1$, $b = -\frac{2a+1}{2a-4}$. Les deux asymptotes sont donc

$$y = x + \frac{3}{2} \qquad y = 3x - \frac{7}{2}$$

Ces deux équations multipliées donnent

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - \frac{21}{4} = 0$$

C'est aussi ce que l'on aurait pu trouver par la formule générale donnée ci-dessus.

Enfin, si l'on veut se servir du développement en série, la valeur de y en fonction de x est

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}$$

et on en déduit pour les équations des asymptotes $y = 2x - 1 \pm (x - \frac{5}{2})$, ce qui revient à ce que nous avons trouvé.

L'intersection des asymptotes $y = x + \frac{3}{2}$ $y = 3x - \frac{7}{2}$ donnera pour les coordonnées du centre $x = \frac{5}{2}$, y=4.

Si l'on veut avoir un système de diamètres conjugués, il faudra prendre une parallèle à l'axe des y passant par le centre, y=4 et la droite y=2x-1, qui est la partie de la valeur de y hors du radical. Pour avoir les axes, il suffira de partager également les angles des asymptotes.