Chapter 5

La transformation de Fourier

5.1 La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 5.1.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

où $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ dans une base orthonormale pour $\mathbb{R}^n$.

Lemme 5.1.2. *$\hat{f}(\xi)$ est défini pour tout ξ et $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$. En particulier, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Proof. Immédiat. $\blacksquare_{5.1.2}$

Théorème 5.1.3 (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, dite la transformation de Fourier, est linéaire et continue.*

Proof. La linéarité est immédiate. La continuité est une conséquence du théorème de continuité sous le signe de l'intégrale (Théorème 2.5.1) appliqué à la fonction $g(x, \xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)$. Nous avons donc $\hat{f} \in C(\mathbf{R}^n)$, et il reste à vérifier que $\hat{f}(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$.

Supposons d'abord que $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors f est intégrable, ainsi que ses dérivée partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Soit M assez grand pour que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-M, M]^n$. Autrement dit, f est nulle en dehors de $[-M, M]^n$, et par continuité, en dehors de $]-M, M[^n$. Fixons une direction j. Utilisant l'intégration par parties, nous calculons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,dx_j &= \int_{-M}^{M} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,dx_j \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi_j}\int_{-M}^{M} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx_j \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi_j}\left([e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)]_{x_j=-M}^{x_j=M} - \int_{-M}^{M} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i\xi_j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j,
\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left|\frac{1}{2\pi i\xi_j}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx\right| \leq \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_1}{2\pi\xi_j}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|\xi\|_\infty > \max_j \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_1}{2\pi}$ alors $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$.

Maintenant, traitons le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Par la densité des fonctions lisses à support compact il existe une fonction $g \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tell que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Il en découle que $|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ pour tout ξ. Par le paragraphe précédent, si $\|\xi\|_\infty$ est assez grand alors $|\hat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ et $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$. ■5.1.3

Exemple 5.1.4 (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On a

$$\mathcal{F}(e^{-a\pi|x|^2})(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2},$$

où $|x| = \|x\|_2$.

Proof. Nous admettons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1.$$

La théorie des fonctions à une variable complexe nous permet d'en déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ic)^2}\,dt = 1$$

pour $c \in \mathbf{R}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi(t+ic)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

pour $c \in \mathbf{R}$ et $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-a\pi|x|^2})(\xi) &= \int e^{-a\pi|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int e^{-a\pi\sum_j (x_j^2 + 2x_j \frac{i\xi_j}{a})}\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-a\pi\sum_j \left((x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2 + \frac{\xi_j^2}{a^2}\right)}\, dx \\
&= e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2} \int_{\mathbf{R}^n} \Big(\prod_j e^{-a\pi(x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2}\Big)\, dx \\
&= e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2} \prod_j \Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-a\pi(x_j+\frac{i\xi_j}{a})^2}\, dx_j\Big) \\
&= a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

■5.1.4

5.1.1 Transformation de Fourier et dérivation

Théorème 5.1.5. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $x \mapsto x_j f(x)$ est intégrable. Alors $\hat{f}$ est de classe C^1 et*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -2\pi i \mathcal{F}\big(x_j f(x)\big).$$

Proof. Posons $g(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)$, et calculons :

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_j} = -2\pi i x_j e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x).$$

Cette dérivée partielle est continue pour tout x et $\left|\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right| = 2\pi |x_j f(x)|$ est par hypothèse une fonction intégrable.

Les hypothèses du théorème de la dérivation sous le signe de l'intégrale (Théorème 2.5.2) sont donc vérifiées, et nous avons

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx = -2\pi i \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} x_j f(x)\, dx = -2\pi i \mathcal{F}(x_j f(x)). \quad ■_{5.1.5}$$

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ nous écrivons

$$|\alpha| = \sum \alpha_j, \qquad x^\alpha = \prod x_j^{\alpha_j},$$

et si f est de classe $C^{|\alpha|}$:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Corollaire 5.1.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction t.q. $x \mapsto (1+|x|)^k f(x)$ est intégrable. Alors $\hat{f}$ est de classe C^k et pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \le k$:*

