Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math I Algèbre

Epreuve de mathématiques

PARTIEL

20 Novembre 2006 – durée : 1 h 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *Ensembles* (3,5 points).

Soit E un ensemble et f une application de E dans E. On rappelle que pour tout sous-ensemble F, G de E, on note $F \backslash G$ l'ensemble constitué des éléments de F qui ne sont pas dans G.

Montrer que l'égalité suivante est vérifiée pour tout sous-ensemble A, B de E :

$$f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A \backslash B).$$

Exercice 2 *Nombres complexes* (6 points).

1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$Z^3 = i.$$

2. Soit α un réel. On pose

$$x = \frac{e^{i\alpha} - 1}{i(e^{i\alpha} + 1)}.$$

Mettre x sous la forme $\tan(\beta)$ où β est un angle à préciser.

3. En déduire les solutions de l'équation

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = i.$$

On mettra les solutions sous la forme $\tan(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq 3$, où les α_i sont trois angles à préciser.

Problème 1 *Groupes* (10,5 points)

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e. Pour tout x de G, on posera $x^2 := x * x$. On note H l'ensemble suivant :

$$H := \{x \in G \mid x^2 = e\}.$$

On se propose d'étudier H dans deux exemples. Les deux parties sont indépendantes.

A. On suppose dans cette partie que G est un groupe *commutatif.*

1. Montrer que pour tout x, y dans G , on a $(x * y)^2 = x^2 * y^2$.
2. Soit ϕ l'application de G dans G telle que $\phi(x) = x^2$. Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.
3. En déduire que H est un sous-groupe de G.
4. On suppose que $H = \{e\}$. Montrer que ϕ est injective.
   QUESTION BONUS. On suppose de plus que G est d'ordre pair. Montrer que ϕ n'est pas injective.

B. On suppose maintenant que $(G, *)$ est le groupe de permutation $(\mathcal{S}_3, \circ)$ de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

1. Combien $\mathcal{S}_3$ possède-t-il d'éléments ? Décrire ces éléments.
2. Combien H possède-t-il d'éléments ? En déduire que H n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$.