

# Chapitre 7

## Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach

L'objet de ce chapitre est de définir un calcul fonctionnel holomorphe qui prolonge le calcul fonctionnel polynômial et qui respecte les principales propriétés algébriques et spectrales.

### 7.1 Aspect algébrique : calcul fonctionnel rationnel

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre unitaire complexe (non nécessairement normée) et  $x \in \mathcal{A}$ . On suppose que  $\sigma(x)$ , le spectre de  $x$ , est non vide (c'est automatique si l'algèbre  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Banach unitaire, comme on l'a vu au théorème 6.2.1 ; en général, c'est un sous-ensemble assez quelconque de  $\mathbb{C}$ ). Pour un polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$p(X) = \sum_{i=0}^N a_i X^i,$$

il est naturel de définir

$$p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i.$$

Il est facile de vérifier (exercice !) que l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ p & \longmapsto & p(x) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres unitaires. De plus, le lemme 6.2.2 affirme que  $\varphi$  préserve les propriétés spectrales, dans le sens où  $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$ . D'un point de vue purement algébrique, nous allons tout d'abord étendre ce calcul fonctionnel aux fractions rationnelles.

Pour un sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{C}$ , contenant le spectre de  $x$ , on note  $\mathcal{R}_K$  l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes et à pôles hors de  $K$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{R}_K$  est une sous-algèbre du corps  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles à une indéterminée sur  $\mathbb{C}$  et dès que  $K$  est infini,  $\mathcal{R}_K$  s'identifie à une algèbre de fonctions sur  $K$  (contenue dans l'algèbre des fonctions continues sur  $K$  et holomorphe à l'intérieur de  $K$ ).

**Proposition 7.1.1** *Le calcul fonctionnel polynômial  $\varphi_x : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$ ,  $\varphi_x(p) = p(x)$ , s'étend de façon unique en un morphisme d'algèbres unitaires  $\varphi_x : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{A}$ . On notera encore*

$$f(x) = \varphi_x(f), \quad \text{pour } f \in \mathcal{R}_K.$$

De plus, pour toute fraction rationnelle  $f \in \mathcal{R}_K$ , on a

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

**Preuve :** • Unicité : soit  $\varphi_x : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{A}$  un morphisme d'algèbres unitaires qui étend le calcul fonctionnel polynômial. Soit  $f \in \mathcal{R}_K$ . Alors  $f$  s'écrit  $f = \frac{p}{q}$ , avec  $p, q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $q$  ne s'annulant pas sur  $K$ . En utilisant l'égalité  $q \cdot \frac{1}{q} = 1$  dans  $\mathcal{R}_K$  et le fait que  $\varphi_x$  est un morphisme d'algèbres unitaires, on a

$$\varphi_x(f) = \varphi_x(p)\varphi_x\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi_x(p)\varphi_x(q)^{-1} = p(x)q(x)^{-1}.$$

Pour l'unicité, il reste à remarquer que si  $f = \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ , avec  $p, p_1, q, q_1 \in \mathbb{C}[X]$  et  $q, q_1$  ne s'annulant pas sur  $K$ , on a

$$p(x)q(x)^{-1} = p_1(x)q_1(x)^{-1}. \tag{7.1}$$

Pour cela, notons que  $p(x)q(x) = (pq)(x) = (qp)(x) = q(x)p(x)$  implique que  $q(x)^{-1}p(x) = p(x)q(x)^{-1}$ . Par conséquent, on en déduit que

$$(7.1) \begin{aligned} &\iff q(x)^{-1}p(x) = p_1(x)q_1(x)^{-1} \\ &\iff p(x)q_1(x) = q(x)p_1(x) \\ &\iff (pq_1)(x) = (qp_1)(x), \end{aligned}$$

et cette dernière égalité découle du fait que dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a  $pq_1 = qp_1$ .

