Chapitre 6

Algèbres de Banach

6.1 Introduction

Définition 6.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ équipée d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}$-espace de Banach (i.e. un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, complet)*

(ii) *pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Si de plus, il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ tel que

$$xe = ex = x \quad (x \in \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \|e\| = 1,$$

alors, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire. L'élément e s'appelle l'élément unité de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Enfin, nous dirons qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si $xy = yx$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$.

Remarque 6.1.1

- *Il existe au plus un élément unité e.*
- *Concernant l'existence d'un élément unité, notons qu'on peut toujours "plonger" isométriquement une algèbre de Banach quelconque dans une algèbre de Banach unitaire. En effet, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach (sans unité),*

alors on pose $\mathcal{A}^\sharp = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, *muni de sa structure d'espace vectoriel produit cartésien et on définit la multiplication sur* $\mathcal{A}^\sharp$ *par*

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (\alpha y + \beta x + xy, \alpha\beta).$$

La norme sur $\mathcal{A}^\sharp$ *est elle définie par*

$$\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|.$$

Alors on vérifie (exercice 6.8.5) que $\mathcal{A}^\sharp$ *est une algèbre de Banach unitaire et* $\mathcal{A}$ *se plonge isométriquement dans* $\mathcal{A}^\sharp$.

- *La condition* (ii) *dans la définition 6.1.1 fait de la multiplication une opération continue de* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{A}$. *Ceci signifie que si* $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$, *alors* $x_n y_n \to xy$, *ce qui découle de l'égalité*

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En particulier, la multiplication est continue à gauche et continue à droite :

$$x_n y \to xy \quad \text{et} \quad xy_n \to xy \tag{6.1}$$

si $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$.

Comme on le verra dans l'exercice 6.8.1, la condition (ii) peut être remplacée par la condition (6.1) (apparemment plus faible) et la condition de normalisation de l'élément unité peut être omise sans élargir la classe des algèbres considérées.

Donnons maintenant quelques premiers exemples classiques d'algèbres de Banach.

Exemple 6.1.1 (a) *Soit* X *un ensemble quelconque ; l'ensemble* $\mathcal{B}(X)$ *des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{C}$, *équipé des opérations usuelles et de la norme du "sup"*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

est une algèbre de Banach unitaire, commutative. (Notons que cette algèbre est, pour $X = \mathbb{N}$, *l'algèbre* ℓ^∞ *des suites bornées de nombres complexes).*

(b) *Si X un espace topologique compact, l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$, muni de la norme du sup, est une algèbre de Banach unitaire et commutative. En fait, c'est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(X)$!*

(c) *Si E est un $\mathbb{C}$-espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires et bornées de E dans lui-même est une algèbre de Banach unitaire, pour la "norme opérateur"*

$$\|T\| := \sup_{x\in E,\, \|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

Cette algèbre est non commutative dès que dim $E > 1$.

(d) *Toute sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E)$ et contenant l'opérateur identité est une algèbre de Banach unitaire. En fait, on peut montrer que toute algèbre de Banach unitaire est isomorphe à une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E)$, contenant l'identité (voir exercice 6.8.1).*

(e) *Soit Ω un domaine (i.e. un ouvert connexe) borné du plan complexe. L'algèbre $H^\infty(\Omega)$, constituée des fonctions holomorphes et bornées sur Ω, est une algèbre de Banach unitaire et commutative pour la norme du sup.*

(f) *Soit K un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$ et $A(K)$ l'algèbre de toutes les fonctions f continues sur K et holomorphes à l'intérieur de K. Alors $A(K)$ est une sous-algèbre fermée de $C(K)$ munie de la norme du sup. C'est donc une algèbre de Banach. Lorsque $K = \overline{\mathbb{D}}$ est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, on appelle $A(\overline{\mathbb{D}})$ l'algèbre du disque.*

Remarque 6.1.2 *La théorie des algèbres de Banach fait intervenir en même temps des propriétés algébriques et des propriétés topologiques et comme nous allons le voir dans ce cours, un va et vient constant entre ces deux types de proprieté permet d'obtenir très simplement des résultats parfois surprenants. Il existe aussi d'étroites relations entre les algèbres de Banach et les fonctions holomorphes : la démonstration la plus facile du fait fondamental que le spectre d'un élément d'une algèbre de Banach n'est jamais vide repose sur le théorème de Liouville et la for-*

mule du rayon spectral découle naturellement de théorèmes sur les développements en série entières pour les fonctions holomorphes. C'est là une des raisons pour restreindre notre attention aux algèbres de Banach complexes. Une autre raison est que $\mathbb{C}$ admet une involution naturelle, à savoir la conjugaison complexe, et que beaucoup de propriétés importantes des algèbres de Banach dépendent de la présence d'une involution.

La théorie des algèbres de Banach réelles (dont nous ne donnons pas la définition qui est évidente) n'est pas aussi satisfaisante et riche.

6.2 Inversibilité et spectre.

Nous commençons par introduire la première notion algébrique fondamentale.

Définition 6.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire s'il existe un élément $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que*

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

où e est l'élément unité de $\mathcal{A}$.

On notera $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

Il est facile de voir que :

- si $x \in \mathcal{A}$ admet un inverse, il est nécessairement unique.
- $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un groupe (pour la multiplication).

Nous allons donner un lemme élémentaire sur les éléments inversibles qui sera crucial dans toute la suite. Ce lemme montre comment cette notion algébrique se mélange avec la topologie.

Lemme 6.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| < 1$. Alors*

(a) $e - x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$,

(b) $\|(e-x)^{-1}-e-x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

Preuve : Comme $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et $\|x\|<1$, la suite $(s_n)_{n\geq 0}$, définie par

$$s_n := e + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

forme une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est complète, il existe $s \in \mathcal{A}$ tel que $s_n \to s$. Un calcul immédiat montre que

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

et comme $x^n \to 0$, on obtient par continuité de la multiplication que

$$s(e-x) = e = (e-x)s.$$

En d'autre terme, $e-x$ est inversible et son inverse est

$$(e-x)^{-1} = s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{6.2}$$

ce qui démontre (a). Pour prouver (b), on écrit, d'après (6.2), que

$$(e-x)^{-1} - e - x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

et donc

$$\|(e-x)^{-1}-e-x\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

□

Corollaire 6.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, $h \in \mathcal{A}$, et $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Alors $x+h \in \mathcal{I}\backslash\sqsubseteq(\mathcal{A})$ et*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \tag{6.3}$$

Preuve : Ecrivons $x+h = x(e+x^{-1}h)$. Or $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| \leq \frac{1}{2} < 1$ et donc le lemme 6.2.1 implique que $e + x^{-1}h \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Comme $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un groupe, on en déduit que $x+h \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. De plus,

$$\begin{aligned}(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} =& (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} \\ =& \left((e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\right)x^{-1},\end{aligned}$$

et le lemme 6.2.1 (b) implique que

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq &\|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\|\|x^{-1}\| \\ \leq &\frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\|.\end{aligned}$$

Comme $\|x^{-1}h\| \leq \frac{1}{2}$, on en déduit l'inégalité (6.3).

□

Corollaire 6.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Alors $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{A}$ et l'application $\varphi : x \longmapsto x^{-1}$ est un C^∞-difféormorphisme de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur lui-même. De plus, sa différentielle au point $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est donnée par*

$$d_x\varphi(h) = -x^{-1}hx^{-1}.$$

Preuve : D'après le corollaire 6.2.1, si $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, alors la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$ est contenue dans $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Ceci prouve que $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est ouvert.

Remarquons de plus que si $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ et si $h \in \mathcal{A}$, $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, l'inégalité (6.3) s'écrit

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + L_x(h) + o(\|h\|),$$

avec $L_x(h) = -x^{-1}hx^{-1}$. Il est clair que L_x est une forme linéaire, continue sur $\mathcal{A}$, avec $\|L_x\| \leq \|x^{-1}\|^2$. Par conséquent, φ est différentiable et sa différentielle est $d_x\varphi = L_x$.

Définissons maintenant $\Theta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$ par

$$\Theta(a,b)h := -ahb, \qquad (a,b,h) \in \mathcal{A}^3.$$

Il est évident que Θ est une application bilinéaire et continue, de norme plus petite que 1. Par conséquent, Θ est de classe C^∞ sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Or

$$d_x\varphi = \Theta(\varphi(x), \varphi(x)), \qquad x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A}), \tag{6.4}$$

et donc on en déduit que $x \longmapsto d_x\varphi$ est continue. Autrement dit, φ est de classe C^1 sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Par récurrence, en utilisant (6.4), on obtient que φ est de classe C^∞ sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$.

Finalement, remarquons que φ est une bijection de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ et son inverse est elle-même, i.e. que $\varphi^{-1} = \varphi$. Donc on en déduit que φ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur lui-même.

$\square$

Nous introduisons maintenant les principaux outils spectraux qui vont être utilisés dans tout ce cours.

Définition 6.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$.*

Le spectre $\sigma(x)$ de x est défini par

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin \mathcal{I}nv(\mathcal{A})\}.$$

Le complémentaire de $\sigma(x)$ est appelé l'ensemble résolvant de x et est noté $\mathcal{R}(x)$. Autrement dit,

$$\mathcal{R}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})\}.$$

La résolvante de x est l'application définie sur $\mathcal{R}(x)$, à valeurs dans $\mathcal{A}$ donnée par

$$R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{R}(x).$$

Enfin, le rayon spectral de x est le nombre

$$r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Bien évidemment, la définition du rayon spectral $r(x)$ n'a pas de sens si le spectre de x est vide mais comme nous allons le voir dans le résultat suivant, cela n'arrive jamais !

Théorème 6.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *L'ensemble résolvant $\mathcal{R}(x)$ est ouvert et l'application résolvante $R(\cdot, x)$ est holomorphe dans $\mathcal{R}(x)$. De plus, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}(x) \times \mathcal{R}(x)$, on a*

$$R(\mu, x) - R(\lambda, x) = (\lambda - \mu) R(\lambda, x) R(\mu, x). \tag{6.5}$$

En particulier, $R(\lambda, x)$ et $R(\mu, x)$ commutent.