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f) = \mathcal{F}\big((-2\pi i x)^\alpha f\big).$$

Théorème 5.1.7. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On suppose que f et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}$ sont intégrables. Alors*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Proof. Pour simplicité de notation nous considérons le cas $n = 1$. Fixons $M_1 < M_2$ réels positifs. Intégrant par parties :

$$\int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx = e^{-2\pi i M_2 \xi} f(M_2) - e^{-2\pi i M_1 \xi} f(M_1) + 2\pi i \xi \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx.$$

Comme f et $\frac{df}{dx}$ sont intégrables, on obtient (e.g., par convergence dominée)

$$\lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx,$$
$$\lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx.$$

Il en découle que $\lim_{M_1 \to -\infty} e^{-2\pi i M_1 \xi} f(M_1)$ existe, et comme f est intégrable l'unique limite possible est zéro. Par le même raisonnement $\lim_{M_2 \to \infty} e^{-2\pi i M_2 \xi} f(M_2) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi) &= \lim_{M_1 \to -\infty, M_2 \to \infty} \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} \frac{df}{dx}(x)\, dx \\ &= \lim_{M_1 \to -\infty, M_2 \to \infty} 2\pi i \xi \int_{M_1}^{M_2} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx \\ &= 2\pi i \xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

■5.1.7

Corollaire 5.1.8. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^k. On suppose que f et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont intégrables. Alors on a $|\xi|^k \hat{f}(\xi) \in C_0(\mathbf{R}^n)$, i.e.,*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\xi|^k \hat{f}(\xi) = 0,$$

et pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \le k$:

$$\mathcal{F}\big(D^\alpha f\big) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}.$$

5.1.2 Convolution sur L^1

D'après l'inégalité de Young (Théorème 3.4.5) le produit de convolution est bien défini sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

C'est un produit associatif et commutatif.

Théorème 5.1.9. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Proof. Par Fubini,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(f * g)(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(y)g(x-y)\, dxdy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} g(x-y)\, dx\right] e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\, dy \\
&= \hat{g}(\xi)\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\, dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

■5.1.9

5.1.3 Synthèse spectrale

La synthèse spectrale concerne l'inversion de la transformation de Fourier.

Théorème 5.1.10. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et aussi $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors p.p.*

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$$

où

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \overline{\mathcal{F}(\overline{g})} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Corollaire 5.1.11. *La transformation de Fourier est injective.*

Mais l'image de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas tout $C_0(\mathbb{R}^n)$.

5.2 La transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Le but est de restreindre la transformation de Fourier sur un domaine qu'elle préserve.

Définition 5.2.1. On appelle une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à *décroissance rapide*, si elle est de classe C^∞ et si pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^k$ et $\beta \in \mathbf{N}^m$:

$$x^\beta D^\alpha f(x) \in C_0(\mathbf{R}^n), \qquad \text{i.e.,} \qquad x^\beta D^\alpha f(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à décroissance rapide, elle est appelée la *classe de Schwartz*.

Lemme 5.2.2. *Pour tout $p \in [1, \infty[$,*

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1+t^2)^p}\, dt < \infty.$$

Lemme 5.2.3. *On a les inclusions*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n).$$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ (Théorème 3.5.7).

Lemme 5.2.4. *La classe de Schwartz est close par :*

(i) *Dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ou plus généralement, par D^α, $\alpha \in \mathbf{N}^k$.*

(ii) *Multiplication par x_i, ou plus généralement, par x^α.*

(iii) *Par conjugaison complexe.*

(iv) *Par la transformée de Fourier.*

Théorème 5.2.5. *La restriction de la transformation de Fourier à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{F} \colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \cong \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.*

5.3 La transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Le but est de prolonger la transformation de Fourier (ou plutôt sa restriction à $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$) à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 5.3.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une suite $(f_n)_n$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, t.q.*

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \quad \text{et} \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f.$$