• Existence : soit  $f \in \mathcal{R}_K$ . Alors  $f$  s'écrit  $f = \frac{p}{q}$ , avec  $p, q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $q$  ne s'annulant pas sur  $K$ . Comme  $\sigma(q(x)) = q(\sigma(x))$ , on obtient que  $0 \notin \sigma(q(x))$ . Autrement dit,  $q(x)$  est inversible. On pose alors

$$\varphi_x(f) := p(x)q(x)^{-1}.$$

D'après le raisonnement précédent, cette définition a bien un sens car le membre à gauche  $p(x)q(x)^{-1}$  ne dépend pas du choix de  $p$  et  $q$  dans la représentation de la fraction rationnelle  $f$ . De plus, il est clair que cette définition prolonge bien le calcul fonctionnel polynômial. Nous allons vérifier que  $\varphi_x$  est un morphisme d'algèbre unitaires. Pour  $f = \frac{p_1}{q_1}, g = \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{R}_K$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi_x(\lambda f + g) &= \varphi_x\left(\frac{\lambda p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) \\ &= \varphi_x\left(\frac{\lambda p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}\right) \\ &= (\lambda p_1 q_2 + p_2 q_1)(x)(q_1 q_2)(x)^{-1} \\ &= (\lambda p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x))q_2(x)^{-1}q_1(x)^{-1} \\ &= \lambda p_1(x)q_1(x)^{-1} + p_2(x)q_2(x)^{-1} \\ &= \lambda \varphi_x(f) + \varphi_x(g). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(fg) &= \varphi_x\left(\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right) \\
 &= (p_1 p_2)(x)(q_1 q_2)(x)^{-1} \\
 &= p_1(x)p_2(x)q_2(x)^{-1}q_1(x)^{-1} \\
 &= p_1(x)q_1(x)^{-1}p_2(x)q_2(x)^{-1} \\
 &= \varphi_x(f)\varphi_x(g).
 \end{aligned}$$

Enfin, on a  $\varphi_x(1) = e$  ! En conclusion,  $\varphi_x$  est bien un morphisme d'algèbres unitaires qui prolonge le calcul fonctionnel polynômial.

• Montrons la propriété spectrale : soit  $\lambda \in \sigma(x)$  et  $f \in \mathcal{R}_K$ . Écrivons  $f = \frac{p}{q}$ , avec  $p, q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $q$  ne s'annulant pas sur  $K$ . Comme  $\lambda \in \sigma(x) \subset K$ , on peut considérer la fraction rationnelle  $g(X)$  définie par

$$g(X) = \frac{f(X) - f(\lambda)}{X - \lambda},$$

et on a

$$g(X) = \frac{\frac{p(X)}{q(X)} - \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}}{X - \lambda} = \frac{p(X)q(\lambda) - p(\lambda)q(X)}{q(\lambda)q(X)(X - \lambda)}.$$

Comme

$$\frac{p(X)q(\lambda) - p(\lambda)q(X)}{X - \lambda} \in \mathbb{C}[X],$$

on en déduit que  $g \in \mathcal{R}_K$ . D'où  $f(x) - f(\lambda)e = (x - \lambda e)g(x) = g(x)(x - \lambda e)$  et si  $f(x) - f(\lambda)e$  est inversible, l'égalité précédente implique que  $x - \lambda e$  est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent,  $f(x) - f(\lambda)e$  n'est pas inversible, autrement dit, on a  $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$ . Finalement, on a prouvé que  $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$ .

Réciproquement, montrons que  $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$ . Soit  $\lambda \in \sigma(f(x))$ . Écrivons

$$\begin{aligned}
 f(X) - \lambda &= \frac{p(X)}{q(X)} - \lambda = \frac{p(X) - \lambda q(X)}{q(X)} \\
 &= \alpha \frac{\prod_{i=1}^N (X - \alpha_i)}{q(X)},
 \end{aligned}$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$  est la suite des zéros (comptés avec multiplicité) du polynôme  $p(X) - \lambda q(X)$ . On peut bien sûr supposer que  $\alpha \neq 0$  (sinon le résultat est trivial!). En utilisant le fait que  $\varphi_x$  est un morphisme d'algèbres, on a

$$f(x) - \lambda e = \alpha \left( \prod_{i=1}^N (x - \lambda_i e) \right) q(x)^{-1} = \alpha q(x)^{-1} \left( \prod_{i=1}^N (x - \lambda_i e) \right).$$

Comme  $f(x) - \lambda e$  n'est pas inversible, on en déduit qu'il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , tel que  $\alpha_i e - x$  n'est pas inversible. Donc  $\alpha_i \in \sigma(x)$  et  $f(\alpha_i) = \lambda \in f(\sigma(x))$ . D'où  $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$ . □

Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Banach, le calcul fonctionnel, dit de "Dunford-Schwarz", étend  $\varphi_x$  à l'algèbre des fonctions holomorphes dans un voisinage du spectre de  $x$ . Pour le développer, nous allons exploiter la théorie des algèbres de Banach du chapitre précédent et la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach (dont on a fait un bref résumé dans l'Annexe B).

