# GROUPES D'ISOMETRIES

Le groupe des isométries $\mathrm{Is}(X)$ d'un objet $X$ "mesure" ses symétries (en plus d'avoir une structure de groupe). Il s'agit d'information de nature algébrique sur $X$.
Ce cours est une illustration incontournable des actions de groupes, explicitement au programme de l'agrégation interne. On voit une belle interaction entre la théorie des groupes et la géométrie, ce qui en fait une leçon transverse que l'on peut placer dans bon nombre de situations.

Commençons par voir ce qu'il faut connaître sur les actions de groupes.

## 1 Action de groupes

Soit $G$ un groupe d'élément neutre $e$ et $X$ un ensemble. On dit que $G$ agit sur $X$ s'il existe une application

$$\boxed{\varphi\ :\ G \times X \to X, (g, x) \mapsto g.x}$$

telle que pour tout $x$ dans $X$ :
- $e.x = x$,
- $g.(g'.x) = (gg').x$.

Les deux exemples fondamentaux (et très naturels) sont les suivants

1. Le groupe symétrique $\mathcal{S}(E)$ d'un ensemble $E$ agit sur $E$ de façon naturelle par $(s, x) \mapsto s(x)$.
2. Le groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel $E$ agit sur $E$ de façon naturelle par $(g, v) \mapsto g(v)$.

Fixons un élément $x_0$ dans $X$. Alors, on peut définir une application

$$\varphi_{x_0}\ :\ G \to X, g \mapsto g.x_0.$$

L'image de cette application est appelée orbite de $x_0$ pour l'action de $G$. Il est pratique et intuitif de la noter $G.x_0$. La préimage de $x_0$ par cette application est donc l'ensemble de $g$ de $G$ tels que $g.x_0 = x_0$. On voit facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe de $G$ appelé stabilisateur de $x_0$ pôur des raisons que l'on comprendra parfaitement.

**Proposition** 1 :
*Soit $G$ un groupe agissant sur un ensemble $X$ et $x$ dans $X$. Alors,*

$$G_{g.x} = gG_x g^{-1}.$$

**Démonstration** :
Soit $h$ dans $G_x$, alors,

$$(ghg^{-1}).(g.x) = (gh).((g^{-1}g).x) = (gh).(x) = g.(h.x) = g.x.$$

D'où l'inclusion $gG_x g^{-1} \subset G_{g.x}$. L'inclusion inverse est similaire.

□

**Définition** 1 :
*On dit qu'une action est fidèle si le stabilisateur d'un élément est réduit à l'identité.*

A partir d'une action d'un groupe $G$ sur un ensemble $X$, on peut définir un morphisme de $G$ vers le groupe $\mathcal{S}(X)$ des permutations de l'ensemble $X$ par

$$\phi \ : \ G \rightarrow \mathcal{S}(X), \ \ \phi(g)(x) = g.x.$$

On vérifie que c'est bien un morphisme de groupe à l'aide des axiomes de l'action de groupe.

Une action peut donc être donnée soit par l'application $\phi$, soit par le morphisme $\psi$. Il ne faut surtout pas les confondre : la seconde est un morphisme de groupes dont le noyau est souvent appelé noyau de l'action, la première est une simple application continue (entre autres ne jamais dire qu'un stabilisateur est un noyau, il n'est en général pas distingué !).

**Définition** 2 :
*Le sous-groupe distingué* $\operatorname{Ker}\phi$ *est appelé noyau de l'action. L'action est dite fidèle si ce noyau est trivial.*

## 2 Groupe d'isométries.

**Définition** 3 :
*Le groupe* $\operatorname{Is}(X)$ *des isométries d'un objet* $X \subset \mathbb{R}^3$ *est le sous-groupe des isométries de l'espace affine* $\mathbb{R}^3$ *qui stabilisent* $X$*.*

**Remarque** :
On pourra aussi aisément généraliser les résultats au cas des isométries de $\mathbb{R}^2$. Attention toutefois au fait qu'une symétrie par rapport à un point est un déplacement dans le plan, mais un antidéplacement dans l'espace.

