Chapter 3

Les espaces L^p

3.1 Définition, inégalités de Hölder et de Minkowski

Les résultats sont formulés pour un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ quelconque, mais nous sommes principalement intéressés par le cas où Ω est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ (munie de la tribu des boréliens) et la mesure est la mesure de Lebesgue, ou, dans le cas où Ω est discret, avec la mesure discrète.

Pour éviter des cas exceptionnels, nous étendons quelques opérations arithmétiques habituelles de $[0,\infty[$ à $[0,\infty]$ de la façon naturelle. Donc $a+\infty=\infty$ pour tout $a \in [0,\infty]$, $\infty^p = \infty$ pour $0<p<\infty$, et ainsi de suite.

Définition 3.1.1. On pose, pour $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \|f\|_p < \infty\},$$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose également

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } \|f\|_\infty < \infty\},$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 \colon |f(x)| \leq M \ \mu\text{-presque partout}\}.$$

Il est facile à vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et f mesurable : $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, où nous convenons que $0 \cdot \infty = 0$. En particulier :

Lemme 3.1.2. *Les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ sont des $\mathbb{C}$-e.v.*

Même si Ω est un espace topologique compact, $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ est différent de $C(\Omega,\mathbb{C})$ car les fonctions du premier ne sont pas forcément continues. La définition a un sens même pour $p > 0$, mais ce qui suit seulement si $p \geq 1$. On va donc toujours supposer $p \geq 1$.

Si $p \in [1,\infty]$ on pose $q \in [1,\infty]$ t.q. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$: si $p = 1$ alors $q = \infty$, si $p = \infty$ alors $q = 1$, et sinon : $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$. On dit que p, q sont des *exposants conjugués*. Quelques identités pratiques pour les exposants conjugués quand $p, q > 1$:

$$p + q = pq \qquad p - 1 = \frac{p}{q}.$$

Lemme 3.1.3 (Inégalité de Young)**.** *Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proof. Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est facile, donc on peut supposer que $a, b > 0$.
Méthode I (rapide) : la fonction $\exp$ est convexe, ce qui veut dire que pour tous x, y et pour tout $\lambda \in [0,1]$ nous avons $\exp(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1-\lambda)\exp(y)$. En particulier :

$$\begin{aligned} ab = \exp(\ln(ab)) &= \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

Méthode II (plus élémentaire) : Nous observons que $q - 1 = \frac{q}{p}$. Posons $f(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at$. Alors $f'(t) = t^{q-1} - a = t^{\frac{q}{p}} - a$ et $f''(t) = \frac{q}{p}t^{\frac{q}{p}-1}$. L'unique point critique de f pour $0 < t$ est $t_0 = a^{\frac{p}{q}}$. Un calcul montre que $f(t_0) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^{\frac{p}{p}+\frac{p}{q}} = a^p - a^p = 0$ et $f''(t_0) > 0$, donc $f(t_0) = 0$ est le minimum de f pour $0 < t$. On en déduit que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous a, b, et qu'on a égalité si et seulement si $b = a^{\frac{p}{q}}$, ou encore, si et seulement si $a^p = b^q$. $\blacksquare_{3.1.3}$

Lemme 3.1.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Pour f, g mesurables :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proof. Si $p = 1$ et $q = \infty$ nous avons

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int |f||g|\,d\mu \leq \int |f|\|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \int |f|\,d\mu \\ &= \|f\|_1\|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le cas $p = \infty$, $q = 1$ est similaire. Autrement, nous avons $1 < p, q < \infty$ et nous pouvons appliquer l'inégalité de Young. On suppose d'abord que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$:

$$\begin{aligned}\|fg\|_1 &= \int |f||g|\,d\mu \le \int \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}\right) d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q\,d\mu = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas général. Si $\|f\|_p = 0$ c'est que $f = 0$ presque partout, d'où $\int |fg|\,d\mu = 0$ et on peut conclure. Même argument si $\|g\|_q = 0$, donc on peut supposer que $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$. Dans ce cas, si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_q = \infty$ alors $\|f\|_p\|g\|_q = \infty$, et c'est bon aussi. Reste le cas $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$. Alors $\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p} = 1$, $\left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q = 1$ et :

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_q \left\|\frac{f}{\|f\|_p}\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_1 \le \|f\|_p\|g\|_q \cdot 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

■3.1.4

Corollaire 3.1.5. *Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.*

Lemme 3.1.6 (Inégalité de Hölder iterée)**.** *Soit $p_1, \cdots, p_n \in [1, \infty]$ tel que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Alors pour f_i mesurable*

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_1 \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Proof. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est que $p_1 = 1$, et pour $n = 2$ c'est l'inégalité de Hölder. Supposons pour n, donc, et démontrons pour $n + 1$. Nécessairement il existe i tel que $p_i > 1$, sinon $\sum_{i=1} n + 1\frac{1}{p_i} = n + 1 > 1$. On peut supposer donc que $p_{n+1} > 1$. Nous posons

$$r = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}}\right)^{-1},$$

ce qui donne

$$1 \le r < \infty, \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{p_{n+1}} = 1, \quad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i/r} = r\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = r\frac{1}{r} = 1.$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}|f_i|^r\right\|_1 \leq \prod_{i=1}^{n}\left\||f_i|^r\right\|_{p_i/r}.$$

Nous observons maintenant que pour toute fonction g et tout $p \in [1, \infty[$:

$$\left\||g|^r\right\|_p = \|g\|_{pr}^r,$$

d'où

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_r^r \leq \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}^r, \qquad \text{ou encore} \qquad \left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_r \leq \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}.$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité de Hölder à $\prod_{i=1}^{n} f_i$, f_{n+1} et à $\frac{1}{r} + \frac{1}{p_{n+1}} = 1$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\left\|\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right\|_1 &= \left\|\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)\cdot f_{n+1}\right\|_1 \\
&\leq \left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_r \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \\
&\leq \left(\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}\right)\cdot\|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1}\|f_i\|_{p_i},
\end{aligned}$$

et la preuve est complète. $\blacksquare_{3.1.6}$

Corollaire 3.1.7 (Inégalité de Schwarz)**.**

$$\left|\int_\Omega f g \, d\mu\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Lemme 3.1.8 (Inégalité de Minkowski)**.** *Pour f, g mesurables*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{3.1}$$

