Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

Unité d'enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Examen

4 Juin 2004 – durée : 2 heures

——Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif. ——

Exercice 1 Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. En déduire que le rang de f est 1 (*.on pourra raisonner par l'absurde en considrant les autres rangs possibles de f*).
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Exercice 2 Soient a, b, c, d quatre nombres réels non tous nul. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer ${}^tAA$.
2. En déduire $(\det A)^2$, puis $(\det(A)$ (*on pourra donner à a, b, c et d des valeurs particulières*). Donner (sans calculs!) la matrice A^{-1}.

Exercice 3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que pour tout nombre entier k positif on a $A^k = PB^kP^{-1}$.

2. On suppose que $n = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Diagonaliser A en précisant la matrice de passage P dans une base de vecteurs propres.

b) Calculer P^{-1}.

c) Calculer A^k pour tout k.

Exercice 4 Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{x^3 - 3x - 9}{(x-2)^2(x^2+x+1)}.$$