Il faut faire attention à ce que l'on dit quand on parle du groupe d'isométrie d'un solide platonicien, par exemple d'un tétraédre, puisque celui-ci a été défini à similitude près. On va voir que deux objets en similide ont le même groupe d'isométries (à isomorphisme près bien sûr) :

**Proposition** 2 :
*Soit* $\varphi \in GO(\mathbb{R}^3)$ *une similitude. Alors* $\operatorname{Is}(X) \simeq \operatorname{Is}\big(\varphi(X)\big)$.

**Démonstration** :
Soit $\begin{array}{ccc} \operatorname{Is}(X) & \longrightarrow & \operatorname{Is}\big(\varphi(X)\big) \\ g & \longmapsto & \varphi g \varphi^{-1} \end{array}$ morphisme bien défini car si $g \in \operatorname{Is}(X)$,

alors $\varphi g \varphi^{-1}\big(\varphi(X)\big) = \varphi\big(g(X)\big) = \varphi(X)$.
Posons $\varphi = \lambda\psi$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi \in \operatorname{Is}(\mathbb{R}^3)$. Alors, $\varphi g \varphi^{-1} = (\lambda\psi) g (\lambda\psi^{-1}) = \psi g \psi^{-1} \in \operatorname{Is}(\mathbb{R}^3)$ car $\psi \in \operatorname{Is}(\mathbb{R}^3)$.
Ce morphisme est clairement injectif et surjectif.

□

Voici maintenant une proposition qui va d'une part ramener l'etude de $\operatorname{Is}(X)$ à celle de $\operatorname{Is}^+(X)$ (le sous-groupe des déplacements de $\operatorname{Is}(X)$), d'autre part ramener l'étude de $\operatorname{Is}^+(X)$ à l'étude de permutations de sommets. On commence pour cela par une définition[1] :

[1] Il n'est pas totalement inutile de rappeler ici le théorème de Krein-Milman : Tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

**Définition** 4 :
*Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de points. L'enveloppe convexe $X$ de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des barycentres de $\mathcal{S}$ à coefficients positifs. Un point $S$ de $X$ est dit extrémal si $S$ n'est pas barycentre à coefficients positifs de $X \backslash \{S\}$.*

**Proposition** 3 :
*Soit $X \subset \mathbb{R}^3$.*

(1) *Si $O$ est centre de symétrie de $X$ et $g \in \mathrm{Is}(X)$, alors $g(O) = O$. De plus, $\mathrm{Is}(X) \simeq \mathrm{Is}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

(2) *Si $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de points et $X$ l'enveloppe convexe de ces points. On suppose que les points de $\mathcal{S}$ sont extremaux, alors $\mathrm{Is}(X)$ stabilise $\mathcal{S}$ et en particulier l'isobarycentre de $\mathcal{S}$.*

**Démonstration** :

(1) Puisque $g$ conserve le centre de symétrie (tout élément de $GA_3(\mathbb{R})$ conserve le barycentre), il est clair que $g(O) = O$.
On a l'isomorphisme
$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Is}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Is}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g & \longmapsto & \begin{cases} (g, 1) & \text{si } g \in \mathrm{Is}^+(X) \\ (gs_0, s_0) & \text{sinon, avec } s_0 \in \mathrm{Is}^-(X) \text{ symétrie centrale en } O \end{cases} \end{array}$$
$s_0$ commute avec tout élément de $\mathrm{Is}^+(X)$ (vectoriellement, il s'agit de l'homothétie de rapport -1), donc le produit est direct.

(2) Supposons par l'absurde que $S$ est un point extrémal de $X$, $g \in \mathrm{Is}(X)$ et $g(S) \notin \mathcal{S}$. Donc, $g(S)$ est barycentre d'une famille (non singletone) $(A_i, \lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $A_i \in X$. Comme $g^{-1}$ est dans $GA(\mathbb{R}^3)$, il stabilise le barycentre et ainsi, $S$ est barycentre de la famille (non singletone) $(g^{-1}(A_i)), \lambda_i)$, ce qui est absurde par hypothèse.