## 7.2 Définitions et propriétés du calcul fonctionnel holomorphe

### 7.2.1 Formules de Cauchy pour le cas polynômial et rationnel

Nous allons commencer par une formule qui va justifier notre définition du calcul fonctionnel holomorphe.

**Lemme 7.2.1** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire et  $x \in \mathcal{A}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

$$x^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \lambda^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \quad (7.2)$$

où  $\Gamma_r$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $r$  positivement orienté, avec  $r > r(x)$ .

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que pour  $\lambda \in \Gamma_r^*$ , on a  $|\lambda| = r > r(x)$  et donc  $\lambda \in \rho(x)$ . Par conséquent, la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^n(\lambda e - x)^{-1}$  est continue sur un voisinage de  $\Gamma_r^*$  et l'intégrale dans la formule (7.2) a bien un sens. En utilisant la paramétrisation  $\Gamma_R(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , on a, par définition de l'intégrale curviligne,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \lambda^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)t} (re^{it}e - x)^{-1} dt. \quad (7.3)$$

Notons maintenant que le lemme 6.2.1 implique que pour  $|z| > \|x\|$ , on a

$$R(z, x) = (ze - x)^{-1} = \frac{1}{z} \left( e - \frac{x}{z} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}. \quad (7.4)$$

Comme  $z \mapsto R(z, x)$  est holomorphe pour  $|z| > r(x)$ , la série entière dans l'égalité (7.4) converge en fait normalement dans tout domaine  $|z| \geq \rho > r(x)$ .

Ainsi, on en déduit que

$$(re^{it}e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{r^{k+1} e^{i(k+1)t}},$$

avec convergence uniforme de la série par rapport à la variable d'intégration  $t \in [0, 2\pi]$ . En utilisant (7.3), on peut donc permuter le signe "somme et intégrale" et écrire que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \lambda^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} x^k r^{n-k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt.$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipt} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \lambda^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = x^n,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Par linéarité, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 7.2.1** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire et  $x \in \mathcal{A}$ . Alors, pour tout polynôme  $p$ , on a*

$$p(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} p(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \quad (7.5)$$

où  $\Gamma_r$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $r$  positivement orienté, avec  $r > r(x)$ .

En utilisant une première fois la formule de Cauchy, nous allons montrer que la formule (7.5) s'étend aux fractions rationnelles.

**Proposition 7.2.1** *Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire,  $x \in \mathcal{A}$ ,  $f$  une fraction rationnelle à pôles hors de  $\sigma(x)$  et  $\Gamma$  un système de courbes fermées de classe  $C^1$  par morceaux et qui entoure  $\sigma(x)$  dans l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } f\}$ . Alors, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda. \quad (7.6)$$

**Preuve :** En vertu de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle et de la linéarité (par rapport à  $f$ ) des deux membres de la formule (7.6), il suffit d'établir sa validité pour les polynômes et les fonctions

$$g_{z,n} : \lambda \longmapsto (\lambda - z)^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, z \notin \sigma(x).$$

Pour les polynômes, la formule (7.6) découle immédiatement du corollaire 7.2.1 et du théorème de Cauchy version vectorielle (voir théorème B.3.3). Il reste donc à montrer que, pour  $z \notin \sigma(x)$ , pour  $n \geq 0$ , on a

$$I_n(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-n} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (x - ze)^{-n}. \quad (7.7)$$

Nous allons montrer la formule (7.7) par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , la formule (7.7) correspond à la formule pour les polynômes avec  $p(X) = 1$ . Supposons la formule vraie au rang  $n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . Rappelons (voir (6.5)) que pour  $\lambda, z \notin \sigma(x)$ , on a

$$(\lambda e - x)^{-1} = (ze - x)^{-1} + (z - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(ze - x)^{-1}.$$