Proof. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont faciles. On peux donc supposer que $1 < p < \infty$. Soit $1 < q < \infty$ l'exposant conjugué de p. Si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_p = \infty$ alors $\|f\|_p + \|g\|_p = \infty$. Également, si $\|f+g\|_p = 0$, il n'y a rien à démontrer. On peut supposer donc que

$0 < \|f+g\|_p$ et $\|f\|_p, \|g\|_\infty < \infty$. Démontrons d'abord que $0 < \|f+g\|_p < \infty$. En effet, pour tous $a, b \geq 0$ nous avons $(a+b)^p \leq (2a)^p + (2b)^p$, si bien que

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu \leq \int (|f|+|g|)^p \, d\mu \\ &\leq \int \left[(2|f|)^p + (2|g|)^p\right] d\mu = 2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Multipliant (3.1) par $\|f+g\|_p^{p-1}$, il suffirait donc de démontrer que

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Or, par Hölder :

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &= \big\||f||f+g|^{p-1}\big\|_1 + \big\||g||f+g|^{p-1}\big\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q + \|g\|_p \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q \\ &= (\|f\|_p\| + \|g\|_p)\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q.\end{aligned}$$

Pour conclure, nous nous rappelons que $p-1 = \frac{p}{q}$, d'où :

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^{p-1} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} &= \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} \\ &= \left(\int |f+g|^{\frac{p}{q}\cdot q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \big\||f+g|^{\frac{p}{q}}\big\|_q. = \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q.\end{aligned}$$

$\blacksquare_{3.1.8}$

Théorème 3.1.9. *Soit $p \in [1, \infty]$. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ une seminorme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Le quotient*

$$L^p(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)/\mathcal{N}$$

($\mathcal{N}$ est le sous-espace des fonctions qui s'annulent sur le complément d'un ensemble de mesure nulle) est un espace normé pour la norme $\|\cdot\|_p$.

$L^p(\Omega, \mu)$ est appelé l'espace des fonctions L^p sur Ω, bien que ses éléments soient des classes d'équivalence des fonctions. On a l'habitude de dire qu'un élément de $L^p(\Omega, \mu)$ est une fonction, bien que strictement il s'agisse d'une classe de fonctions. En particulier, dire pour $f \in L^p(\Omega, \mu)$ que $f(x) \in Y$ pour une partie $Y \subset \mathbb{C}$ n'a pas de sens pour une mesure qui donne mesure 0 aux points. Par contre, $f(x) \in Y$ μ-p.t.$x \in \Omega$ a un sens (μ-p.t.$x \in \Omega$ veut dire : pour tout $x \in \Omega$ à l'exception d'un ensemble de mesure 0).

Nous concluons avec un résultat qui est, en quelque sorte, la réciproque de l'inégalité de Hölder.

Lemme 3.1.10. *Soit $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert et soit $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ mesurable. Supposons en outre qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que*

$$\int |fg|\,d\mu \leq C\|g\|_q \qquad \forall g \in L^q(\Omega),$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue. Alors $f \in L^p(\Omega)$ (où p et q sont conjugués) et $\|f\|_p \leq C$.

Proof. Quitte à remplacer f par $|f|$ nous pouvons supposer que f est positive. Considérons d'abord les cas spéciaux où $p = 1$ ou $p = \infty$. Si $p = 1$ et $q = \infty$, le résultat est immédiat en prenant $g = 1$ (la fonction constante). Si $p = \infty$ et $q = 1$, nous raisonnons par l'absurde. Supposons, en effet, que $\|f\|_\infty > C$, et posons $X = \{x \in \Omega\colon f(x) \geq \frac{\|f\|_\infty + C}{2}\}$. Alors $\mu(X) > 0$, et il existe un sous-ensemble $Y \subseteq X$ mesurable tel que $0 < \mu(Y) < \infty$. Prenons $g = \mathbf{1}_Y$. Nous obtenons

$$\tfrac{\|f\|_\infty + C}{2}\mu(Y) \leq \int fg\,d\mu \leq C\|g\|_1 = C\mu(Y),$$

une contradiction. Nous pouvons donc supposer que $1 < p, q < \infty$.

Pour $N \in \mathbf{N}$, posons $f_N(x) = \mathbf{1}_{[-N,N]^n} \cdot \min(f(x), N)$. Alors chaque f_N est positive mesurable, $f_N \nearrow f$, et $\|f_N\|_p < \infty$ quelque soit $p \in [1, \infty]$. Se rappelant que $p - 1 = \frac{p}{q}$, nous obtenons :

$$\|f_N\|_p^p = \int f_N^p d\mu \leq \int f f_N^{p-1} d\mu \leq C\|f_N^{p-1}\|_q = C\|f_N\|_p^{p-1}.$$

Si $f = 0$ il n'y rien à démontrer, nous supposons donc que $f \neq 0$. Donc, pour tout N assez grand nous avons $f_N \neq 0$. Nous pouvons donc diviser par $\|f_N\|_p^{p-1}$, d'où $\|f_N\|_p \leq C$. Comme $f_N \nearrow f$, nous obtenons $\|f\|_p \leq C$. ■3.1.10

3.2 Complétude des espaces L^p

Théorème 3.2.1 (Fischer Riesz – complétude de L^p)**.** *$L^p(\Omega, \mu)$ est un espace normé complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. De plus si $(f_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ qui converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_p$, alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ qui converge μ-presque partout vers f, c.-à.-d. μ-p.t. $x \in \Omega$: $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$.*

Proof. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega, \mu)$. Nous pouvons toujours passer à une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ telle que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < 2^{-k-1}$. Posons :

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Alors $\|g_k\|_p < 1$ pour tout k, $\{|g_k|^p\}$ est une suite croissante de fonctions positives qui tend vers $|g|^p$, d'où par convergence monotone : $\|g\|_p \leq 1$. En particulier on a $g(x) < \infty$ p.p. Cela veux dire que la série suivante converge absolument pour presque tout x, et l'on peut définir :

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(x).$$

Là où la série ne converge pas absolument (ensemble de mesure nulle) nous pouvons poser $f(x) = 0$. Donc $f_{n_k} \to f$ p.p. En particulier, f est mesurable en tant que limite p.p. de fonctions mesurables.