(b) $\sigma(x) \subset \overline{D}(0, \|x\|)$.

(c) *Le spectre $\sigma(x)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

(d) *Si $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, alors on a $\sigma(x^{-1}) = (\sigma(x))^{-1} (= \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Preuve :

(a) considérons $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$f(\lambda) := \lambda e - x.$$

Alors f est clairement continue et $\mathcal{R}(x) = f^{-1}(\mathcal{I}nv(\mathcal{A}))$. Comme $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est ouvert dans $\mathcal{A}$ (corollaire 6.2.2), on en déduit que $\mathcal{R}(x)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$. En appliquant le corollaire 6.2.1, en remplacant x par $\lambda e - x$ et h par $(\mu - \lambda)e$, on obtient que pour $\lambda \in \mathcal{R}(x)$ et pour μ suffisamment proche de λ, on a

$$\left\| R(\mu, x) - R(\lambda, x) + (\mu - \lambda) R(\lambda, x)^2 \right\| \leq 2 \|R(\lambda, x)\|^3 |\mu - \lambda|^2,$$

et donc

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu, x) - R(\lambda, x)}{\mu - \lambda} = -R(\lambda, x)^2.$$

Ainsi, $R(\cdot, x)$ est une fonction holomorphe de $\mathcal{R}(x)$ dans $\mathcal{A}$. Pour démontrer l'équation (6.5) vérifiée par la résolvante, il suffit de remarquer que $\mu e - x$ et $\lambda e - x$ commutent et donc on a

$$(\mu e - x)(\lambda e - x)(R(\mu, x) - R(\lambda, x)) = (\lambda - \mu) e.$$

Il ne reste plus qu'a multiplier à gauche par $R(\lambda, x) R(\mu, x)$.

(b) Soit $|\lambda| > \|x\|$. Alors, en écrivant $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$, on obtient avec le lemme 6.2.1 que $\lambda e - x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Autrement dit, $\lambda \in \mathcal{R}(x)$. Par contraposée, si $\lambda \in \sigma(x)$, alors $|\lambda| \leq \|x\|$.

(c) On sait d'après (a) que $\sigma(x)$, qui est le complémentaire de $\mathcal{R}(x)$, est fermé. De plus, d'après (b), $\sigma(x)$ est borné. Ainsi, le spectre $\sigma(x)$ de x est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{C}$, c'est donc un compact. Il reste à vérifier que $\sigma(x)$ est non vide. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $\mathcal{R}(x) = \mathbb{C}$. Alors $R(\cdot, x)$ est une fonction entière (i.e. holomorphe dans $\mathbb{C}$), à valeurs dans $\mathcal{A}$. De plus, pour $|\lambda| > \|x\|$, on a avec l'égalité (6.2)

$$R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

et donc

$$\|R(\lambda, x)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}. \tag{6.6}$$

En particulier, on en déduit que

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} R(\lambda, x) = 0,$$

et donc $R(\cdot, x)$ est une fonction bornée. Le théorème B.3.6 (de Liouville) implique alors que $R(\cdot, x)$ est constante et donc $R(\lambda, x) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde.

(d) Soit $\lambda \in \sigma(x^{-1})$. Cela signifie que $\lambda e - x^{-1}$ n'est pas inversible. Comme nécessairement $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$\lambda e - x^{-1} = -\lambda x^{-1}(\lambda^{-1} e - x),$$

et on en déduit que $\lambda^{-1} e - x$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\lambda^{-1} \in \sigma(x)$, c'est à dire $\lambda = (\lambda^{-1})^{-1} \in (\sigma(x))^{-1}$. Par conséquent, on a prouvé que

$$\sigma(x^{-1}) \subset (\sigma(x))^{-1}.$$

Appliquons maintenant cette inclusion, en remplaçant x par x^{-1} et on obtient

$$\sigma(x) \subset (\sigma(x^{-1}))^{-1},$$

soit

$$(\sigma(x))^{-1} \subset \sigma(x^{-1}),$$

ce qui achève la preuve de (d).

$\square$

Remarque 6.2.1 *Le fait que le spectre d'un élément est toujours non vide est une généralisation du résultat qui dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre (complexe).*

Remarque 6.2.2 *L'équation (6.5) est appelée l'équation de la résolvante.*

Si p est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $p(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$, et si x est un élément d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ alors on note par $p(x)$ l'élément de $\mathcal{A}$ défini par

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

Le résultat suivant établit le lien entre $\sigma(p(x))$ et $\sigma(x)$.

Lemme 6.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{A}$ et p un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Alors, on a*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

Preuve : Soit $\lambda \in \sigma(x)$. Cela signifie que $\lambda e - x$ n'est pas inversible. D'autre part, il existe un unique polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda)q(X).$$

D'où

$$p(\lambda)e - p(x) = (\lambda e - x)q(x) = q(x)(\lambda e - x),$$

et $p(\lambda)e - p(x)$ n'est pas inversible car sinon

$$e = (p(\lambda)e - p(x))^{-1}q(x)(\lambda e - x) = (\lambda e - x)q(x)(p(\lambda)e - p(x))^{-1},$$

et donc $\lambda e - x$ serait inversible, ce qui est absurde. Par conséquent, $p(\lambda) \in \sigma(p(x))$. On a donc prouvé que

$$p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x)).$$

Réciproquement, montrons que $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$. Si p est le polynôme nul, le résultat est évident. Sinon soit $\lambda \in \sigma(p(x))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$p(X) - \lambda$:

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n),$$

α_i étant les racines du polynôme $p(X) - \lambda$. Comme p est supposé non nul, $\alpha \neq 0$ et on a

$$\lambda e - p(x) = (-1)^n \alpha(\alpha_1 e - x)(\alpha_2 e - x) \dots (\alpha_n e - x).$$

Supposons que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i e - x$ soit inversible. Alors $\lambda e - p(x)$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent, il existe i, $1 \leq i \leq n$, tel que $\alpha_i \in \sigma(x)$. Donc

$$\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(x)).$$

D'où $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$, ce qui termine la preuve du lemme.

□

Remarque 6.2.3 *Nous allons voir au second chapitre qu'on peut définir un calcul fonctionnel holomorphe qui permet de donner un sens à $f(x)$, pour f holomorphe sur un ouvert Ω contenant le spectre de x. De plus, nous démontrerons une propriété spectrale importante, à savoir la relation suivante :*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)). \tag{6.7}$$

Dans le théorème 6.2.1 et dans le lemme 6.2.2, nous avons déjà vu que la relation (6.7) est vraie si f est un polynôme et si x est inversible et $f(z) = z^{-1}$.

Nous donnons maintenant l'une des formules fondamentales dans la théorie des algèbres de Banach, qui permet de calculer le rayon spectral, d'où son nom de "formule du rayon spectral".

Théorème 6.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$. On a*

$$r(x) = \lim_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve : Notons $\alpha = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Soit $\lambda \in \sigma(x)$. Le lemme 6.2.2 implique que $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ et donc avec le théorème 6.2.1, on obtient que $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, soit $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, on en déduit que

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| \leq \alpha.$$

De plus, on a évidemment

$$\alpha \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Finalement, il reste à montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x).$$

Pour cela, nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons $\Omega = D(0, r(x)^{-1})$ (si $r(x) = 0$, alors $\Omega = \mathbb{C}$) et considérons $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$f(\lambda) = R(1/\lambda, x), \qquad \lambda \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Si $\lambda \in \Omega\setminus\{0\}$, alors $|\lambda^{-1}| > r(x)$ et donc $\lambda^{-1} \in \mathcal{R}(x)$. Le théorème 6.2.1 implique alors que f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{0\}$. D'autre part, on sait aussi, toujours d'après le théorème 6.2.1 (voir la preuve), que

$$\lim_{\lambda\to 0} R(1/\lambda, x) = 0.$$

Donc f est continue sur Ω. La proposition B.3.1 implique alors que f est holomorphe dans Ω. D'un autre coté, si $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|}$, le lemme 6.2.1 implique que

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}e - x\right)^{-1} &= \lambda(e - \lambda x)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} x^n, \end{aligned}$$

et cette relation est évidemment valable aussi pour $\lambda = 0$. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} x^n$. Comme f est holomorphe sur Ω, le théorème B.3.5 implique que $R \geq d(0, \Omega^c) = r(x)^{-1}$. D'autre part, la formule d'Hadamard nous dit que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

et donc finalement

$$\limsup_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x),$$

ce qui achève la preuve.

□

Remarque 6.2.4 *Qu'un élément d'une algèbre $\mathcal{A}$ soit inversible ou non est une propriété purement algébrique ; ainsi le spectre de x et le rayon spectral de x ne dépendent que de la structure algébrique de $\mathcal{A}$, et d'aucune considération métrique (ou topologique). Par contre, la limite dans l'énoncé du théorème 6.2.2 dépend des propriétés métriques de $\mathcal{A}$. C'est un des aspects remarquables de ce théorème : il affirme l'égalité des deux quantités qui interviennent de manière entièrement différente.*

Remarque 6.2.5 *Notre algèbre $\mathcal{A}$ peut être une sous-algèbre d'une algèbre de Banach $\mathcal{B}$ plus grande. Alors il peut très bien arriver qu'un élément $x \in \mathcal{A}$ ne soit pas inversible dans $\mathcal{A}$ mais le soit dans $\mathcal{B}$. Le spectre de x dépend donc de l'algèbre. Si on note par $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ (resp. $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$) le spectre de x relativement à $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$), alors on a $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. De plus, l'inclusion peut être stricte. Cependant, le rayon spectral est le même dans $\mathcal{A}$ ou dans $\mathcal{B}$, puisque le théorème 6.2.2 montre qu'il peut être exprimé en fonction des propriétés métriques des puissances de x, qui sont indépendantes de tout ce qui se passe à l'extérieur de $\mathcal{A}$.*

De ces résultats établis par des techniques élémentaires, nous pouvons déjà dégager une conséquence fondamentale.