En utilisant cette équation et la proposition B.2.1, on obtient que

$$I_{n+1}(z) = \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-(n+1)} d\lambda \right) (ze-x)^{-1} - \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-n} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right) (ze-x)^{-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-n} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (x - ze)^{-n}.$$

De plus, comme  $\Gamma$  entoure  $\sigma(x)$  dans l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ , on a  $n(\Gamma, z) = 0$ , ce qui implique que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-(n+1)} d\lambda = 0.$$

Avec ces deux équations, on obtient alors

$$I_{n+1}(z) = -(x - ze)^{-n} (ze - x)^{-1} = (x - ze)^{-(n+1)} = g_{z,n+1}(x).$$

Par récurrence, la formule (7.7) est donc démontrée pour les fonctions  $g_{z,n}$ ,  $n \geq 0$ , ce qui achève la preuve de la proposition. □

## 7.2.2 Définition du calcul fonctionnel de Dunford-Schwarz

En vertu de la proposition 7.2.1, il est naturel de poser la définition suivante.

**Définition 7.2.1** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire,  $x \in \mathcal{A}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant le spectre de  $x$ . Pour  $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$  et  $\Gamma$  un système de courbes fermées, de classe  $C^1$  par morceaux qui entoure  $\sigma(x)$  dans  $\Omega$ , on pose*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) (ze - x)^{-1} dz. \quad (7.8)$$

**Remarque 7.2.1** *La formule (7.8) définit bien un élément de  $\mathcal{A}$  qui ne dépend pas du choix de  $\Gamma$  d'après le théorème de Cauchy version vectorielle (voir théorème B.3.3).*



### 7.2.3 Propriétés du calcul fonctionnel de Dunford-Schwarz

Le théorème suivant résume l'essentiel des propriétés du calcul fonctionnel holomorphe.

**Théorème 7.2.1** *Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire,  $x \in \mathcal{A}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant le spectre de  $x$ . Considérons*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{H}ol(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Alors

- a)  $\psi$  est un morphisme d'algèbres unitaires.
- b)  $\psi$  est continue, si on munit  $\mathcal{H}ol(\Omega)$  de la topologie de la convergence uniforme tout compact. Autrement dit, si  $f_n, f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$  et  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact de  $\Omega$ , alors  $f_n(x)$  tend vers  $f(x)$ , si  $n \rightarrow +\infty$ .
- c) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ , on a

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

- d) Soit  $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ,  $\mathcal{U}$  un ouvert contenant  $f(\sigma(x))$  et  $g \in \mathcal{H}ol(\mathcal{U})$ . Alors

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Preuve :**

- a) • la linéarité de  $\psi$  ne pose pas de problème et est laissé en exercice.
- Montrons que, pour  $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ , on a  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , notons

$$\Omega_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma(x)) < \varepsilon\}.$$

Comme  $\sigma(x)$  est un compact contenu dans l'ouvert  $\Omega$ , il existe  $\varepsilon > 0$  (suffisamment petit) pour que  $\overline{\Omega_\varepsilon}$  soit contenu dans  $\Omega$ . D'après la proposition B.1.2, on peut alors choisir deux systèmes de courbes fermées  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ , de classe  $C^1$  par

morceaux telles que  $\Gamma$  entoure le compact  $\sigma(x)$  dans  $\Omega_\varepsilon$  et  $\Gamma_1$  entoure le compact  $\overline{\Omega_\varepsilon}$  dans  $\Omega$ . Pour  $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ , on peut alors écrire, par définition, que

$$(fg)(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Mais la formule de Cauchy version scalaire (voir proposition B.1.4) implique que, pour  $\lambda \in \Gamma^*$ , on a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - \lambda} d\omega.$$

D'où

$$(fg)(x) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - \lambda} d\omega \right) g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

En utilisant l'équation de la résolvante (voir (6.5))

