# Vocabulaire sur les groupes.

1. Soit $G$ un groupe.

• Centre d'un groupe : $Z(G) := \{z,\, zg = gz, g \in G\}$. C'est un sous-groupe distingué de $G$ et c'est le noyau du morphisme de conjugaison.
• Centralisateur d'un élément $g$ de $G$ : $Z_g := \{z,\, zg = gz\}$. C'est un sous-groupe de $G$ et c'est le stabilisateur de $g$ pour l'action de conjugaison.
• Classe de conjugaison d'un élément $g$ de $G$ : $C_g := \{hgh^{-1},\, h \in G\}$. C'est l'orbite de $g$ pour l'action de conjugaison.
• Normalisateur d'un sous-groupe $H$ de $G$ : $N(H) := \{g \in G,\, ghg^{-1} \in H, h \in H\}$. C'est le plus grand sous-groupe de $G$ (pour l'inclusion) dans lequel $H$ est distingué.
• L'exposant de $G$ est le plus petit $n$ tel que $g^n = e$ pour tout $g$ dans $G$.

2. Soit $\phi$ un morphisme du groupe $G$ vers le groupe $H$.

• L'image de $\phi$ : $\mathrm{Im}\phi := \{\phi(g),\, g \in G\}$. C'est un sous-groupe de $H$.
• Le noyau de $\phi$ : $\ker \phi := \{g \in G,\, \phi(g) = e_H\}$. C'est un sous-groupe distingué de $G$. Le groupe quotient est isomorphe à $\mathrm{Im}\phi$.

3. Soit $G$ un groupe agissant sur un ensemble $X$.

• Orbite de $x$ dans $X$ : $\mathcal{O}_x = G.x = \{g.x, g \in G\}$. Les orbites partitionnent $X$.
• Stabilisateur de $x$ dans $G$ : $G_x := \{g,\, g.x = x\}$. C'est un sous-groupe de $G$. L'ensemble des classes à gauche $G/G_x$ est en bijection avec l'orbite de $x$.
• Noyau de l'action : $\ker \phi = \{g,\, g \mid_X = Id_X\} = \{g,\, g.x = x, x \in X\}$. C'est l'intersection de tous les stabilisateurs et c'est un sous-groupe distingué.
• L'action est dite fidèle si le noyau est trivial.
• L'action est transitive s'il n'y a qu'une seule orbite.
• L'action est $k$-transitive si pour tout $k$-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$ d'éléments de $X$ tous distincts, et tout autre $k$-uplet $(y_1, \ldots, y_k)$ d'éléments de $X$ tous distincts, il existe $g$ dans $G$ tel que $g.x_i = y_i$, pour tout $i$.
• L'action est simple si tout stabilisateur est trivial.