□

**Remarque** :
Comme on le disait dans la remarque au-dessus, la première assertion devient fausse dans le plan puisqu'une symétrie par rapport à un point y est un déplacement.
Revenons maintenant à $\mathbb{R}^3$. $X$ possède un centre de symétrie $O \Longleftrightarrow s_0 \in \mathrm{Is}(X)$.
Ainsi, puique le tétraèdre n'a pas de centre de symétrie, son groupe d'isométrie ne contient pas de symétrie centrale et $\mathrm{Is}(\Delta_4) \not\simeq \mathrm{Is}^+(\Delta_4) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On en fait ce que l'on appelle un produit semi-direct.

Cette proposition est très utile pour calculer des groupes d'isométries de polyèdres. En voici une illustration.

$$\boxed{\text{Si } X \text{est un triangle quelconque du plan, alors } \mathrm{Is}(X) = \{1\}}$$

$$\boxed{\text{Si } X \text{est un triangle isocèle, alors } \mathrm{Is}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un triangle équilatéral, alors } \mathrm{Is}(X) \simeq \mathfrak{S}_3}$$

(puisque $\mathrm{Is}(X)$ stabilise aussi les sommets de $X$, ie. l'action est libre, on a $\mathrm{Is}(X) \subset \mathfrak{S}_3$ ; et puisque $\mathrm{Is}(X)$ contient tous ses générateurs, on conclut).
Remarque : par définition, $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$ sont aussi des produits directs. Plus généralement,

$$\boxed{\text{Si } X \text{est un polygône régulier à n côtés alors } \mathrm{Is}(X) \simeq D_n}$$

L'oscar de la symétrie revient bien sûr au cercle :

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un cercle, alors } \mathrm{Is}^+(X) \simeq S^1}$$

Ici, $\mathrm{Is}^+$ est carrément un groupe continu.

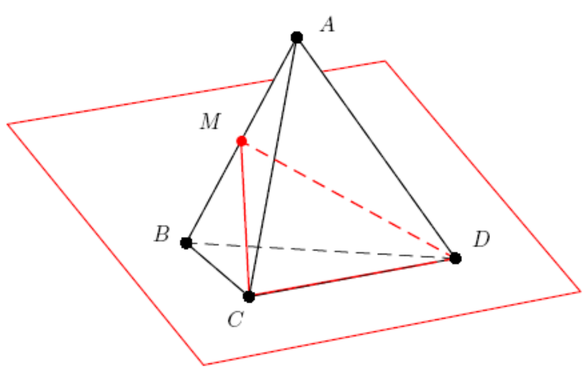
**Proposition** 4 :
*Groupes d'isométries du tétraèdre :*

$$\mathrm{Is}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Is}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$$

**Démonstration** :
On fait agir $\mathrm{Is}(\Delta_4)$ sur $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des sommets du tétraèdre par la proposition précédente.

Ainsi $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Is}(\Delta_4) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_4 \\ & g & \longmapsto & g_{|\mathcal{S}} \end{array}$ est un morphisme de groupes

L'action est fidèle car si $\varphi(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$, alors $g$ stabilise $\mathcal{S}$ qui est un repère de l'espace affine d'où $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
Donc le groupe $\mathrm{Is}(\Delta_4)$s'injecte dans $\mathfrak{S}_4$.
De plus, la réflexion $r_{AB}$ par rapport au plan $MCD$ avec $M$ milieu de $AB$ réalise la transposition $(A\,B)$, ie $\phi(r_{AB} = (A\,B)$ :




Donc toutes les tranpositions sont dans $\mathrm{Is}(\Delta_4)$ et a fortiori tout $\mathfrak{S}_4 \subset \mathrm{Is}(\Delta_4)$ puisque les transpositions engendrent le groupe symétrique.
Donc finalement, $\varphi$ est un isomorphisme et $\mathrm{Is}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.

On sait que le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{S}_n$ est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$. Le groupe $\mathrm{Is}^+(\Delta_4)$ étant d'indice 2 dans $\mathrm{Is}(\Delta_4)$, on a aussi $\mathrm{Is}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.