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\omega e - x)^{-1} + (\omega - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\omega e - x)^{-1}$$

on obtient que  $(fg)(x) = I_1 + I_2$ , avec

$$I_1 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)g(\lambda)}{\omega - \lambda} (\omega e - x)^{-1} d\omega d\lambda,$$

et

$$I_2 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_1} f(\omega)g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\omega e - x)^{-1} d\omega d\lambda,$$

On a facilement que

$$I_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} f(\omega)(\omega e - x)^{-1} d\omega \right) g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = f(x)g(x).$$

D'autre part, en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$I_1 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \left( \int_{\Gamma} \frac{g(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right) f(\omega)(\omega e - x)^{-1} d\omega.$$

Or pour tout  $\omega \in \Gamma_1^*$ , on a  $n(\Gamma, \omega) = 0$ , donc

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda = 0, \quad \forall \omega \in \Gamma_1^*.$$

On en déduit donc que  $I_1 = 0$ . Ainsi  $(fg)(x) = I_1 = f(x)g(x)$ .

- Montrons que  $\psi(1) = e$ . D'après le lemme 7.2.1, on a

$$\psi(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = e.$$

Ceci achève de prouver que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres unitaires.

b) soit  $\Gamma$  un système de courbes fermées, de classe  $C^1$  par morceaux qui entoure  $\sigma(x)$  dans  $\Omega$ . Alors, par définition, on a

$$\psi(f) = f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z)(ze - x)^{-1} dz.$$

Comme  $\Gamma^*$  est un compact contenu dans  $\rho(x)$ , on a

$$M(\Gamma) := \sup_{z \in \Gamma^*} \|(ze - x)^{-1}\| < +\infty.$$

Si on note alors par  $l_{\Gamma} := \int_{\Gamma} |dz|$  la longueur de  $\Gamma$ , on obtient que, pour  $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ , on a

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| \|(ze - x)^{-1}\| |dz| \leq \frac{M(\Gamma)l_{\Gamma}}{2\pi} \sup_{z \in \Gamma^*} |f(z)|.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \leq \frac{M(\Gamma)l_{\Gamma}}{2\pi} \sup_{z \in \Gamma^*} |f_n(z) - f(z)|.$$

Comme  $\Gamma^*$  est un compact de  $\Omega$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Gamma^*} |f_n(z) - f(z)| = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

- c) • montrons que  $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$ .

Soit  $\lambda \in \sigma(x)$ . Alors, la théorie des fonctions holomorphes implique qu'il existe  $g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$  telle que

$$f(z) - f(\lambda) = (z - \lambda)g(z), \quad z \in \Omega.$$

D'où, en appliquant le morphisme  $\psi$ , on a

$$f(x) - f(\lambda)e = (x - \lambda e)g(x) = g(x)(x - \lambda e).$$

Comme  $\lambda \in \sigma(x)$ , on a  $x - \lambda e$  non inversible et donc  $f(x) - f(\lambda)e$  non inversible aussi. Autrement dit, on a  $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$ .

- réciproquement, montrons que  $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$ .

Soit  $\lambda \notin f(\sigma(x))$ . Cela signifie que la fonction  $f - \lambda$  ne s'annule pas sur  $\sigma(x)$ . Puisque  $f$  est continue, il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $\sigma(x)$  et contenu dans  $\Omega$  telle que la fonction  $f - \lambda$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{U}$ . Notons

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \lambda}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Alors  $g \in \mathcal{H}ol(\mathcal{U})$ . D'après les propriétés du calcul fonctionnel holomorphe (relativement à l'ouvert  $\mathcal{U}$ ), comme  $(f - \lambda)g \equiv 1$  sur  $\mathcal{U}$ , on a

$$e = ((f - \lambda)g)(x) = (f(x) - \lambda e)g(x) = g(x)(f(x) - \lambda e).$$

Ceci entraîne que  $f(x) - \lambda e \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ , soit  $\lambda \notin \sigma(f(x))$ . Par contraposée, on obtient donc le résultat.

d) considérons  $\Omega_0 = f^{-1}(\mathcal{U})$ . Il est clair que  $\Omega_0$  est un ouvert qui contient  $\sigma(x)$  et on a  $g \circ f \in \mathcal{H}ol(\Omega_0)$ . Par conséquent,  $(g \circ f)(x)$  a bien un sens. D'autre part, comme par hypothèse  $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subset \mathcal{U}$ ,  $g(f(x))$  a aussi un sens.