Théorème 6.2.3 (Gelfand-Mazur) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire telle que tout élément non nul est inversible. Alors $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$, autrement dit $\mathcal{A}$ est isométriquement isomorphe au corps des nombres complexes.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}e$. Alors il existe $x \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{C}e$. On en déduit donc que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda e - x \neq 0$ et donc l'hypothèse implique que $\lambda e - x$ est inversible. Autrement dit, tout point $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans l'ensemble résolvant de x, soit encore $\sigma(x) = \emptyset$, ce qui est absurde d'après le théorème 6.2.1.

Il est alors facile de vérifier que l'application $\varphi : \mathcal{A} = \mathbb{C}e \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $\varphi(\lambda e) = \lambda$, est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$.

$\square$

Remarquons que la commutativité de $\mathcal{A}$ dans le théorème 6.2.3 ne fait pas partie des hypothèses mais de la conclusion !

6.3 Idéaux et caractères d'une algèbre de Banach

Comme nous allons le voir dans la suite du cours, la théorie des algèbres de Banach dépend crucialement des homomorphismes d'algèbres à valeurs complexes.

Définition 6.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. On appelle caractère de $\mathcal{A}$ tout homomorphisme non trivial de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, un caractère φ d'une algèbre $\mathcal{A}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$, non identiquement nulle, et telle que*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{A}$.

On notera $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$.

Remarquons que dans la définition des caractères, on ne fait aucune hypothèse de continuité. C'est une définition purement algébrique ! De fait, il est remarquable que cette continuité est automatique, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 6.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $\varphi \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$. Alors φ est continue et sa norme (en tant que forme linéaire) est 1. De plus, $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{I}\backslash\sqsubseteq(\mathcal{A})$.*

Preuve : Comme φ est non identiquement nul, il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(y) \neq 0$. Donc puisque

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$

il s'ensuit que $\varphi(e) = 1$. D'autre part, si x est inversible alors

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1$$

et par conséquent $\varphi(x) \neq 0$. Finalement, la seule chose qu'il reste à prouver est que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

Soit $x \in \mathcal{A}$ et notons $\lambda = \varphi(x)$. Supposons que $|\lambda| > \|x\|$. Le lemme 6.2.1 implique alors que $\lambda e - x$ est inversible et donc d'après ce qui précède, on obtient que $\varphi(\lambda e - x) \neq 0$, ce qui est absurde car

$$\varphi(\lambda e - x) = \varphi(\lambda e) - \varphi(x) = \lambda\varphi(e) - \varphi(x) = \lambda - \varphi(x) = 0.$$

Par conséquent, $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, ce qui prouve que φ est une forme linéaire continue de norme au plus 1. Mais comme $\varphi(e) = 1$, on obtient que la norme est exactement 1.

□

Nous réinjectons maintenant un peu d'algèbre dans notre étude avec la notion d'idéal.

Définition 6.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre complexe, commutative et J un sous-ensemble de $\mathcal{A}$. Nous dirons que J est un idéal de $\mathcal{A}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ et*

(b) *$xy \in J$ dès que $x \in \mathcal{A}$ et $y \in J$.*

Si en plus $J \neq \mathcal{A}$, on dit que J est un idéal propre.

Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre.

Voyons comment ces notions algébriques se combinent avec la topologie.

Proposition 6.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, commutative, unitaire et J un idéal de $\mathcal{A}$. Alors l'adhérence de J, notée $\overline{J}$, est aussi un idéal de $\mathcal{A}$. De plus, si J est un idéal propre, alors*

- *J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$ et*
- *$\overline{J}$ est aussi un idéal propre.*

Preuve :

- Il est bien connu (et évident !) que si J est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors $\overline{J}$ reste un sous-espace vectoriel. D'autre part, si $x \in \mathcal{A}$, $y \in \overline{J}$, alors il existe une suite $(y_n)_n \subset J$ telle que $y_n \to y$, lorsque $n \to +\infty$. La continuité de la multiplication dans $\mathcal{A}$ implique alors que $xy_n \to xy$, $n \to +\infty$. Comme J est un idéal, $xy_n \in J$ et donc $xy \in \overline{J}$. Ceci achève de prouver que $\overline{J}$ est un idéal.
- Maintenant supposons que J soit un idéal propre de $\mathcal{A}$. Montrons alors que J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un élément $x \in J$ et x inversible. Alors comme J est un idéal, on a $e = xx^{-1} \in J$ et finalement, pour tout $y \in \mathcal{A}$, on a $y = ye \in J$. Ainsi $J = \mathcal{A}$, ce qui est absurde.
- Il reste à montrer que $\overline{J}$ est un idéal propre si J est un idéal propre. Raisonnons encore par l'absurde en supposant que $\overline{J} = \mathcal{A}$. En particulier, on a $e \in \overline{J}$ et donc il existe $x_0 \in J$ tel que $\|e - x_0\| < 1$. Le lemme 6.2.1 implique alors que $x_0 = e + (x_0 - e)$ est inversible, ce qui est en contraction avec le point précédent.

□

La première partie du résultat suivant est en fait valable dans tout anneau commutatif unitaire et est donc un résultat purement algébrique.

Théorème 6.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et unitaire.*

(a) *Tout idéal propre de $\mathcal{A}$ est contenu dans un idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(b) *Tout idéal maximal de $\mathcal{A}$ est fermé.*

Preuve : (a) Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Soit J un idéal propre de $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{P}$ la famille de tous les idéaux propres de $\mathcal{A}$ contenant J. Tout d'abord, bien évidemment $\mathcal{P} \neq \emptyset$ car $J \in \mathcal{P}$. Maintenant soit $\mathcal{Q}$ une sous-famille totalement ordonnée de $\mathcal{P}$. Considérons

$$M := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Vérifions que M est un idéal de $\mathcal{A}$.

- Tout d'abord, M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ car si $x_1, x_2 \in M$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ tels que $x_1 \in Q_1$ et $x_2 \in Q_2$. Comme $\mathcal{Q}$ est totalement ordonnée, on peut supposer par exemple que $Q_1 \subset Q_2$. D'où, Q_2 étant un idéal donc en particulier un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\lambda x_1 + x_2 \in Q_2 \subset M$.
- Maintenant soit $x \in \mathcal{A}$, $y \in M$. Il existe $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $y \in Q$. Comme Q est un idéal, on obtient que $xy \in Q \subset M$.

Montrons maintenant que M est un idéal propre de $\mathcal{A}$. Supposons par l'absurde que $M = \mathcal{A}$. Alors $e \in M$, i.e qu'il existe $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $e \in Q$. Mais Q est un idéal propre de $\mathcal{A}$ donc c'est absurde d'après la proposition 6.3.1. Par conséquent $M \neq \mathcal{A}$.

Enfin il est clair que M représente un majorant pour $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{P}$. Ainsi, nous avons montré que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}$ possède un majorant. Le lemme de Zorn implique alors que $\mathcal{P}$ possède un élément maximal M_0. Bien sûr, M_0 est un idéal propre de $\mathcal{A}$ qui contient J (car $M_0 \in \mathcal{P}$!). De plus, si H est un autre idéal propre de $\mathcal{A}$ tel que $M_0 \subset H$, alors comme M_0 est un élément maximal de $\mathcal{P}$, on a $M_0 = H$. Ainsi M_0 est un idéal maximal de $\mathcal{A}$, qui contient J.

(b) Soit M un idéal maximal de $\mathcal{A}$. En particulier, M est un idéal propre et la proposition 6.3.1 implique alors que $\overline{M}$ est aussi un idéal propre de $\mathcal{A}$. Comme $M \subset \overline{M}$, la maximalité de M entraine que $M = \overline{M}$, ce qui prouve que M est fermé.

□

6.4 Les algèbres quotients

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire, commutative et J un idéal de $\mathcal{A}$. Rappelons trois faits algébriques bien connus :

(a) L'espace quotient $\mathcal{A}/J$ est une algèbre commutative qui possède une unité.

(b) La surjection canonique $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ est un homomorphisme d'algèbres.

(c) $\mathcal{A}/J$ est un corps (i.e. tout élément non nul est inversible) si et seulement si J est un idéal maximal.

Maintenant si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire et commutative et si J est un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$, alors on pose, pour $\pi(x) \in \mathcal{A}/J$,

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} := \operatorname{dist}(x, J) = \inf_{y \in J} \|x - y\|, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Remarquons que cette définition a bien un sens car si $\pi(x) = \pi(y)$, cela implique que $x - y \in J$ et donc $\operatorname{dist}(x, J) = \operatorname{dist}(y, J)$.

Nous allons montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ définit une norme sur l'espace quotient $\mathcal{A}/J$. Cette norme s'appelle la *norme quotient*.

Théorème 6.4.1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative et J un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$. Alors :*

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ *est une norme.*

(b) *L'algèbre $\mathcal{A}/J$, muni de la norme quotient, est une algèbre de Banach unitaire.*

(c) π *est continue.*

Preuve :

(a) Vérifions que $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}/J$:

- $\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{dist}(x, J) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{J} = J \Longleftrightarrow \pi(x) = 0.$

- Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}\|\pi(x) + \pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} =&\|\pi(x+y)\|_{\mathcal{A}/J} = \mathrm{dist}(x+y, J) \leq \mathrm{dist}(x, J) + \mathrm{dist}(y, J)\\ =&\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J}.\end{aligned}$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\lambda\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(\lambda x)\|_{\mathcal{A}/J} = \inf_{y\in J} \|\lambda x - y\|.$$

Comme $\lambda \neq 0$ et J est un idéal donc en particulier un espace vectoriel, on a $y \in J \Longleftrightarrow \lambda y \in J$. D'où

$$\|\lambda\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \inf_{y\in J} \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}.$$

Pour $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate.

(c) Montrons que π est continue : remarquons que, pour $x \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \mathrm{dist}(x, J) \leq \|x\|.$$

Comme π est un homorphisme d'algèbre donc en particulier linéaire, cela suffit pour montrer que π est continue et sa norme en tant qu'application linéaire est au plus 1.