Il reste à montrer que $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et que $f = \lim_k f_{n_k} = \lim_n f_n$ en $\|\cdot\|_p$. En effet, $|f| \leq |f_{n_0}| + |g|$ d'où $\|f\|_p \leq \big\||f_{n_0}| + |g|\big\|_p \leq \|f_0\|_p + \|g\|_p < \infty$. Nous pouvons aussi poser :

$$g_k^\ell = \sum_{i=\ell}^{\ell+k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g^\ell = \sum_{i=\ell}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Alors $\|g_k^\ell\|_p < 2^{-\ell}$, d'où par convergence monotone $\|g^\ell\|_p \leq 2^{-\ell}$. Or, $|f - f_{n_\ell}| \leq g^\ell$, d'où

$$\|f - f_{n_\ell}\|_p \leq \|g^\ell\|_p \leq 2^{-\ell} \to_{\ell\to\infty} 0.$$

Nous avons démontré que $f_{n_k} \to f$ en $\|\cdot\|_p$. Comme $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy en $\|\cdot\|_p$, elle doit converger à la même limite. $\blacksquare_{3.2.1}$

Corollaire 3.2.2. *Si $(f_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ qui converge vers $f \in L^p(\Omega, \mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ et μ-p.t. $x \in \Omega$: $\lim_k f_{n_k}(x) = g(x)$ pour une fonction g, alors μ-p.t. $x \in \Omega$: $f(x) = g(x)$.*

Corollaire 3.2.3. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega, \mu)$ t.q. la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement dans la norme $\|\cdot\|_p$, c.-à.-d. $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. Alors la série converge dans $L^p(\Omega, \mu)$, c.-à.-d. il existe $f \in L^p(\Omega, \mu)$ t.q. $\lim_k \|f - \sum_{n=0}^{k} f_n\|_p = 0$.*

3.3 Densité des fonctions continues à support compact

Ici nous supposons que $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ est un ouvert, que l'on munit de la topologie usuelle, ainsi que de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue induites de $\mathbf{R}^n$.

Définition 3.3.1. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ est *à support compact* s'il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que f vaut zéro sur $\Omega \setminus K$. Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω :

$$C_c(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbf{C}\colon f \text{ est continue et à support compact}\}.$$

Nous appelons le *support* de f dans Ω l'ensemble

$$\operatorname{supp}_\Omega(f) = \overline{\{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega,$$

où l'adhérence est relative à la topologie de Ω. Alors f est à support compact précisément quand $\operatorname{supp}_\Omega(f)$ est compact (pourquoi ?)

Lemme 3.3.2. *L'espace $C_c(\Omega)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.*

Proof. Soient $f, g \in C_c(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors $f + g$ et λf sont des fonctions continues. Pour voir qu'elles sont à support compact nous vérifions aisément que :

$$\operatorname{supp}_\Omega(\lambda f) = \begin{cases} \operatorname{supp}_\Omega(f) & \lambda \neq 0 \\ \varnothing & \lambda = 0, \end{cases}$$
$$\operatorname{supp}_\Omega(f+g) \subseteq \operatorname{supp}_\Omega(f) \cup \operatorname{supp}_\Omega(g).$$

Pour $f + g$ nous utilisons aussi le fait que la réunion de deux compacts est un compact.

$\blacksquare_{3.3.2}$

Lemme 3.3.3. *Pour tout $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ouvert et tout $p \in [1, \infty]$,*

(i) *Toute fonction continue à support compact appartient à $L^p(\Omega)$, et pour $p = \infty$ nous avons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.*

(ii) *Si deux fonctions $f, g \in C_c(\Omega)$ sont égales p.p. alors elles sont égales.*

En conséquence, nous pouvons identifier l'espace $C_c(\Omega)$ avec un sous espace vectoriel de $L^p(\Omega)$.

Proof. Soit $f \in C_c(\Omega)$. Il existe donc un compact $K \subseteq \Omega$ tel que f est nulle hors de K. Comme f est continue et K compact, f est bornée sur K, et nous pouvons poser

$$M = \sup_{x\in K} |f(x)| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Il est clair que M est une borne presque partout pour f, d'où $\|f\|_\infty \leq M$. Soit M' une autre borne presque partout pour f, donc $\mu(U) = 0$ où $U = \{x \in \Omega \colon |f|(x) > M'\}$. Comme f est continue, U est ouvert de Ω et donc de $\mathbf{R}^n$. Or, un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ a mesure de Lebesgue non nulle, d'où $U = \varnothing$. En d'autres mots $M' \geq |f(x)|$ pour tout x, ou encore, $M' \geq M$. On a démontré que M est la plus petit borne presque partout pour f, c.à.d.:

$$\|f\|_\infty = M = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

En particulier, $f \in L^\infty(\Omega)$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on rappelle également que comme K est compact, il est borné, donc $\mu(K)$ est fini et

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_K |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|f\|_\infty^p \mu(K)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \mu(K)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

d'où $f \in L^p(\Omega)$. On a donc démontré la première affirmation.

Pour la deuxième, il suffit de montrer que si $f(x) = 0$ presque partout alors $f = 0$. En effet, l'ensemble $U = \{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de Ω et donc de $\mathbf{R}^n$. Comme avant, si $\mu(U) = 0$ c'est que $U = \varnothing$, i.e., $f = 0$. $\blacksquare_{3.3.3}$

Avant de démontrer le théorème de Lusin on a besoin de 4 résultats, dont 3 rappels.