$\square$

**Proposition** 5 :
Pour les amateurs du genre : *Groupe d'isométries directes du cube :* $\mathrm{Is}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$.
*Groupe d'isométries du cube :* $\mathrm{Is}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Démonstration** :
On fait agir $\mathrm{Is}^+(C_6)$ sur $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales du cube (elles sont preservées par

les isométrie de $\mathrm{Is}(C_6)$ puisque ce sont les plus grandes longueurs que l'on peut trouver dans le cube).
Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Is}^+(C_6) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_4 \\ & g & \longmapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array}$$

Montrons que l'action est fidèle. Soit $\varphi(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, alors en notant $D_i = A_i G_i$, les diagonales, $\begin{cases} g(A_1) = A_1 \\ g(G_1) = G_1 \end{cases}$ et dans ce cas en utilisant le fait que $g$ fixe toutes les diagonales et les deux points opposés $A_1$ et $G_1$, on obtient que $g$ fixe tous les sommets, donc $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ou bien $\begin{cases} g(A_i) = G_i \\ g(G_i) = A_i \end{cases}$ et $s_O g = Id$ d'après ce qui précède et $g$ est donc la symétrie centrale $s_O$ en $O$ ce qui est impossible puisque $g \in \mathrm{Is}^+(C_6)$. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ et l'action est bien fidèle : $\mathrm{Is}^+(C_6) \subset \mathfrak{S}_4$.

Comme dans la démonstration précédente, on peut voir que les transpositions sont toutes réalisées (ici grâce à des retournements d'axes reliant les milieux des arêtes joignant les diagonales), et donc que $\mathrm{Is}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$. La seconde assertion est claire car le cube admet un centre de symétrie.

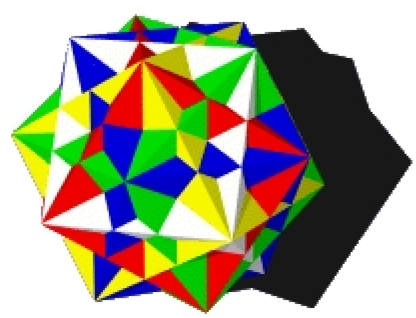
□

Là, c'est abuser :

**Proposition** 6 :
*Groupes d'isométries du dodécaèdre :*

$$\mathrm{Is}(P_{12}) \simeq \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Is}^+(P_{12}) \simeq \mathfrak{A}_5$$

*Idée de la preuve.* On admet qu'exactement cinq cubes distincts $C_i$, $1 \leq i \leq 5$, sont inscrits dans le dodécaèdre :



$\mathrm{Is}^+(P_{12})$ agit sur $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ l'ensemble des cubes inscrits d'où le morphisme $\mathrm{Is}^+(P_{12}) \longrightarrow \mathfrak{S}_5$.
Soit $g$ tel que $g(C_i) = C_i$. Alors $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ (car il fixe les grandes diagonales du dodécaèdre et n'est pas une symétrie centrale) d'où l'action est fidèle et $\mathrm{Is}^+(P_{12}) \subset \mathfrak{S}_5$.
Or, combien y a-t-il d'éléments de $\mathrm{Is}^+(P_{12})$ ? Comme ce sont des rotations, on va compter les axes possibles, puis les angles possibles.

- Axe de sommet à sommet opposé. $\frac{20}{2} = 10$ axes possibles, les angles (non nuls) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
- Axe de milieu d'arête à milieu d'arête opposée. $\frac{30}{2} = 15$ axes possibles, les angles (non nuls) $\pi$.
- Axe de sommet à sommet opposé. $\frac{12}{2} = 6$ axes possible, les angles (non nuls) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$.

– Et l'identité, bien sûr !
  En tout, cela nous fait $10 \times 2 + 15 \times 1 + 6 \times 4 + 1 = 60$ éléments. Le compte est bon et $\mathrm{Is}^+(P_{12}) = \mathfrak{S}_5$.

Enfin, le dodécaèdre ayant un centre de symétrie, on conclut à l'aide de la proposition 3 que $\mathrm{Is}(P_{12}) \simeq \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Bibliographie.**

Michel Alessandri : Thèmes de géométrie : Groupes en situation géométrique, Dunod 1999.