(b) Montrons que l'algèbre $\mathcal{A}/J$ est une algèbre de Banach unitaire.

- Vérifions que $\mathcal{A}/J$ est un espace de Banach : soit $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}/J$. Alors, pour chaque entier $k \geq 1$, il existe un entier $N(k)$ tel que
$$\|\pi(x_m) - \pi(x_n)\|_{\mathcal{A}/J} < \frac{1}{2^k}, \qquad m, n \geq N(k).$$
De plus, la suite $(N(k))_{k\geq 1}$ peut-être choisie strictement croissante. Posons $u_k := x_{N(k)}$, $k \geq 1$. Nous allons montrer que $(\pi(u_k))_{k\geq 1}$, qui est une sous-suite de $(\pi(x_k))_{k\geq 1}$, est convergente. Comme
$$\|\pi(u_{k+1} - u_k)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(u_{k+1}) - \pi(u_k)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(x_{N(k+1)}) - \pi(x_{N(k)})\|_{\mathcal{A}/J} < \frac{1}{2^k},$$
on en déduit qu'il existe $z_k \in J$ tel que
$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$
Définissons alors $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$ et
$$w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k.$$
On a $\|v_k\| < 2^{-k}$ et donc, pour $n > m$,
$$\|w_n - w_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|v_k\| < \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}.$$
Comme le terme de droite dans l'inégalité précédente tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, il s'ensuit que $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Donc elle converge vers un élément qu'on note w. En utilisant le fait que $z_k \in J$, on peut écrire
$$\begin{aligned}\|\pi(u_n) - \pi(w + u_1)\|_{\mathcal{A}/J} =& \|\pi(u_n - w - u_1)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \left\| u_n - w - u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right\| \\ =& \|w_{n-1} - w\|.\end{aligned}$$
Par conséquent, on obtient que la suite $(\pi(u_n))_{n\geq 1}$ est convergente. La suite de Cauchy $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ contient une sous-suite, $(\pi(u_n))_{n\geq 1}$, convergente. Donc elle converge aussi. Ainsi on a prouvé que l'espace quotient $\mathcal{A}/J$ est complet.

- Vérifions que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\pi(x)\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J}. \tag{6.8}$$

Fixons $\epsilon > 0$. Alors il existe $z, w \in J$ tel que

$$\|x+z\| \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon \quad \text{et} \quad \|y+w\| \leq \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon.$$

Remarquons que $(x+z)(y+w) = xy + xw + zy + zw$ et comme J est un idéal, on a $xw + zy + zw \in J$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} =& \|\pi(xy)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|xy + xw + zy + zw\| = \|(x+y)(z+w)\| \\ \leq& \|x+y\|\|y+w\| \leq (\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon)(\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon) \\ =& \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon(\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon).\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient (6.8).

- Vérifions que $\pi(e)$, l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{A}/J$, est de norme 1 : soit $x \notin J$. Comme $\pi(x) = \pi(x)\pi(e)$, en appliquant l'inégalité (6.8), on obtient

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J}.$$

Le fait que $x \notin J$ implique que $\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} \neq 0$ et donc on en déduit que $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} \geq 1$. Maintenant on a vu que π est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1, donc $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|e\| = 1$. Ainsi $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} = 1$, ce qui achève la preuve du théorème.

□

6.5 Idéaux maximaux

La partie (a) du résultat suivant est l'un des éléments clés de la théorie générale car elle permet d'identifier les caractères et les idéaux maximaux dans une algèbre de Banach commutative, unitaire. L'ensemble des caractères donnera ultérieurement une topologie compacte, séparée (voir théorème 6.7.1). L'étude des algèbres de Banach commutatives et unitaires sera alors, dans une grande mesure, réduite à l'étude d'objets plus familiers (et plus particuliers), notamment les algèbres de fonctions continues sur un compact. Cependant, comme nous le verrons dans la section suivante, le théoréme 6.5.1 a déjà des conséquences concrêtes intéressantes, même sans l'introduction de cette topologie.

Théorème 6.5.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

(a) *Un sous-ensemble J de $\mathcal{A}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ si et seulement si il est le noyau d'un caractère de $\mathcal{A}$.*

(b) *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $h(x) \neq 0$, pour tout caractère h de $\mathcal{A}$.*

(c) *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*

(d) *Soit $x \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si il existe $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ tel que $h(x) = \lambda$.*

Preuve : (a) • Soit φ un caractère de $\mathcal{A}$ et notons $J = \ker \varphi$ son noyau. Nous devons montrer que J est un idéal maximal. Tout d'abord, en utilisant le fait que φ est un morphisme d'algèbre, il est facile de vérifier que J est un idéal de $\mathcal{A}$. Par conséquent, montrer que J est un idéal maximal est équivalent à montrer que $\mathcal{A}/J$ est un corps. Or, comme φ est un morphisme à valeurs dans $\mathbb{C}$ et que φ est non-trivial, on voit immédiatement que φ est surjectif et son image est $\mathbb{C}$. Notons π la surjection canonique de $\mathcal{A}$ sur l'algèbre quotient $\mathcal{A}/J$. Alors, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ \mathcal{A}/J \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

donne l'existence d'un isomorphisme d'algèbre φ de $\mathcal{A}/J$ sur $\mathbb{C}$. On obtient donc que $\mathcal{A}/J$ est un corps (car isomorphe à un corps !) et cela implique que J est un idéal maximal.

• Réciproquement, soit J un idéal maximal de $\mathcal{A}$. D'après le théorème 6.3.2, J est fermé et le théorème 6.4.1 implique que $\mathcal{A}/J$ est une algèbre de Banach unitaire. D'autre part, comme J est un idéal maximal de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}/J$ est un corps. Le théorème de Gelfand-Mazur (théorème 6.2.3) permet alors d'affirmer l'existence d'un isomomorphisme d'algèbre j de $\mathcal{A}/J$ sur $\mathbb{C}$. Notons $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ l'application quotient et considérons $\varphi := j \circ \pi$. Alors on vérifie aisément que φ est un caractère de $\mathcal{A}$ et son noyau est J.

(b) • D'après le théorème 6.3.1, on sait déjà que si x est inversible dans $\mathcal{A}$ et $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, alors $h(x) \neq 0$.

• Réciproquement, soit $x \in \mathcal{A}$ et supposons que pour tout $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, on ait $h(x) \neq 0$. Considérons l'ensemble I_x défini par

$$I_x = \{ax : a \in \mathcal{A}\}.$$

Il est facile de vérifier que I_x est un idéal de $\mathcal{A}$. Supposons que $I_x \neq \mathcal{A}$. Autrement dit, I_x est un idéal propre. Alors le théorème 6.3.2 implique que I_x est contenu dans un idéal maximal. D'après la partie (a), cela signifie qu'il existe un caractère φ de $\mathcal{A}$ tel que $I_x \subset \ker \varphi$. Cela est absurde car $x \in I_x$ et $\varphi(x) \neq 0$ par hypothèse. Par conséquent, $I_x = \mathcal{A}$ et en particulier, $e \in I_x$. Ainsi, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x'x = e$, c'est à dire x est inversible (n'oublions pas que $\mathcal{A}$ est supposée commutative !).

(c) • Si $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$, alors on sait d'après la proposition 6.3.1 que x n'appartient à aucun idéal propre.

• Réciproquement, supposons que x n'appartient à aucun idéal propre et considérons

$$I_x = \{ax : a \in \mathcal{A}\}.$$

Comme I_x est un idéal qui contient x, nécessairement, il n'est pas propre ! Donc $I_x = \mathcal{A}$. En particulier, $e \in I_x$ et donc il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x'x = e$, ce qui prouve que x est inversible.

(d) Il suffit d'appliquer (b) à $\lambda e - x$.

□

Remarque 6.5.1 *Comme un idéal maximal est nécessairement fermé (théorème 6.3.2), une conséquence du théorème 6.5.1 est que si φ est un caractère d'une algèbre de Banach unitaire et commutative, alors son noyau est fermé, ce qui implique que φ est continue. Ainsi, dans le cadre des algèbres de Banach commutatives et unitaires, on obtient une autre démonstration du fait qu'un caractère est automatiquement continue (voir théorème 6.3.1).*

6.6 Applications

Nous donnons maintenant deux exemples d'algèbres de Banach unitaires et commutatives pour lesquelles nous allons déterminer les idéaux maximaux et les caractères. Pour le premier exemple (l'algèbre des fonctions continues sur un compact), on cherchera d'abord les idéaux maximaux pour en déduire les caractères. Pour le second exemple (l'algèbre de Wiener), on fera le contraire, on cherchera d'abord les caractères pour en déduire les idéaux maximaux.

6.6.1 L'algèbre des fonctions continues sur un compact

Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{O}$ quelconque de X, on notera $k(\mathcal{O})$ le sous-ensemble de $C(X)$ défini par

$$k(\mathcal{O}) := \{f \in C(X) : f|\mathcal{O} \equiv 0\}.$$

De plus, pour $x \in X$, on notera par E_x l'application évaluation en x, autrement dit, $E_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$E_x(f) := f(x), \qquad f \in C(X).$$

Il est facile de vérifier (exercice !) que :

- $k(\mathcal{O})$ est un idéal de $C(X)$ et que $k(\mathcal{O}) = k(\overline{\mathcal{O}})$, où $\overline{\mathcal{O}}$ est la fermeture de $\mathcal{O}$.
- E_x est un caractère de $C(X)$.

Maintenant considérons $\mathcal{O} = \{x\}$. Alors on a $k(\{x\}) = \ker E_x$ et donc d'après le théorème 6.5.1, $k(\{x\})$ est un idéal maximal de $C(X)$. Nous allons montrer que tout idéal maximal est de cette forme.