Fait 3.3.4 (Régularité de la mesure de Lebesgue – cours d'intégration)**.** *Soit $B \subseteq \mathbf{R}^n$ mesurable de mesure finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subseteq \mathbf{R}^n$ et un ouvert $U \subseteq \mathbf{R}^n$ tels que*

$$K \subseteq B \subseteq U \qquad \textit{et} \qquad \mu(U \setminus B), \mu(B \setminus K) < \varepsilon.$$

Si $B \subseteq \Omega$ où $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ est un ouvert alors on peut remplacer U par $\Omega \cap U$, et obtenir en plus $U \subseteq \Omega$.

Fait 3.3.5 (Le lemme d'Urysohn – cours de topologie)**.** *Soit $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ouvert et $K \subseteq U$ compact. Alors il existe une fonction continue $f \colon \mathbf{R}^n \to [0,1]$ qui vaut 1 sur K et 0 en dehors de U.*

Fait 3.3.6 (Topologie - tout compact admet un voisinage compact)**.** *Soit $K \subseteq U \subseteq \mathbf{R}^n$, où K est compact et U ouvert. Alors il existe un ouvert V tel que $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$, et $\bar{V}$ est compact.*

Lemme 3.3.7. *Soit $f \colon \Omega \to [0,1]$ mesurable. Alors il existe une suite d'ensembles mesurables A_n tels que $f = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \mathbf{1}_{A_n}$.*

Proof. Nous définissons pour chaque $n \geq 1$:

$$g_0(x) = 0, \qquad g_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} \mathbf{1}_{A_i}(x),$$
$$A_n = \left\{x \colon f(x) \geq g_{n-1}(x) + 2^{-n}\right\}.$$

Autrement dit, $g_n(x) = g_{n-1}(x) + 2^{-n}\mathbf{1}_{A_n}(x)$. Nous prétendons que $g_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + 2^{-n}$ pour tout x et n. En effet, pour $n = 0$ c'est vrai car $0 \leq f(x) \leq 1$. Si on suppose pour $n-1$, alors $g_{n-1}(x) \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + 2^{-n+1} = g_{n-1}(x) + 2 \cdot 2^{-n}$. Dans le cas où $g_{n-1}(x) \leq f(x) < g_{n-1}(x) + 2^{-n}$ (donc $x \notin A_n$ et $g_n(x) = g_{n-1}(x)$) comme dans le cas où $g_{n-1}(x) + 2^{-n} \leq f(x) \leq g_{n-1}(x) + 2^{-n} + 2^{-n}$ (ici $x \in A_n$ et $g_n(x) = g_{n-1}(x) + 2^{-n}$) nous avons $g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + 2^{-n}$.

Par conséquent $f = \lim_n g_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{A_n}$. $\blacksquare_{3.3.7}$

Théorème 3.3.8 (Lusin)**.** *Soient $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable telle que $\mu\{x \colon f(x) \neq 0\} < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ tel que*

$$\mu(\{x \colon f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

En outre nous pouvons choisir g tel que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Proof. Posons $A = \{x \colon f(x) \neq 0\}$. Nous considérons d'abord un cas très particulier, et pas la suite nous enlèverons les hypothèses une par une.

Premier cas : $f \colon \Omega \to [0,1]$ et A est compact. D'après Fait 3.3.6 il existe un ouvert V tel que $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq \Omega$ et $\bar{V}$ est compact.

D'après le Lemme, f s'exprime de la forme $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{A_n}$, où les boréliens $A_n \subseteq \Omega$ sont mesurables. Si $x \in A_n$ alors $f(x) > 0$, donc $A_n \subseteq A \subseteq V$ pour tout n.

Puisque $\mu(A) < \infty$, nous avons aussi $\mu(A_n) < \infty$. D'après la régularité de la mesure, pour chaque n il existe un ouvert U_n et un compact K_n tels que $K_n \subseteq A_n \subseteq U_n$ et $\mu(U_n \smallsetminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Posons $V_n = V \cap U_n$. Alors V_n est ouvert, et puisqu'on a vu que $A_n \subseteq V$, c'est que $A_n \subseteq V_n$. En outre, $\mu(V_n \smallsetminus K_n) \leq \mu(U_n \smallsetminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$.

D'après le Lemme d'Urysohn, pour chaque n il existe une fonction continue $g_n \colon \Omega \to [0,1]$ qui vaut 1 sur K_n et 0 hors V_n. Nous posons $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n$, et prétendons que c'est la fonction recherchée.

Continue : puisque $\sum_{n=1}^{k} 2^{-n} g_n \to_{k \to \infty} g$ uniformément, et une limite uniforme de fonctions continues est continue.

À support compact : Si $g(x) \neq 0$ c'est que $g_n(x) \neq 0$ pour au moins un n, donc $x \in V_n \subseteq V \subseteq \bar{V}$. Or, $\bar{V}$ est compact.

Mesure de l'erreur $< \varepsilon$: Considérons $x \in \Omega$ et $n \geq 1$. Si $x \in K_n$, c'est que $x \in A_n$ et $g_n(x) = 1 = \mathbf{1}_{A_n}(x)$. Et si $x \notin V_n$, c'est que $x \notin A_n$ et $g_n(x) = 0 = \mathbf{1}_{A_n}(x)$. En d'autres mots, si $g_n(x) \neq \mathbf{1}_{A_n}(x)$ c'est que $x \in V_n \smallsetminus K_n$. Maintenant, rappelons-nous que $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n$ et $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{A_n}$. Donc, si $g(x) \neq f(x)$, c'est que $g_n(x) \neq \mathbf{1}_{A_n}(x)$ (et donc $x \in V_n \smallsetminus K_n$) pour au moins un n. Alors

$$\{x \in \Omega \colon f(x) \neq g(x)\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \smallsetminus K_n),$$

d'où

$$\mu\{x \in \Omega \colon f(x) \neq g(x)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \smallsetminus K_n) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ceci conclut le premier cas.