Comme  $f(\sigma(x))$  est un compact contenu dans l'ouvert  $\mathcal{U}$ , il existe un ouvert  $V$  relativement compact tel que  $f(\sigma(x)) \subset V \subset \overline{V} \subset \mathcal{U}$ . On choisit alors un système de courbes fermées  $\Gamma_1$  de classe  $C^1$  par morceaux et qui entoure  $\overline{V}$  dans  $\mathcal{U}$ . Autrement dit, on a  $\Gamma_1^* \subset \mathcal{U} \setminus \overline{V}$  et

$$n(\Gamma_1, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \overline{V} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}. \end{cases}$$

Ainsi, on a  $\sigma(x) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) = \Omega_0$ . Donc  $W := f^{-1}(V)$  est un ouvert qui contient  $\sigma(x)$  et on a

$$n(\Gamma_1, f(\lambda)) = 1, \quad \lambda \in W.$$

Fixons alors un contour  $\Gamma_0$  qui entoure  $\sigma(x)$  dans  $W$ . Soit  $\zeta \in \Gamma_1^*$  et posons

$$\varphi_\zeta(z) := \frac{1}{\zeta - f(z)}, \quad z \in W.$$

Alors  $\varphi_\zeta \in \mathcal{H}ol(W)$  et par définition du calcul fonctionnel holomorphe, on a

$$\varphi_\zeta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi_\zeta(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda. \quad (7.9)$$

Comme  $\Gamma_1$  entoure  $\sigma(f(x))$  dans  $\mathcal{U}$ , on a (encore par définition du calcul fonctionnel holomorphe)

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)(\zeta e - f(x))^{-1} d\zeta.$$

En utilisant a), on voit que  $(\zeta e - f(x))^{-1} = \varphi_\zeta(x)$  et avec (7.9), on obtient que

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi_\zeta(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right) d\zeta.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on en déduit alors que

$$g(f(x)) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_0} \left( \int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)} d\zeta \right) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Or comme  $n(\Gamma_1, f(\lambda)) = 1, \forall \lambda \in \Gamma_0$ , on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)} d\zeta = g(f(\lambda)),$$

d'où

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (g \circ f)(x).$$

□

## 7.3 Exercices

**Exercice 7.3.1** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre unitaire et  $x \in \mathcal{A}$ . On suppose qu'il existe un polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $p(x) = 0_{\mathcal{A}}$ . Montrer que  $\sigma(x)$  est contenu dans l'ensemble des zéros de  $p$ .

Application : que peut-on dire du spectre d'un élément idempotent (i.e.  $x^2 = x$ ) ?

**Exercice 7.3.2** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire. On suppose qu'il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $\sigma(a)$  est non connexe. Montrer qu'il existe un élément idempotent dans  $\mathcal{A}$  non-trivial (i.e. un élément  $p \in \mathcal{A}$  tel que  $p^2 = p$ ,  $p \neq 0$ ,  $p \neq e$ ).

**Exercice 7.3.3** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire et  $x \in \mathcal{A}$ . On suppose que le spectre de  $x$  ne sépare pas  $0$  de  $\infty$ . Montrer que

- a)  $x$  admet des racines de tous les ordres dans  $\mathcal{A}$ .
- b)  $x$  admet un logarithme dans  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 7.3.4** Soient  $X$  un espace de Banach et  $A, B, T \in \mathcal{L}(X)$ . On suppose que

$$BT = TA.$$

Montrer que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}(\sigma(A) \cup \sigma(B))$ , alors

$$f(B)T = Tf(A).$$

Supposons en plus que  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ . En déduire alors que  $T = 0$ .

**Exercice 7.3.5** Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant  $\sigma(T)$  et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Montrer que

$$f(T)^* = \tilde{f}(T^*),$$

où  $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ .

**Exercice 7.3.6** Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire et commutative,  $I$  un idéal de  $\mathcal{A}$ ,  $a \in I$ ,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  qui contient  $\sigma(a)$  et  $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ . On suppose que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f(a) \in I$ .