Pour cela, nous utiliserons un lemme général qui donne une condition nécessaire pour qu'un idéal soit propre. Pour ce lemme nous précisons une notation : si J est un idéal de $C(X)$, on notera $h(J)$ l'ensemble des points de X où toutes les fonctions de J s'annulent, autrement dit

$$h(J) := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in J\} = \bigcap_{f \in J} f^{-1}(0).$$

Lemme 6.6.1 *Soit J un idéal de $C(X)$. Si $h(J) = \emptyset$ alors $J = C(X)$.*

Preuve : L'hypothèse implique que pour tout $a \in X$, il existe une fonction continue f_a, appartenant à J, et telle que $f_a(a) \neq 0$. Comme f_a est continue, on peut alors trouver un voisinage ouvert Ω_a de a dans X tel que f_a ne s'annule pas sur ce voisinage Ω_a. Remarquons que

$$X = \bigcup_{a \in X} \Omega_a,$$

et par compacité de X, on obtient qu'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{a_i}.$$

Considérons maintenant la fonction g de $C(X)$ définie par

$$g = \sum_{i=1}^{n} |f_{a_i}|^2. \tag{6.9}$$

En utilisant que J est un idéal, que $f_{a_i} \in J$, $1 \leq i \leq n$, et que g peut s'écrire aussi

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_{a_i} \overline{f_{a_i}},$$

on en déduit que $g \in J$. D'autre part, si $x \in X$, il existe $1 \leq i \leq n$, tel que $x \in \Omega_{a_i}$ et alors $f_{a_i}(x) \neq 0$, ce qui implique avec (6.9) que $g(x) > 0$. Ainsi, g ne s'annule pas sur X. Par conséquent, elle est inversible dans $C(X)$. On a donc montré que J contient un élément inversible de $C(X)$. Finalement, la proposition 6.3.1 permet de conclure que $J = C(X)$.

$\square$

Théorème 6.6.1 *Soit J un sous-ensemble de $C(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est un idéal maximal de $C(X)$.*

(ii) *Il existe $x \in X$ tel que $J = k(\{x\})$.*

Preuve : On a déjà vu que $k(\{x\})$ est un idéal maximal de $C(X)$. Réciproquement, soit J un idéal maximal de $C(X)$. En particulier, J est un idéal propre et donc le lemme 6.6.1 entraine que $h(J) \neq \emptyset$. Soit alors $x \in h(J)$. Cela signifie que toutes les fonctions de J s'annulent en x, ce qu'on peut aussi traduire par l'inclusion $J \subset k(\{x\})$. Mais, comme par exemple, la fonction identiquement égale à 1 est dans $C(X)$ mais pas dans $k(\{x\})$, on a $k(\{x\}) \neq C(X)$. La maximalité de J implique alors que $J = k(\{x\})$.

$\square$

Corollaire 6.6.1 *Les caractères de $C(X)$ sont exactement les évaluations aux points de X. Autrement dit, φ est un caractère de $C(X)$ si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\varphi = E_x$.*

Preuve : On a déjà vu que E_x est un caractère de $C(X)$. Réciproquement, si φ est un caractère de $C(X)$, alors on sait (voir théorème 6.5.1) que $\ker \varphi$ est un idéal maximal. D'après le théorème 6.6.1, cela implique qu'il existe $x \in X$ tel que $\ker \varphi = k(\{x\}) = \ker E_x$. Donc comme E_x et φ sont deux morphismes d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$, on en déduit que nécessairement $\varphi = E_x$.

□

Notre deuxième application concerne les séries de Fourier absolument convergentes.

6.6.2 L'algèbre de Wiener

Le cercle unité du plan complexe est noté $\mathbb{T}$, i.e. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On désigne par $W(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dont la série des coefficient de Fourier est absolument convergente. Autrement dit, une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $W(\mathbb{T})$ si

$$\|f\|_W := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty,$$

où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

On notera $\epsilon_n : z \longmapsto z^n$, $z \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors, pour $f \in W(\mathbb{T})$, on a

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\epsilon_n$$

où la série converge dans $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. (exercice !).

Proposition 6.6.1 $W(\mathbb{T})$ *est une sous-algèbre de l'algèbre* $C(\mathbb{T})$ *des fonctions continues sur* $\mathbb{T}$.

Preuve : Le seul point délicat est la stabilité pour le produit. Nous devons montrer que si $f, g \in W(\mathbb{T})$, alors $fg \in W(\mathbb{T})$. Bien évidemment, on a $fg \in C(\mathbb{T})$ et donc la seule chose à montrer est que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| < +\infty.$$

Avec la formule de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}(n) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{(\overline{g(e^{i\theta})}e^{in\theta})}\,d\theta \\
=& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\widehat{\overline{g}\epsilon_n}(k)}.
\end{aligned}$$

Or

$$\overline{g(t)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)\epsilon_p(t)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)}\epsilon_{-p}(t).$$

D'où

$$\overline{g(t)}\epsilon_n(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)}\epsilon_{n-p}(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(n-j)}\epsilon_j(t),$$

ce qui implique que $\widehat{\overline{g}\epsilon_n}(k) = \overline{\hat{g}(n-k)}$ et finalement

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k). \tag{6.10}$$

Or $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|$ sont convergentes. D'après la proposition A.1.1, la série de terme général

$$w_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k),$$

est bien définie et absolument convergente. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right).$$

Par conséquent, avec (6.10), on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| < \infty,$$

i.e. $fg \in W(\mathbb{T})$ et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right), \tag{6.11}$$

ce qui termine la preuve.

□

On notera que $C(\mathbb{T})$ est pour la norme du sup une algèbre de Banach. Ceci dit, l'énoncé précédent est à prendre dans un sens purement algèbrique : $W(\mathbb{T})$ n'est pas fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et ce n'est pas une sous-algèbre de Banach de $C(\mathbb{T})$. En revanche, on a :

Proposition 6.6.2 $(W(\mathbb{T}), \|\cdot\|_W)$ *est une algèbre de Banach unitaire, commutative. De plus, pour toute fonction* $f \in W(\mathbb{T})$*, la série de Fourier de* f*,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\epsilon_n,$$

converge vers f *pour la topologie de la norme* $\|\cdot\|_W$*.*

Preuve : On vérifie facilement que $\|\cdot\|_W$ est une norme sur $W(\mathbb{T})$.

- Montrons que $(W(\mathbb{T}), \|\cdot\|_W)$ est complet. Considérons pour cela l'application $\mathcal{F} : W(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$, définie par

  $$\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

  Il est clair que $\mathcal{F}$ est une isométrie. Vérifions que $\mathcal{F}$ est surjective. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et considérons l'application g, définie sur $\mathbb{T}$, par

  $$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\epsilon_n(z).$$

  Remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{T}$, on a $|a_n\epsilon_n(z)| = |a_n z^n| = |a_n|$, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\epsilon_n$ converge normalement et donc $g \in C(\mathbb{T})$. De plus, il est facile de prouver que $\hat{g}(n) = a_n$ et comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$, on obtient que $g \in W(\mathbb{T})$. D'où $\mathcal{F}(g) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme isométrique de $W(\mathbb{T})$ sur $\ell^1(\mathbb{Z})$. Comme $\ell^1(\mathbb{Z})$ est complet, on en déduit que $W(\mathbb{T})$ est complet.

- Montrons que, pour tout $f, g \in W(\mathbb{T})$, on a

  $$\|fg\|_W \leq \|f\|_W\|g\|_W.$$

D'après (6.11), on a

$$\|fg\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right) = \|f\|_W\|g\|_W,$$

ce qui achève de prouver que $W(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach.

- Montrons que $W(\mathbb{T})$ est unitaire. L'élément neutre e de $W(\mathbb{T})$ est clairement ϵ_0 (la fonction identiquement égale à 1). Donc $\|e\|_W = \|\epsilon_0\|_W = 1$.

- Il reste à montrer que la la série de Fourier de f converge vers f pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_W$. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\hat{f}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |\hat{f}(-k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $n, p \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{k=-n}^{p} \hat{f}(k)\epsilon_k \right\|_W &= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \hat{f}(-k)\epsilon_{-k} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \hat{f}(k)\epsilon_k \right\|_W \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\hat{f}(-k)| + \sum_{k=p+1}^{+\infty} |\hat{f}(k)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Définition 6.6.1 *L'algèbre $W(\mathbb{T})$ définie ci-dessus s'appelle l'algèbre de Wiener.*

On notera pour $\lambda \in \mathbb{T}$, E_λ l'évaluation en λ, i.e.

$$E_\lambda(f) := f(\lambda), \qquad f \in W(\mathbb{T}).$$

Nous pouvons maintenant déterminer rapidement les caractères de $W(\mathbb{T})$.

Théorème 6.6.2 *Les caractères de l'algèbre de Wiener $W(\mathbb{T})$ sont exactement les E_λ, $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Preuve : Il est facile de vérifier que l'évaluation en λ, E_λ, est un caractère de $W(\mathbb{T})$. Réciproquement, soit φ un caractère de $W(\mathbb{T})$. Nous devons montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que $\varphi = E_\lambda$. Définissons $\lambda := \varphi(\epsilon_1)$. Comme φ est un caractère, alors d'après le théorème 6.3.1, φ est de norme 1. Donc on a

$$|\lambda| = |\varphi(\epsilon_1)| \leq \|\varphi\| \|\epsilon_1\|_W = 1.$$

D'autre part, on a $\epsilon_1 \epsilon_{-1} = \epsilon_0$ et comme φ est un morphisme d'algèbre, on en déduit que

$$\lambda\varphi(\epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_1)\varphi(\epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_1\epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_0) = 1.$$

En particulier, $\lambda \neq 0$ et $\varphi(\epsilon_{-1}) = \lambda^{-1}$. Comme précédemment, on a $|\varphi(\epsilon_{-1})| \leq 1$ et finalement, on obtient que $|\lambda| = 1$. Maintenant, remarquons que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon_p = \epsilon_1^p$ et donc

$$\varphi(\epsilon_p) = \varphi(\epsilon_1^p) = \varphi(\epsilon_1)^p = \lambda^p = E_\lambda(\epsilon_p).$$

Par linéarité, on en déduit que φ et E_λ coincident sur l'enveloppe linéaire engendré par les ϵ_n. Mais d'après la proposition 6.6.2, cette enveloppe linéaire est dense dans $W(\mathbb{T})$ et donc par continuité de φ et E_λ, on a finalement que $\varphi \equiv E_\lambda$.