Second cas : $f\colon \Omega \to [0,1]$. (Mais A n'est pas nécessairement compact.) Puisque $\mu(A) < \infty$, d'après la régularité de la mesure, nous trouvons $K \subseteq A \subseteq U$ où U est ouvert, K compact et $\mu(U \setminus K) < \varepsilon/2$. Posons $h = f \cdot \mathbf{1}_K$. Alors $h\colon \Omega \to [0,1]$, et $\{x\colon h(x) \neq 0\} = K$, et c'est un compact. Donc h vérifie les hypothèses du premier cas, et il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ tel que $\mu\{x\colon h(x) \neq g(x)\} < \varepsilon/2$. Nous observons que si $f(x) \neq h(x)$ alors $f(x) \neq 0$. Comme $\mathbf{1}_K(x) = 0$, $x \in A \setminus K$. Alors :

$$\begin{aligned}\{x\colon f(x) \neq g(x)\} \subseteq& \{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup \{x\colon f(x) \neq h(x)\}\\ =&\{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup (A \setminus K),\end{aligned}$$

d'où

$$\mu(\{x\colon f(x) \neq g(x)\}) \leq \mu(\{x\colon h(x) \neq g(x)\}) + \mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Troisième cas : $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^{\geq 0}$. On considère la suite $B_n = \{x\colon f(x) \leq n\}$. C'est une suite croissante et $\bigcup B_n = A$, donc $\mu(B_n) \to \mu(A)$. Puisque $\mu(A) < \infty$, cela veut dire que pour N suffisamment grand, $\mu(B_N) > \mu(A) - \varepsilon/2$, i.e., que $\mu(A \setminus B_N) < \varepsilon/2$. Nous fixons un tel N, et posons $h = \frac{f \cdot \mathbf{1}_{B_N}}{N}$. Alors $h\colon \Omega \to [0,1]$, et d'après le cas précédent on trouve $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ tel que $\mu(\{x\colon h(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon/2$. Alors $Ng \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$, et si $f(x) \neq h(x)$, c'est que $x \in A \setminus B_N$. Comme dans le cas précédent :

$$\begin{aligned}\{x\colon f(x) \neq Ng(x)\} \subseteq& \{x\colon Nh(x) \neq Ng(x)\} \cup \{x\colon f(x) \neq Nh(x)\}\\ =&\{x\colon h(x) \neq g(x)\} \cup (A \setminus B_N),\end{aligned}$$

d'où

$$\mu(\{x\colon f(x) \neq g(x)\}) \leq \mu(\{x\colon h(x) \neq g(x)\}) + \mu(A \setminus B_n) < \varepsilon.$$

Quatrième cas : $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$. Posons $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$. Donc $f = f^+ - f^-$ et $f^\pm\colon \Omega \to \mathbf{R}^+$. D'après le cas précédent : il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ tels que

$$\mu\{x\colon f^+(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2, \qquad \mu\{x\colon f^-(x) \neq g_2(x)\} < \varepsilon/2,$$

d'où

$$\mu\{x\colon f(x) \neq (g_1 - g_2)(x)\} \leq \mu\{x\colon f^+(x) \neq g_1(x)\} < \varepsilon/2 + \mu\{x\colon f^-(x) \neq g_2(x)\} < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Cinquième cas : $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ (le cas général). Posons $f = f_r + if_i$, où f_r et f_i sont les parties réelle et imaginaire de f, respectivement. D'après le cas précédent : il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ tels que

$$\mu(\{x\colon f_r(x) \neq g_1(x)\}) < \varepsilon/2, \qquad \mu(\{x\colon f_i(x) \neq g_1(x)\}) < \varepsilon/2,$$

d'où

$$\mu(\{x\colon f(x) \neq (g_1 + ig_2)(x)\}) \leq \mu(\{x\colon f_r(x) \neq g_1(x)\}) + \mu(\{x\colon f_i(x) \neq g_2(x)\}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Il reste la partie « en outre. » Soit donc $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ comme dans les hypothèse, et g comme dans la conclusion. Si $\|f\|_\infty = \infty$ alors $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et c'est bon. Si $\|f\|_\infty = 0$ on remplace g par la fonction 0, et c'est encore bon. Supposons donc que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Nous définissions $\zeta\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par

$$\zeta(z) = \begin{cases} z & |z| \leq \|f\|_\infty \\ z\frac{\|f\|_\infty}{|z|} & |z| \geq \|f\|_\infty. \end{cases}$$

Nous remarquons que les deux définitions coïncident quand $|z| = \|f\|_\infty$. La fonction ζ est continue, donc $h = \zeta \circ g$ est continue également. Aussi, $h(x) \neq 0$ si est seulement si $g(x) \neq 0$, donc $\operatorname{supp} h = \operatorname{supp} g$ est compact, et $h \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$. En outre, $|\zeta(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout z, d'où $\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Pour conclure, nous observons que si $f(x) = g(x)$, alors $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ (en dehors d'un ensemble de mesure nulle, dont on peut faire abstraction) et donc $h(x) = g(x) = f(x)$. Ainsi :

$$\{x\colon f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x\colon f(x) \neq g(x)\},$$
$$\mu(\{x\colon f(x) \neq h(x)\}) \leq \mu(\{x\colon f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve. $\blacksquare_{3.3.8}$

Lemme 3.3.9. *Soit $E(\Omega)$ l'ensemble des fonctions étagées $s\colon \Omega \to \mathbf{C}$ tel que $\mu(\{x\colon s(x) \neq 0\}) < \infty$, à égalité presque partout près. Alors $E(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (mais non pour $p = \infty$).*

Proof. D'abord il est facile à vérifier que $E(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, et que c'est en outre un sous-$\mathbf{C}$-e.v., quelque soit p (laissé en exercice). Il nous faut démontrer que tout $f \in L^p(\Omega)$ appartient à l'adhérence de $E(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.

