Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2009
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2002L

Planche d'exercices IV

- Décomposition spectrale d'un endomorphisme - Exponentielle d'endomorphismes -

Exercice 1.★ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme π de E est appelé projecteur si $\pi^2 = \pi$.

1. Montrer que si π est un projecteur de E, alors $E = \text{Ker } \pi \oplus \text{Im } \pi$. La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si π est un projecteur de E, alors $\text{rang}(\pi) = \text{trace}(\pi)$.

Dans la suite, on suppose que π_1 et π_2 sont deux projecteurs de E et que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.

3. Montrer que $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur si, et seulement si, $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

4. Montrer que si $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur, alors

   i) $\text{Im } (\pi_1 + \pi_2) = \text{Im } \pi_1 \oplus \text{Im } \pi_2$,

   ii) $\text{Ker } (\pi_1 + \pi_2) = \text{Ker } \pi_1 \cap \text{Ker } \pi_2$.

Exercice 2.★ Montrer qu'un espace vectoriel E est somme directe de sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ si et seulement s'il existe des projecteurs $\pi_i : E \longrightarrow E_i$, $i = 1, \ldots, p$, satisfaisant

$$\text{Im } \pi_i = E_i, \qquad \text{id}_E = \pi_1 + \ldots + \pi_p, \qquad \pi_i \pi_j = 0, \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si λ est une racine d'ordre k du polynôme minimal m_u, i.e., $m_u = (X-\lambda)^k Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, alors

$$\text{Ker } Q(u) = \text{Im } (u - \lambda \text{id}_E)^k.$$

2. Sous les mêmes hypothèses, montrer que

$$E = \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E)^k \oplus \text{Im } (u - \lambda \text{id}_E)^k.$$

3. Soit λ une valeur propre de u telle que

$$E = \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Im } (u - \lambda \text{id}_E).$$

Montrer que le polynôme $P = (X - \lambda)m'$, où m' est le polynôme minimal de la restriction de u au sous-espace $\text{Im } (u - \lambda \text{id}_E)$, est annulateur de u. En déduire que λ est racine simple de m_u.

4. Montrer que les deux égalités suivantes sont équivalents

$$E = \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Im } (u - \lambda \text{id}_E), \qquad \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E)^2.$$

5. Montrer que si u est diagonalisable, alors pour toute valeur propre λ on a :

$$\text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker } (u - \lambda \text{id}_E)^2.$$

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique est scindé. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\text{rang}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{rang}(u - \lambda \text{id}_E)^2.$$

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de u.
2. Construire une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices triangulaires

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$\det(e^u) = e^{\mathrm{trace}(u)}.$$

2. Montrer que si u est nilpotent, alors

$$\mathrm{Ker}\ (e^u - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\ u.$$

3. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}.$$

Exercice 7.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E vérifiant

$$(u - \mathrm{id}_E)^2(u - 2\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{id}_E)^2 \oplus \mathrm{Ker}\ (u - 2\mathrm{id}_E).$$

Notons π_1 la projection sur Ker $(u - 2\mathrm{id}_E)$ parallèlement à Ker $(u - \mathrm{id}_E)^2$ et π_2 la projection sur Ker $(u - \mathrm{id}_E)^2$ parallèlement à Ker $(u - 2\mathrm{id}_E)$.

2. Établir les relations suivantes

$$e^u \pi_1 = e^2 \pi_1, \qquad e^u \pi_2 = eu\pi_2.$$

3. Exprimer en fonction de u les projections π_1 et π_2.
4. En déduire une expression de e^u en fonction de u.

Exercice 8.* On reprend les matrices de la feuille d'exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u.
2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, l'endomorphisme u^n en fonction de u. Écrire la matrice de u^n, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Exprimer, pour tout réel t, l'endomorphismee e^{tu} en fonction de u. Écrire la matrice de e^{tu} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Répondre aux mêmes questions avec les endomorphismes représentés par les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{bmatrix}$$

où les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de u et en déduire que toutes les valeurs propres de u sont égales.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t.

Exercice 10. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
2. Diagonaliser $\mathbf{A}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\mathbf{A}$ soit inversible. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est inversible, calculer l'inverse de $\mathbf{A}$.
4. Calculer $\mathbf{A}^n$ pour tout entier n.
5. Calculer $e^{t\mathbf{A}}$ pour tout réel t.

Exercice 11. (Partiel avril 2007) Soient E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ et u un endomorphisme de E défini dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u - (1-a)\mathrm{id}_E$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de u.
2. Si $a = 0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.

3. Déterminer toutes les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.
5. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - (1-a)\mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - (1+3a)\mathrm{id}_E)$. Montrer que

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

6. Exprimer en fonction de u les projections de E sur les sous-espaces E_1 et E_2.
7. Exprimer les endomorphimes u^k, $k \geq 1$, et e^u en fonction de ces projections et en déduire leur matrice dans la base canonique.