$\square$

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 6.6.2 *Soit J un sous-ensemble de $W(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est un idéal maximal de $W(\mathbb{T})$.*

(ii) *Il existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que*

$$J = \ker E_\lambda = \{f \in W(\mathbb{T}) : f(\lambda) = 0\}.$$

Les éléments développés jusqu'à présent permettent déjà d'établir facilement un théorème célèbre (dû à Wiener en 1929) sur les séries de Fourier. Le caractère élémentaire de cette démonstration a été pour beaucoup dans le succés immédiat de la théorie des algèbres de Banach dans les années 40. De plus, il est fascinant de voir qu'un énoncé purement fonctionnel peut se démontrer aussi aisément avec des techniques d'algèbres de Banach.

Théorème 6.6.3 (Wiener) *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$ dont la série de Fourier est absolument convergente. Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$, alors la série de Fourier de $1/f$ est aussi absolument convergente.*

Preuve : Il est clair d'après les hypothèses que $f \in W(\mathbb{T})$. De plus, d'après le théorème 6.6.2, pour tout caractère φ de $W(\mathbb{T})$, on a $\varphi(f) \neq 0$. Ainsi, le théorème 6.5.1 implique que f est inversible dans $W(\mathbb{T})$. Autrement dit, il existe $g \in W(\mathbb{T})$ telle que $fg = \epsilon_0$, ϵ_0 étant l'élément neutre de $W(\mathbb{T})$. Comme ϵ_0 est la fonction identiquement égale à 1, il est clair que $g = 1/f$. Par conséquent, on en déduit que $1/f \in W(\mathbb{T})$, ce qui signifie que la série de Fourier de $1/f$ est absolument convergente.

$\square$

6.7 La transformation de Gelfand

Définition 6.7.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative. A chaque $x \in \mathcal{A}$, on associe une fonction $\hat{x} : \mathcal{C}ar(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, appelée transformée de Gelfand de x et définie par*

$$\hat{x}(h) = h(x), \qquad (h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})).$$

On note $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\hat{x}$ pour $x \in \mathcal{A}$.

On a vu (voir théorème 6.3.1) que tout caractère est une forme linéaire continue de norme 1 et donc en particulier un élément du dual (topologique) $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$. On peut donc munir l'espace $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ de la topologie induite par la topologie faible* de $\mathcal{A}^*$ et on appelle cette topologie la *topologie de Gelfand*. Par définition de la topologie faible*, la topologie de Gelfand est donc exactement la topologie la plus faible sur $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ rendant chaque $\hat{x}$ continue.

Définition 6.7.2 *Etant donné $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative, on appelle espace idéal maximal de $\mathcal{A}$, l'espace topologique $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, muni de la topologie de Gelfand.*

Remarquons que la terminologie "espace idéal maximal" est justifié par le théorème 6.5.1 qui donne une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ et les éléments de $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$.

Si on note Δ l'espace idéal maximal d'une algèbre de Banach commutative, unitaire, on a (par définition de la topologie de Gelfand) $\hat{\mathcal{A}} \subset C(\Delta)$, l'algèbre de toutes les fonctions complexes continues sur Δ.

Définition 6.7.3 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$. L'application $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$ définie par*

$$\mathcal{G}(x) = \hat{x}, \qquad (x \in \mathcal{A}),$$

s'appelle la transformation de Gelfand.

Le radical de $\mathcal{A}$, notée rad $\mathcal{A}$, est défini comme l'intersection de tous les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$.

On dit que l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple si rad $\mathcal{A} = \{0\}$.

Le résultat suivant contient l'idée essentielle et remarquable de Gelfand, à savoir réduire l'étude des algèbres de Banach commutatives et unitaires quelconques à l'étude des sous-algèbres d'une algèbre particulière et bien connue, à savoir l'algèbre des fonctions continues sur un compact.

Théorème 6.7.1 *Soit Δ l'espace idéal maximal d'une algèbre de Banach commutative, unitaire $\mathcal{A}$. Alors*

(a) *Δ est compact.*

(b) *La transformation de Gelfand* $\mathcal{G}$ *est un homomorphisme (d'algèbre) de* $\mathcal{A}$ *dans* $C(\Delta)$*, dont le noyau est rad* $\mathcal{A}$*. Son image* $\hat{\mathcal{A}}$ *est une sous-algèbre de* $C(\Delta)$*. La transformation de Gelfand est un isomorphisme (d'algèbre) de* $\mathcal{A}$ *sur* $\hat{\mathcal{A}}$ *si et seulement si* $\mathcal{A}$ *est semi-simple.*

(c) *Pour chaque* $x \in \mathcal{A}$*, l'ensemble image de* $\hat{x}$ *est le spectre* $\sigma(x)$ *de* x*. Donc*

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|,$$

où $\|\hat{x}\|_\infty$ *est le maximun de* $|\hat{x}(h)|$ *sur* Δ*.*

(d) *Soit* $x \in \mathcal{A}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in$ *rad* $\mathcal{A}$*.*

(ii) $\sigma(x) = \{0\}$*.*

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$*.*

Preuve : (a) : d'après le théorème 6.3.1, on sait que Δ est contenu dans $B_{\mathcal{A}^*}$, la boule unité fermée de $\mathcal{A}^*$. Or le théorème de Banach-Alaoglu (voir théorème A.3.2) affirme que $B_{\mathcal{A}^*}$, munie de la topologie faible*, est compacte. Par conséquent, pour montrer que Δ est compact, il suffit de montrer que Δ est fermé dans $B_{\mathcal{A}^*}$, pour la topologie faible*. Soit donc $f \in \overline{\Delta}^{w^*}$ (la fermeture de Δ pour la topologie faible*). Il s'agit de montrer que $f \in \Delta$, c'est à dire que f est un homomorphisme d'algèbres non trivial de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Comme $f \in \mathcal{A}^*$, les deux seules choses à montrer sont :

(i) pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, on a $f(ab) = f(a)f(b)$ et

(ii) $f(e) = 1$.

Fixons $a, b \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$. Posons

$$z_1 = e, z_2 = a, z_3 = b, z_4 = ab$$

et définissons

$$\Omega = \{g \in \mathcal{A}^* : |g(z_i) - f(z_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq 4\}.$$

On remarque alors que Ω est un voisinage de f pour la topologie faible*. Par conséquent, $\Omega \cap \Delta \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe un homomrphisme d'algèbres non trivial g de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$ qui appartient à Ω. On a donc en particulier, $g(ab) = g(a)g(b)$ et $g(e) = 1$. D'où

$$|1 - f(e)| = |g(e) - f(e)| < \varepsilon.$$

Ceci étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(e) = 1$, ce qui donne (ii).

Pour démontrer (i), remarquons que

$$\begin{aligned} f(ab) - f(a)f(b) =& f(ab) - g(ab) + g(ab) - f(a)f(b) \\ =& (f(ab) - g(ab)) + g(a)g(b) - f(a)f(b) \\ =& (f(ab) - g(ab)) + (g(a) - f(a))\, g(b) + (g(b) - f(b))\, f(a). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(ab) - f(a)f(b)| \leq& |f(ab) - g(ab)| + |g(a) - f(a)|\, |g(b)| + |g(b) - f(b)|\, |f(a)| \\ \leq& \varepsilon\, (1 + \|a\| + \|b\|)\,, \end{aligned}$$

ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(ab) = f(a)f(b)$, ce qui achève la preuve de a).

(b) : soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$ et $h \in \Delta$. On a

$$(\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y))(h) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = h(x) + h(y) = h(x + y) = \mathcal{G}(x + y)(h),$$

$$(\alpha\mathcal{G}(x))(h) = \alpha\hat{x}(h) = \alpha h(x) = h(\alpha x) = \mathcal{G}(\alpha x)(h),$$

et

$$(\mathcal{G}(x)\mathcal{G}(y))(h) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = h(x)h(y) = h(xy) = \mathcal{G}(xy)(h).$$

Comme les égalités précédentes sont vraies pour tout $h \in \Delta$, on en déduit que $\mathcal{G}$ est un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$. Par conséquent, son image, qui est $\hat{\mathcal{A}}$, est bien sûr une sous-algèbre de $C(\Delta)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(\mathcal{G}) \Longleftrightarrow& \hat{x}(h) = 0, \qquad \forall h \in \Delta. \\ \Longleftrightarrow& h(x) = 0, \qquad \forall h \in \Delta. \\ \Longleftrightarrow& x \in \bigcap_{h\in\Delta} \ker h. \end{aligned}$$

D'après le théorème 6.5.1, on a

$$\bigcap_{h\in\Delta} \ker h = \bigcap_{\substack{I \text{ idéal} \\ \text{max. de } \mathcal{A}}} I = \text{rad } \mathcal{A}.$$

On en déduit donc que $\ker \mathcal{G} = \text{rad } \mathcal{A}$. Finalement, $\mathcal{G}$ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\ker \mathcal{G} = \{0\}$, i.e. $\text{rad } \mathcal{A} = \{0\}$, soit encore $\mathcal{A}$ semi-simple.

(c) : soit $x \in \mathcal{A}$. On a

$$\text{Im } \hat{x} = \{\hat{x}(h) : h \in \Delta\} = \{h(x) : h \in \Delta\}.$$

D'autre part, d'après le théorème 6.5.1, on a $\lambda \in \sigma(x)$ ssi il existe $h \in \Delta$ tq. $\lambda = h(x)$. D'où $\text{Im } \hat{x} = \sigma(x)$. On en déduit aussi que

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h\in\Delta} |\hat{x}(h)| = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = r(x).$$

L'inégalité $r(x) \leq \|x\|$ a déjà été prouvé dans le théorème 6.2.1.