Nous considérons d'abord le cas où f est réelle positive : $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^+$. Dans ce case, on a déjà vu dans le cours d'intégration qu'il existe une suite croissante de fonctions positives $s_n \in E(\Omega)$ telles que $s_n(x) \to f(x)$ à chaque point x. Autrement dit, $|f(x) - s_n(x)| \to 0$. Or, $|f(x) - s_n(x)| = f(x) - s_n(x) \leq f(x)$, donc $|f(x) - s_n(x)|^p \leq f(x)^p$. Or, par hypothèse $\int f^p \, d\mu < \infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\|f - s_n\|_p^p = \int |f - s_n|^p \, d\mu \to \int 0 \, d\mu = 0,$$

i.e., $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Maintenant soit $f \in L^p(\Omega)$ quelconque. On peut donc l'exprimer comme

$$f = g^+ - g^- + i(h^+ - h^-),$$

où $g^\pm$ et $h^\pm$ dont réelles, positives. Nous trouvons dans $E(\Omega)$ des suites $s_{1,n} \to g^+$, $s_{2,n} \to g^-$, $s_{3,n} \to h^+$, $s_{4,n} \to h^-$. Posons $t_n = s_{1,n} - s_{2,n} + i(s_{3,n} - s_{4,n})$. Alors $t_n \in E(\Omega)$ et $t_n \to f$. $\blacksquare_{3.3.9}$

Théorème 3.3.10. *Pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ et tout $1 \leq p < \infty$ (mais non pour $p = \infty$!), l'ensemble $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

En d'autres mots, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g - f\|_p < \varepsilon$, ou encore, il existe une suite $\{f_n\}_n \subseteq C_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_p$.

Proof. Puisque $E(\Omega)$ est dense dans L^p, il suffit de montrer que pour toute fonction $s \in E(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ t.q. $\|g - s\|_p < \varepsilon$. Puisque s est étagée elle est bornée, et (par définition de $E(\Omega)$) $\mu(\{x\colon s(x) \neq 0\}) < \infty$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lusin : il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbf{C})$ telle que $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$ et

$$\mu(\{x\colon g(x) \neq s(x)\}) < \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int |g - s|^p \, d\mu &= \int_{\{x\colon g(x) \neq s(x)\}} |g - s|^p \, d\mu \\
&\leq \mu(\{x\colon g(x) \neq s(x)\}) \cdot \|g - s\|_\infty^p \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p (\|g\|_\infty + \|s\|_\infty)^p = \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Donc en effet, $\|g - s\|_p < \varepsilon$ et le théorème est démontré. $\blacksquare_{3.3.10}$

Pour voir les limites de ce résultat, considérons un ouvert non vide quelconque $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, et fixons $x \in \Omega$. Soit $r > 0$ assez petit pour que $B(x, 2r) \subseteq \Omega$, et posons $f = \mathbf{1}_{B(x,r)}$. Il est facile à voir que $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty]$. Nous prétendons que pour toute fonction continue $g\colon \Omega \to \mathbf{C}$ nous avons $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

En effet, soit $y \in \Omega$ tel que $d(x, y) = r$ (par exemple $y = x + (r, 0, \ldots, 0)$). Supposons d'abord que $|g(y)| < \frac{1}{2}$, et posons $U = \{z \in \Omega\colon |g(z)| < \frac{1}{2}\}$. Par continuité de g, $U \cap B(x, r)$ est un ouvert non vide dans lequel $f = 1$ et donc $|f - g| > \frac{1}{2}$, d'où $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. L'autre possibilité est que $|g(y)| \geq \frac{1}{2}$. Pour chaque n posons $V_n = \{z \in \Omega\colon |g(z)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\}$. Alors encore par continuité de g, $V_n \setminus \bar{B}(x, r)$ est un ouvert non vide sur lequel

$f = 0$ et donc $|f - g| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Nous obtenons que $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ pour tout n, donc $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

En particulier, $C_c(\Omega)$ n'est jamais dense dans $L^\infty(\Omega)$ (sauf si $\Omega = \varnothing$, que l'on exclut de toute façon).

Corollaire 3.3.11. *Pour tout ouvert non vide $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ et tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $\big(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ est un espace normé* incomplet.

Proof. Le fait que $\|\cdot\|_1$ soit une norme (et non une semi-norme) sur $C_c(\Omega)$ est une conséquence du fait que $C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ (cf. Lemme 3.3.3). Si cette norme était complète on aurait par densité $C_c(\Omega) = L^p(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas : on vient juste de donner un exemple d'une fonction $f \in L^p(\Omega)$ qui n'est égale, ni même presque partout, à aucune fonction continue. $\blacksquare_{3.3.11}$

3.4 Convolution et inégalité de Young

Définition 3.4.1. Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables. On pose, formellement,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y)\, dy,$$

là où l'intégrale est définie, et nous appelons $f * g$ le *produit de convolution de* f et g.

Lemme 3.4.2 (Distributivité du produit de convolution). *Si $(f * g)(x)$ et $(f * h)(x)$ sont définis alors $(f * (g + h))(x) = (f * g)(x) + (f * h)(x)$.*

Proof. Immédiat. $\blacksquare_{3.4.2}$

Lemme 3.4.3 (Commutativité du produit de convolution). *Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, si $(f \star g)(x)$ est bien défini, alors $(g * f)(x)$ est aussi bien défini et nous avons $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.*

Proof. Immédiat d'après le Théorème de changement de variable. $\blacksquare_{3.4.3}$

Quand est-ce que la fonction $x \mapsto (f * g)(x)$ est bien définie? Réponse simple : si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ alors par l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

donc $f * g(x)$ existe, et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si, par contre, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors par le théorème de Fubini on a que $f * g(x)$ est défini pour presque tout x, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Ceux-ci sont des cas particuliers de l'inégalité de Young.

Lemme 3.4.4. *Soient $1 \leq p, q, r < \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|(f * g)(x) h(x)\big| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

En particulier, $(f * g)(x)$ est défini presque partout.

