Université Claude Bernard Lyon 1 - 2007/2008

Licence Sciences et Technologie - UE Mathématiques III, Algèbre

Feuille d'exercices 5

- Quelques applications de la réduction des endomorphismes -

Exercice 1.★ Résoudre le système différentiel

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},$$

pour les matrices A suivantes, étudiées dans les planches précédentes,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Montrer qu'une équation différentielle d'ordre n réelle (resp. complexe), donnée par

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) + \ldots + c_1\frac{d}{dt}z(t) + c_0 z(t) = f(t),$$

où les c_i sont réels (resp. complexes) et f une fonction continue à valeurs réelles (resp. complexes), peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire à coefficients constants de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + V(t).$$

2. Déterminer les fonctions x de $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de l'équation

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.★ On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{bmatrix}$$

Déterminer la solution du système

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t),$$

prenant en $t = 0$ la valeur x_0, contenue dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

Exercice 4.★ On considère la matrice réelle

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

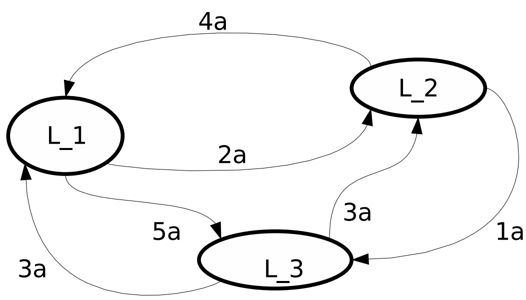
1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -X(X+9)^2$.
2. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -9.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Déterminer le polynôme minimal de A.

5. Exprimer, en fonction de la matrice A, les matrices des projections π_1 et π_2 de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces caractéristiques Ker A et Ker $(A + 9\mathbf{1}_3)^2$.

6. Exprimer, en fonction de A et des matrices de π_1 et π_2, la matrice e^{tA}, où t est un réel quelconque.

7. On considère trois lacs L_1, L_2 et L_3, chacun de volume V, reliés entre eux par un système de canaux permettant de faire circuler l'eau entre les lacs. L'eau circule avec un taux indiqué par la figure suivante.

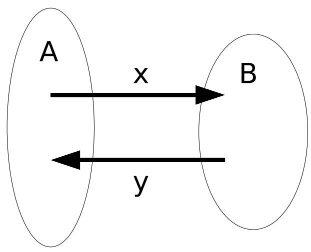


Par exemple, il circule du lac L_1 au lac L_2 $2a$ litres d'eau par seconde. On suppose que les échanges sont continus. Les lacs L_1, L_2, L_3 contiennent, à l'instant $t = 0$, respectivement q_1, q_2, q_3 grammes de polluant.

Déterminer la quantité de polluant dans chaque lac, lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 5.★ Le problème de diffusion suivant apparaît dans de nombreuses situations biologiques. Considérons deux cellules contenant des composées chimiques. On souhaite étudier la concentration d'un composé injecté dans une cellule, alors que les deux cellules peuvent diffuser mutuellement ce composé.

À l'instant $t = 0$, on injecte une unité d'un composé chimique dans la cellule A. Le composé se diffuse selon les règles suivantes. À chaque instant t, la diffusion du composé de la cellule A vers la cellule B est de x fois la concentration du composé dans la cellule A et la diffusion du composé de la cellule B vers la cellule A est de y fois la concentration du composé dans la cellule B. On suppose $x, y > 0$.



1. Déterminer, à chaque instant t, la concentration du composé dans chacune des deux cellules.

2. Les concentrations du composé dans chaque cellule se stabilisent-elles au bout d'un certain temps ?

Exercice 6.★ On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. On étudie deux situations d'évolution de ces espèces.

Dans une première situation, on suppose que les deux espèces sont en compétition : le nombre d'individus d'une espéce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroit proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce.

1. Si la population de chaque espèce augmente de deux fois le nombre d'individus de l'espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce, déterminer à chaque instant le nombre d'individus de chaque espèce lorsque initiallement il y a 100 individus de l'espèce A et 200 individus de l'espèce B.

2. Est-ce qu'une des espèces est en voie d'instinction ? Si oui, au bout de combien de temps.

Dans une deuxième situation, on suppose que les deux espèces vivent en symbiose de la façon suivante. Le nombre d'individus de chaque espèce augmente d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de la même espèce.

3. Si initiallement les espèces A et B sont respectivement composées de 200 et 400 individus, déterminer à chaque instant la population de chaque espèce.

4. Que se passe-t-il à long terme ?

Exercice 7. La suite de Fibonacci est définie par

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \text{ si } n \geqslant 2, \qquad u_0 = u_1 = 1.$$

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{bmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{bmatrix}$, pour tout $n \geqslant 2$.

2. Diagonaliser A et en déduire une formule non-récurrente pour u_n.

Exercice 8. Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n & = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n & = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n & \quad = 2z_{n-1} \end{cases}$$

avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.* Dans un pays, on étudie la migration de population entre les zones rurales et les zones urbaines. Chaque année la moitié de la population des campagnes migre vers les villes, pendant qu'un quart de la population des villes va habiter dans des zones rurales.

Quel est à terme la répartition des populations entre ces deux zones géographiques. Les zones rurales seront-elles complètement désertées ?