(d) : L'équivalence entre (ii) et (iii) est immédiate d'après le théorème 6.2.2 qui affirme que

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Pour l'équivalence entre (i) et (ii), remarquons que d'après (b) et (c) on a

$$\begin{aligned} x \in \text{rad } \mathcal{A} &\Longleftrightarrow \mathcal{G}(x) = 0, \\ &\Longleftrightarrow \hat{x}(h) = 0, \quad \forall h \in \Delta, \\ &\Longleftrightarrow \text{Im } \hat{x} = \{0\}, \\ &\Longleftrightarrow \sigma(x) = \{0\}. \end{aligned}$$

□

Les algèbres semi-simples possèdent une propriété importante que nous avons déjà démontrée dans le cas où $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ (voir théorème 6.3.1).

Théorème 6.7.2 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative unitaire et $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et semi-simple. Si $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un homomorphisme d'algèbre, alors φ est automatiquement continu.*

Preuve : Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres de Banach, pour montrer que φ est continue, nous pouvons appliquer le théorème du graphe fermé. Soit donc $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ dans } \mathcal{A}$$

et

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Il s'agit de montrer que $y = \varphi(x)$. Soit h un caractère de $\mathcal{B}$. Alors $\varphi := h \circ \varphi$ est un caractère de $\mathcal{A}$. D'après le théorème 6.3.1, h et φ sont continues et donc

$$\begin{aligned} h(y) = &\lim_{n\to+\infty} h(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \\ =&\varphi(x) = (h \circ \varphi)(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $h \in \Delta_{\mathcal{B}}$, on a $h(y) = h(\varphi(x))$. Si on note $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ la transformation de Gelfand définie sur $\mathcal{B}$, cela signifie que $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(y) = \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(\varphi(x))$. Comme $\mathcal{B}$ est semi-simple, cela implique que $\varphi(x) = y$. Le théorème du graphe fermé permet alors de conclure que φ est continue.

□

On obtient le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 6.7.1 *Tout isomorphisme entre deux algèbres de Banach commutatives, unitaires, semi-simples, est un homéomorphisme.*

En particulier, ceci est vrai pour tout automorphisme d'une algèbre de Banach commutative, unitaire, semi-simple. La topologie d'une telle algèbre est alors dans un certain sens complètement déterminée par sa structure algébrique.

Dans le théorème 6.7.1, l'algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ peut-être ou ne pas être fermée dans $C(\Delta)$, muni de la norme du sup. Pour décider de quel cas il s'agit, nous allons voir qu'il suffit de comparer $\|x^2\|$ et $\|x\|^2$, pour tout $x \in \mathcal{A}$. Evidemment l'inégalité $\|x^2\| \leq \|x\|^2$ est toujours vraie !

Lemme 6.7.1 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, unitaire et*

$$r = \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \qquad s = \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}$$

alors on a $s^2 \leq r \leq s$.

Preuve : Puisque que $\|\mathcal{G}(x)\|_\infty \geq s\|x\|$, on a, d'après le théorème 6.7.1,

$$\|x^2\| \geq \|\mathcal{G}(x^2)\|_\infty = \|\mathcal{G}(x)^2\|_\infty = \|\mathcal{G}(x)\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2,$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$. Ainsi $s^2 \leq r$.

Pour la deuxième inégalité, remarquons que comme $\|x^2\| \geq r\|x\|^2$, une récurrence sur n montre que

$$\left\|x^{2^n}\right\| \geq r^{2^n-1}\|x\|^{2^n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{6.12}$$

En effet, la formule (6.12) est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}\left\|x^{2^{n+1}}\right\| = \left\|\left(x^{2^n}\right)^2\right\| \geq r \left\|x^{2^n}\right\|^2 \\ \geq & r\left(r^{2^n-1}\right)^2 \|x\|^{2^{n+1}} \\ = & r^{2^{n+1}-1}\|x\|^{2^{n+1}},\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Ainsi, par récurrence, on en déduit que (6.12) est vraie pour tout $n \geq 1$. En prenant la racine 2^n-ième, on obtient

$$\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} \geq r^{\frac{2^n-1}{2^n}}\|x\| = r^{1-\frac{1}{2^n}}\|x\|.$$

D'après le théorème 6.2.2, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que

$$r(x) \geq r\|x\|.$$

Le théorème 6.7.1 permet alors de conclure car

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \geq r\|x\|,$$

et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{A}$, on en déduit que $s \geq r$.

$\square$

Théorème 6.7.3 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(a) *Si on munit $\hat{\mathcal{A}}$ de la norme du sup, induite par $C(\Delta)$, alors la transformation de Gelfand est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

(b) *L'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple et $\hat{\mathcal{A}}$ est fermée dans $C(\Delta)$ si et seulement s'il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on ait $\|x\|^2 \leq K\|x^2\|$.*

Preuve : (a) : la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si

$$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Comme $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$, pour tout $x \in \mathcal{A}$ (d'après le théorème 6.7.1), on en déduit que la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si

$$s := \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} = 1.$$

Le lemme 6.7.1 implique alors que $s = 1$ est équivalent à

$$r := \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2} = 1$$

Comme $\|x^2\| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{A}$, on obtient que

$$\begin{aligned} r = 1 &\Longleftrightarrow \|x\|^2 \leq \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A} \\ &\Longleftrightarrow \|x\|^2 = \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du point (a).

(b) : d'après le théorème 6.7.1, l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple et $\hat{\mathcal{A}}$ est fermé dans $C(\Delta)$ si et seulement si la transformée de Gelfand $\mathcal{G}$ est injective et à image fermée. Le théorème A.2.2 implique alors que ceci est équivalent à l'existence de $c > 0$ tel que

$$c\|x\| \leq \|\hat{x}\|_\infty, \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

L'existence de $c > 0$ est alors équivalente à

$$\inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} > 0, \tag{6.13}$$

et le lemme 6.7.1 implique alors que (6.13) équivaut à

$$\inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2} > 0.$$

Cette dernière condition est elle même équivalente à l'existence de $K > 0$ telle que $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

□

On peut alors donner le corollaire suivant :

Corollaire 6.7.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$. Si on munit $\hat{\mathcal{A}}$ de la norme du sup, induite par $C(\Delta)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La transformation de Gelfand est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.*

(ii) *La transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.*

(iii) *Pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : si la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie alors en particulier elle est injective et donc le théorème 6.7.1 implique qu'elle est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) : découle trivialement du théorème 6.7.3.

□

6.8 Exercices

Exercice 6.8.1 *Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (complexe) et supposons que $\mathcal{A}$ est aussi une algèbre ayant un élément unité $e \neq 0$ et telle que la multiplication est continue à gauche et à droite. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une norme équivalente sur $\mathcal{A}$ qui en fait une algèbre de Banach unitaire.*

1) *Pour $x \in \mathcal{A}$, on considère M_x l'opérateur de multiplication à gauche par x, défini par*

$$M_x(z) = xz, \qquad (z \in \mathcal{A}).$$

On note $\widetilde{A} = \{M_x : x \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\widetilde{A}$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, des applications linéaires et continues sur $\mathcal{A}$.

2) *Pour $x \in \mathcal{A}$, on pose*

$$\|x\|' = \|M_x\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}.$$

(a)) *Vérifier que $\|\cdot\|'$ définit une norme sur $\mathcal{A}$.*

(b) *Montrer que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|')$ est une algèbre de Banach unitaire.*

(c) *Montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.*

3) *Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ défini par*

$$\varphi(x) = M_x.$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ telle que φ et φ^{-1} sont continues.

4) *En déduire que toute algèbre de Banach unitaire $\mathcal{B}$ est isomorphe à une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ contenant l'identité.*

Exercice 6.8.2 *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et $C(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues sur K, munie de la norme sup. On note par :*

- *$A(K)$ le sous-ensemble de $C(K)$ formé des fonctions continues sur K et holomorphes à l'intérieur de K ;*
- *$P(K)$ la fermeture dans $C(K)$ des polynômes complexes.*

1) *Montrer que $A(K)$ et $P(K)$ sont des algèbres de Banach unitaires (pour la norme sup).*

Pour $f \in C(\mathbb{T})$, on note

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\, d\theta, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Soit

$$s_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ik\theta},$$

et posons

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\left(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\right).$$

Le théorème de Fejer affirme que si $f \in C(\mathbb{T})$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

2) *En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (i) $f \in P(\mathbb{T})$ *;*

   (ii) $f = F|\mathbb{T}$*, où* $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$ *;*

   (iii) $\hat{f}(-k) = 0$*,* $k \in \mathbb{N}^*$*.*

3) *Montrer que*

   (a) $A(\overline{\mathbb{D}})$ *et* $P(\mathbb{T})$ *sont isométriquement isomorphes.*

   (b) $A(\overline{\mathbb{D}}) = P(\overline{\mathbb{D}})$*.*

4) *Soit* $f_0(z) := z$*,* $z \in \mathbb{T}$*. Calculer* $\sigma_{P(\mathbb{T})}(f_0)$*,* $\sigma_{C(\mathbb{T})}(f_0)$*, puis le rayon spectral de* f_0*.*

Exercice 6.8.3 *Soit* $\mathbb{C}_n[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à* n*. On définit une multiplication (interne)* $\star$ *par*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \star \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q\right) X^k,$$

et une norme $\|\cdot\|_1$ *par*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

1) *Dans cette question, on suppose que* $n = 3$*. On considère* $f(X) = 1+X+X^3$*,* $g(X) = 2 + X^3$*. Calculer* $\|f\|_1$*,* $\|g\|_1$ *et* $\|f \star g\|_1$*.*

2) *Vérifier que* $\mathbb{C}_n[X]$ *est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

3) *Décrire la boule unité ouverte* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{C}_n[X]$.

4) *Montrer que* $2X \notin \mathcal{B}$ *et* $1+2X \in \mathcal{I}nv(\mathbb{C}_n[X])$. *Caractériser* $G := \mathcal{I}nv(\mathbb{C}_n[X])$ *et vérifier directement que :*

   (a) G *est un groupe multiplicatif.*

   (b) G *est ouvert dans* $\mathbb{C}_n[X]$.