Proof. Il est facile à vérifier que si $|f| * |g|(x)$ existe (et est fini) alors $f * g(x)$ existe et $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$. Il suffirait donc de démontrer pour $|f|$, $|g|$ et $|h|$. Autrement dit, nous pouvons supposer que f, g et h sont des fonctions positives.

Tout d'abord, si $r = 1$ alors p et q sont des exposants conjugués. Il en découle que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x) dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_1.$$

Supposons maintenant que $p = 1$, donc q et r sont des exposants conjugués. Posons $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Alors $\|g\|_q = \|\tilde{g}\|_q$, et par le même raisonnement que tout à l'heure nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y) g(x - y) h(x) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y) \tilde{g}(y - x) h(x) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\tilde{g} * h)(y) \, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_q \|h\|_r. \end{aligned}$$

Comme $f * g = g * f$, cela recouvre aussi le cas où $q = 1$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que $1 < p, q, r < \infty$.

Soient p', q' et r' les exposants conjugués respectifs de p, q et r i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= f(x - y)^{\frac{p}{r'}} g(y)^{\frac{q}{r'}} \\ \beta(x, y) &= g(y)^{\frac{q}{p'}} h(x)^{\frac{r}{p'}} \\ \gamma(x, y) &= f(x - y)^{\frac{p}{q'}} h(x)^{\frac{r}{q'}} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha(x,y)^{r'} dxdy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-y)^p g(y)^q dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)dx \int_{\mathbb{R}^n} g^q(y)dy,$$

d'où

$$\|\alpha\|_{r'} = \|f\|_p{}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_q{}^{\frac{q}{r'}}.$$

Ou $\|\alpha\|_{r'}$ est la norme de $L^{r'}(\mathbf{R}^{2n})$. D'une manière similaire on obtient

$$\|\beta\|_{p'} = \|g\|_q{}^{\frac{q}{p'}} \|h\|_r{}^{\frac{r}{p'}}, \qquad \|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p{}^{\frac{p}{q'}} \|h\|_r{}^{\frac{r}{q'}}.$$

On vérifie en outre que $\frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$, d'où

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{q}.$$

On obtient :

$$\|\alpha\|_{r'}\|\beta\|_{p'}\|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r, \qquad (\alpha\beta\gamma)(x,y) = f(x-y)g(y)h(x).$$

En conclusion,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)\,dxdy = \|\alpha\beta\gamma\|_1 \leq^* \|\alpha\|_{r'}\|\beta\|_{p'}\|\|\gamma\|_{q'} = \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

Où $\leq^*$ découle de l'inégalité de Hölder itérée. ■3.4.4

Théorème 3.4.5 (Inégalité de Young). *Soient* $1 \leq p,q,r \leq \infty$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$*, et soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$*. Alors* $f*g$ *est défini presque partout, et appartient à* $L^r(\mathbf{R}^n)$*, avec*

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Proof. Si $r=1$ alors $p=q=1$ et le résultat est déjà connu. Si $r=\infty$ alors p et q sont conjugués et le résultat est déjà connu. Ceci est en particulier le cas si $p=\infty$ (ce qui entraîne $q=1$, $r=\infty$) ou $q=\infty$ (entraîne $p=1$ et $r=\infty$). Nous pouvons supposer donc que $1 \leq p,q < \infty$ et $1 < r \leq \infty$.

Soit $1 \leq r' < \infty$ l'exposant conjugué de r. Nous avons $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = 2$, et d'après le lemme précédent nous avons, pour tout $h \in L^{r'}(\mathbf{R}^n)$:

$$\int |(f*g)(x)h(x)|\,dx \leq \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}.$$

D'après le Lemme 3.1.10 il en découle que $f*g \in L^r(\mathbf{R}^n)$ et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$. ■3.4.5

Le produit de convolution peut aussi être défini sur $\mathbb{Z}^d$ avec la mesure discrète de poids 1 : pour $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} f(x-y)g(y),$$

s'il existe.

3.5 Densité des fonctions lisses

On se rappelle (cours de topologie) que si $X \subseteq \mathbf{R}^n$ et $f\colon X \to \mathbf{C}$ une fonction, alors

- f est dite *uniformément continue* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. La distance sur $\mathbf{R}^n$ est la distance euclidienne : $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$.
- Si X est compact et f est continue alors f est uniformément continue.

Lemme 3.5.1. *Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$. Alors f est uniformément continue.*

Proof. Puisque $\operatorname{supp} f$ est compact, il existe M tel que $\operatorname{supp} f \subseteq [-M, M]^n$. Alors f est continue, et donc uniformément continue, sur $[-M-1, M+1]^n$, qui est compact.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné. Il existe donc $\delta > 0$ t.q., si $x, y \in [-M-1, M+1]^n$ et $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $\delta > 1$, cela reste vrai aussi pour $\delta = 1$. Nous pouvons donc supposer que $0 < \delta \leq 1$. Il suffirait de montrer que pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nous considérons des cas. Si $x \in [-M, M]^n$ alors $y \in [-M-1, M+1]^n$ (car $\delta \leq 1$), d'où $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $y \in [-M, M]^n$, le même raisonnement marche. Reste le cas où $x, y \notin [-M, M]^n$, mais alors $|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. $\blacksquare_{3.5.1}$

Proposition 3.5.2. *Soit $f, j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}^n} j\, d\mu = 1$ et $j \geq 0$. Pose pour $\varepsilon > 0$*

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors $f * j_\varepsilon \to f$ simplement et en $\|\cdot\|_p$ pour tout $p \in [1, \infty[$. En outre, $f * j_\varepsilon$ a support compact.

Proof. Puisque $\operatorname{supp} j$ et $\operatorname{supp} f$ sont compacts, supposons que $\operatorname{supp} j, \operatorname{supp} f \subseteq [-M, M]^n$. Nous remarquons que :

(i) $\int j_\varepsilon = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(ii) $\|f * j_\varepsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

(iii) $\operatorname{supp} j_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon M, \varepsilon M]^n$,

(iv) $\operatorname{supp} f * j_\varepsilon \subseteq [-(1+\varepsilon)M, (1+\varepsilon)M]$. En particulier, si $\varepsilon < 1$ alors $\operatorname{supp} f * j_\varepsilon \subseteq [-2M, 2M]^n$, et de toute façon $f * j_\varepsilon$ est de support borné, donc compact.

Montrons d'abord la convergence simple. On se donne $r > 0$ très petit. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < r$. Pour tout $\varepsilon < \frac{\delta}{\sqrt{n}M}$, $x \in \mathbf{R}^n$ et $y \in [-\varepsilon M, \varepsilon M]^n$ nous avons alors

$$|y| \leq \sqrt{n}\varepsilon M < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x-y) - f(x)| < r,$$

d'où

$$\begin{aligned}
|f * j_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int f(x-y) j_\varepsilon(y)\, dy - \int f(x) j_\varepsilon(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int [f(x-y) - f(x)] j_\varepsilon(y)\, dy \right| \\
&\leq \int |f(x-y) - f(x)| j_\varepsilon(y)\, dy \\
&= \int_{[-\varepsilon M, \varepsilon M]^n} |f(x-y) - f(x)| j_\varepsilon(y)\, dy \\
&\leq \int_{[-\varepsilon M, \varepsilon M]^n} r j_\varepsilon(y)\, dy \\
&= r.
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $|f * j_\varepsilon(x) - f(x)| \to_{\varepsilon \to 0} 0$ quand $\varepsilon \to 0$, d'où la convergence simple. Pour $p \in [1, \infty[$ cela donne $|f * j_\varepsilon(x) - f(x)|^p \to_{\varepsilon \to 0} 0$. Posons maintenant $h = \mathbf{1}_{[-2M,2M]^n}(2\|f\|_\infty)^p$. Alors $\int h < \infty$, et dès que $\varepsilon < 1$, nous avons $|f * j_\varepsilon - f|^p \leq h$. D'après le Théorème de la Convergence Dominée :

$$\|f * j_\varepsilon - f\|_p^p = \int |f * j_\varepsilon - f|^p \to_{\varepsilon \to 0} 0,$$

d'où la convergence en norme $\|\cdot\|_p$. $\blacksquare_{3.5.2}$

Définition 3.5.3. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pose

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n} f(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est lisse si $D^\alpha f$ est continue pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On note $C^\infty(U)$ les fonctions lisses de $U \to \mathbb{C}$, $C_c(U)$ les fonctions continue à support compact et $C_c^\infty(U) = C_c(U) \cap C^\infty(U)$.

Fait 3.5.4. *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est lisse.*

Lemme 3.5.5. *Il existe une fonction* $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ *positive telle que* $\int j \, d\mu = 1$.

Proof. Nous observons que $x \mapsto |x|^2 = \sum x_i^2$ est lisse sur $\mathbf{R}^n$. Il en découle que

$$g(x) = f(1 - |x|^2) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \end{cases}$$

est lisse sur $\mathbf{R}^n$. Elle est positive et non nulle d'où $\int g > 0$. Aussi, $\operatorname{supp} g \subseteq [-1, 1]^n$ d'où $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\|g\|_1 < \infty$. Finalement $j = \frac{g}{\|g\|_1}$ est comme voulu. $\blacksquare_{3.5.5}$

Rappel (théorème de la valeur moyenne) : soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ t.q.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Lemme 3.5.6. *Soit* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, j *positive. Alors* $f \star j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *et*

$$D^\alpha(f * j) = f * D^\alpha j.$$

Si de plus $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$ *alors* $f * j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Proof. Pour voir que $D^\alpha(f * j) = f * D^\alpha j$ il suffit de montrer que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * j) = f * \frac{\partial}{\partial x_i} j$, le cas général en découle par récurrence. Aussi, il suffit de considérer le cas de x_1. Puisque $\frac{\partial}{\partial x_i} j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, c'est en particulier une fonction uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.... On se donne un $\varepsilon > 0$ très petit, et le $\delta > 0$ qui correspond.

Soit maintenant $v = (1, 0, \ldots 0) \in \mathbf{R}^n$. Posons $g_h(y) = \frac{j(y+hv) - j(y)}{h}$. Alors on calcule que :

$$\frac{f * j(x + hv) - f * j(x)}{h} = f * g_h(x).$$

D'après le théorème de la valeur moyenne, pour tout y il existe h' tq $|h'| < |h|$ et

$$g_h(y) = \frac{\partial}{\partial x_1} j(y + h'v).$$

Si en outre $|h| < \delta$, on obtient

$$\left| g_h(y) - \frac{\partial}{\partial x_1} j(y) \right| < \varepsilon.$$

Donc, pour $|h| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f * j(x+hv) - f * j(x)}{h} - f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x) \right| &= \left| f * g_h(x) - f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x) \right| \\
&= \left| \int f(x-y) \left(g_h(y) - \frac{\partial}{\partial x_1} j(y) \right) dy \right| \\
&\leq \int |f|(x-y)|\varepsilon \, dy \\
&\leq \varepsilon \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, ceci montre exactement que

$$\frac{f * j(x+hv) - f * j(x)}{h} \to_{h\to 0} f * \frac{\partial}{\partial x_1} j(x),$$

i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f * j = f * \frac{\partial}{\partial x_1} j. \qquad \blacksquare_{3.5.6}$$

Théorème 3.5.7 (Densité des fonctions lisses)**.** *Pour tout $p \in [1, \infty[$, le sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n) \subseteq L^p(\mathbf{R}^n)$ est dense (pour la norme $\| \cdot \|_p$).*

Proof. Puisque $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^n)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$ en $\| \cdot \|_p$.

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$ (donc en particulier, $f \in L^1(\mathbf{R})$). Soit aussi $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, positive, $\int j = 1$. Alors $f * j_\varepsilon \to_{\varepsilon \to 0} f$ en $\| \cdot \|_p$, et chaque $f * j_\varepsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$ de support compact. $\blacksquare_{3.5.7}$