   (c) $\{e - x : x \in \mathcal{B}\} \subsetneq G$.

5) *Soit* $f(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. *Déterminer* $\sigma(f)$.

Exercice 6.8.4 *Soit* $X = \mathbb{C}^n$ *muni des opérations usuelles qui en font une algèbre complexe. On considère sur* X *la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par*

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\|_\infty = \sup_{1 \le j \le n} |z_j|.$$

1) *Vérifier que* X *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

2) *Caractériser* $\mathcal{I}nv(X)$ *et vérifier que c'est un groupe multiplicatif ouvert.*

3) *Dans cette question, on pose* $n = 3$. *Trouver le spectre de* $x = (2, 3, 5)$ *et calculer de deux manières le rayon spectral de* x.

Exercice 6.8.5 *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Banach et on pose* $\mathcal{A}^\sharp = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, *muni de sa structure d'espace vectoriel produit cartésien et on définit la multiplication sur* $\mathcal{A}^\sharp$ *par*

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (\alpha y + \beta x + xy, \alpha\beta).$$

La norme sur $\mathcal{A}^\sharp$ *est elle définie par*

$$\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|.$$

1) *Montrer que* $\mathcal{A}^\sharp$ *est une algèbre de Banach unitaire.*

2) *Vérifier que* $\mathcal{A}$ *se plonge isométriquement dans* $\mathcal{A}^\sharp$.

Exercice 6.8.6 *Soit* $\mathcal{A} = \mathbb{C}_n[X]$ *l'algèbre de Banach (unitaire) des polynômes de degré au plus* n*, munie de la norme* $\|\cdot\|_1$ *(voir exercice 6.8.3). Soit*

$$J = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : a_0 = 0 \right\}.$$

1) *Montrer que* J *est un idéal fermé maximal de* $\mathcal{A}$*. En déduire que* $(J, \|\cdot\|_1)$ *est une algèbre de Banach.*

2) *On considère* $J^\sharp$ *l'algèbre de Banach unitaire construite à partir de* J *par le procédé décrit dans l'exercice 6.8.5. Montrer que* $J^\sharp$ *est isométriquement isomorphe à* $\mathcal{A}$*.*

Exercice 6.8.7 *Soit* $\mathcal{A} = \mathbb{C}_n[X]$ *l'algèbre de Banach unitaire considérée dans l'exercice 6.8.3.*

1) *Décrire tous les idéaux de* $\mathcal{A}$*.*

2) *Décrire les idéaux fermés et les idéaux maximaux de* $\mathcal{A}$*.*

Mêmes questions avec l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ *considérée dans l'exercice 6.8.4.*

Exercice 6.8.8 *Soient* $n \geq 3$*,* $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ *l'algèbre de Banach unitaire considérée dans l'exercice 6.8.4 et*

$$J = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{A} : z_1 = z_2 = z_3 = 0\}.$$

1) *Montrer que* J *est un idéal fermé de* $\mathcal{A}$*.*

2) *Montrer que* $\mathcal{A}/J$ *est isomorphe isométriquement à* $\mathbb{C}^3$*.*

Exercice 6.8.9 *Soit* (X, d) *un espace métrique compact et soit* $C(X)$ *l'algèbre de Banach unitaire des fonctions continues sur* X*. L'objet de cet exercice est de caractériser tous les idéaux fermés de* $C(X)$*. On reprend les notations du paragraphe 6.6.1 :*

- *étant donné un sous-ensemble* $\mathcal{O}$ *quelconque de* X*, on note* $k(\mathcal{O})$ *le sous-ensemble de* $C(X)$ *défini par*

$$k(\mathcal{O}) := \{f \in C(X) : f|\mathcal{O} \equiv 0\}.$$

- *Si J est un idéal de $C(X)$, on note $h(J)$ l'ensemble des points de X où toutes les fonctions de J s'annulent, autrement dit*

$$h(J) := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in J\} = \bigcap_{f \in J} f^{-1}(0).$$

1) *Vérifier que pour $\mathcal{O} \subset X$, $k(\mathcal{O})$ est un idéal fermé de $C(X)$ et que $k(\mathcal{O}) = k(\overline{\mathcal{O}})$.*

2) *Soit J un idéal fermé de $C(X)$. Montrer que si $h(J)$ contient plus d'un point, alors J n'est pas maximal.*

3) *Soit J un idéal fermé de $C(X)$ et considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\Omega_n = \left\{ x \in X : d(x, h(J)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

   (i) *Montrer que $X \setminus \Omega_n$ est un ensemble compact, contenu dans $X \setminus h(J)$.*

   (ii) *Montrer qu'il existe une fonction appartenant à J qui est strictement positive sur $X \setminus \Omega_n$. En déduire que si $g \in C(X)$ et $g \equiv 0$ sur Ω_n, alors $g \in J$.*

   (iii) *En déduire que, si $g \in C(X)$ et $g \equiv 0$ sur un voisinage de $h(J)$, alors $g \in J$.*

   (iv) *Montrer que $k(h(J)) = J$ (on pourra utiliser* (ii) *et le lemme d'Urysohn).*

4) *Conclure que tout idéal fermé de $C(X)$ est de la forme $k(\mathcal{O})$, avec $\mathcal{O}$ un ensemble fermé de X.*

Exercice 6.8.10 *Soit $W(\mathbb{T})$ l'algèbre de Wiener et*

$$W^+(\mathbb{T}) = \left\{ f \in W(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}.$$

1) *Vérifier que $W^+(\mathbb{T})$ est une sous-algèbre fermée et unitaire de $W(\mathbb{T})$ et que $W^+(\mathbb{T})$ est engendrée par $\epsilon_1(z) = z$, $z \in \mathbb{T}$ (autrement dit, la plus petite sous-algèbre fermée de $W(\mathbb{T})$ qui contient ϵ_1 est $W^+(\mathbb{T})$).*

2) *Vérifier que* ϵ_1 *est inversible dans* $W(\mathbb{T})$ *mais pas dans* $W^+(\mathbb{T})$.

3) *Trouver* $\sigma_{W(\mathbb{T})}(\epsilon_1)$ *(le spectre de* ϵ_1 *considéré comme élément de* $W(\mathbb{T})$*) et* $\sigma_{W^+(\mathbb{T})}(\epsilon_1)$.

Exercice 6.8.11 *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques compacts et soient* $C(X)$ *(resp.* $C(Y)$*) l'algèbre de Banach unitaire des fonctions complexes continues sur* X *(resp. sur* Y*) munie de la norme sup.*

1) *Montrer que, si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'éléments de* X*, alors* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers un point* $a \in X$ *si et seulement si, pour toute fonction* $f \in C(X)$*, la suite* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *converge vers* $f(a)$.

2) *Soit* g *une application continue de* Y *dans* X*. Soit* $\psi_g : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *définie par*
$$\psi_g(h) = h \circ g.$$
Montrer que ψ_g *est un morphisme d'algèbres de Banach unitaires.*

3) *Réciproquement, soit* $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *u morphisme d'algèbres de Banach unitaires.*

   (i) *Fixons* $y_0 \in Y$*. Montrer que l'application* $\varphi_{y_0} : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$*, définie par*
   $$\varphi_{y_0}(h) = \varphi(h)(y_0),$$
   est un caractère de $C(X)$.

   (ii) *En déduire qu'on peut définir une application* $g : Y \longrightarrow X$ *telle que, pour tout* $h \in C(X)$*, on a*
   $$\varphi(h)(y) = h(g(y)), \qquad (y \in Y).$$

   (iii) *Montrer que* g *est continue.*

4) *En déduire la forme d'un automorphisme de* $C(X)$.

Exercice 6.8.12 *Déterminer les radicaux des algèbres de Banach unitaires et commutatives suivantes :*

1) *l'algèbre* $\mathbb{C}^n$ *considérée dans l'exercice 6.8.4 ;*

2) *l'algèbre* $\mathbb{C}_n[X]$ *considérée dans l'exercice 6.8.3 ;*

3) *l'algèbre du disque* $A(\overline{\mathbb{D}})$ *;*

4) *l'algèbre de Wiener* $W(\mathbb{T})$ *;*

5) *la sous-algèbre de l'algèbre de Wiener* $W^+(\mathbb{T})$ *définie dans l'exercice 6.8.10.*

Décrire dans chacun des cas l'image de la transformation de Gelfand.

Exercice 6.8.13 *Soit* $\mathcal{A}$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ *représentée par une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. *On munit* $\mathcal{A}$ *des opérations usuelles de* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ *et de la norme opérateur.*

1) *Montrer que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

2) *Caractériser les éléments non-inversibles de* $\mathcal{A}$ *et déterminer la forme des idéaux maximaux de* $\mathcal{A}$.

3) *Expliciter l'image de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

par la transformation de Gelfand.

Exercice 6.8.14 *Soit* $L^1[0,1]$ *l'espace de Banach composé des fonctions intégrables sur l'intervalle* $[0,1]$. *On définit une multiplication sur* $L^1[0,1]$ *par*

$$(f \star g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt, \qquad (x \in [0,1]).$$

1) *Montrer que* $L^1[0,1]$ *est une algèbre de Banach. Est-elle unitaire ? Par la suite, on note* $\mathcal{A}$ *l'algèbre de Banach unitaire construite à partir de* $L^1[0,1]$ *par le procédé décrit dans l'exercice 6.8.5. Pour* $f \in L^1[0,1]$, *on identifie* f *et son image dans* $\mathcal{A}$.

2) *Calculer le rayon spectral de la fonction* $f \equiv 1$.

3) *Soit* $f \in L^1[0,1]$. *Montrer que s'il existe* $\varepsilon > 0$ *telle que* $f \equiv 0$ *sur* $[0,\varepsilon]$, *alors* $f \in$ *rad* $\mathcal{A}$.

4) *Déterminer tous les caractères de* $\mathcal{A}$.