Théorème 5.3.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a*

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi.$$

À compléter. On démontre d'abord pour $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

$$\begin{aligned}\int |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi &= \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi \\ &= \int \left[\int f(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, dx\right] \overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi \\ &= \dots\end{aligned}$$

Puisque $\hat{f}$ et f sont toute les deux dans L^1, $\int\int |f(x)||\hat{f}(\xi)|\, dxd\xi < \infty$. Par le théorème de Fubini, nous avons donc droit aux manipulations suivantes :

$$\begin{aligned}\dots &= \int\int f(x)\overline{\hat{f}(\xi)} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, dxd\xi \\ &= \int \left[\int \overline{\hat{f}(\xi)} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi\right] f(x)\, dx \\ &= \int \overline{\left[\int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi\right]} f(x)\, dx \\ &= \int \overline{\overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x)} f(x)\, dx \\ &= \int \overline{f(x)} f(x)\, dx = \int |f(x)|^2\, dx\end{aligned}$$

Puis on utilise le fait que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. $\blacksquare_{5.3.2}$

Théorème 5.3.3 (Plancherel)**.** *La restriction de la transformation du Fourier à $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ possède un unique prolongement continu*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

En outre, $\mathcal{P}$ est une isomorphisme isométrique, c'est-à-dire $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{P}^{-1}(f) = \overline{\mathcal{P}(\overline{f})}$.

$\mathcal{P}$ est appelé la transformation de Fourier-Plancherel.

Proposition 5.3.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Supposons que pour presque tout ξ*

$$\int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(\xi)$$

(ceci définit φ presque partout). Alors $\mathcal{P}(f) = \varphi$.

Chapter 6

Exercices

6.1 Autour du théorème de Stone-Weierstraß

Exercice 6.1.1. Soit X un espace métrique. Montrer que $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$.

Exercice 6.1.2. Soit X un espace métrique tel que $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$.
Que dire de X ?

Exercice 6.1.3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Déterminer $\mathcal{C}_0(E, \mathbb{R})$.

Exercice 6.1.4. Soit $a < b$ deux réels, et soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dense dans cette algèbre munie de la norme $\|.\|_\infty$. En déduire qu'il existe une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément sur $[a, b]$ et dont la limite uniforme n'est pas une fonction dérivable. Sauriez-vous en donner des exemples explicites ?

Exercice 6.1.5. (i) Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute fonction continue de X vers $\mathbb{R}$ est limite uniforme dans X d'une suite de fonctions polynomiales à n variables.

(ii) En déduire que toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions polynomiales à coefficients réels.

(iii) Ici on considère le cas particulier où $n = 1$ et où $X = [-1, 1]$. Peut-on déduire de ce qui précède que toute f continue sur $[-1, 1]$ est développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 6.1.6. On appelle polynômes trigonométriques les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ qui peuvent être écrites sous la forme :

$$x \mapsto \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k e^{ikx}, \qquad \text{pour un } m \in \mathbb{N} \text{ et des } \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

On note $\mathbb{T}$ le cercle $|z| = 1$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

(i) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{C}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=-m}^{m} \alpha_k z^k$ est dense dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{C}$.

(ii) Pour f continue de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(e^{ix})$. Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est une isométrie linéaire bijective de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{P}$.

(iii) Montrer que toute fonction de $\mathcal{P}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

(iv) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques à coefficients réels est dense dans l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(v) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}^+$ des fonctions de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{C}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k$ n'est **pas** dense dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{C}$.

Exercice 6.1.7. Soient $a < b$ deux réels. Pour $m \geq 0$, on définit $\mathcal{C}^m([a,b], \mathbb{R})$ comme l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme : $\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(m)}\|_\infty$. Montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cet espace, par récurrence sur l'entier m.

Exercice 6.1.8. (i) Montrer que la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'est pas limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes.

(ii) Montrer que toute fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de polynômes.

Exercice 6.1.9. Soient $a < b$ deux réels, et soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_a^b f(t) t^n \, dt = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\int_a^b [f(t)]^2 \, dt = 0$, puis que f est la fonction nulle.

Exercice 6.1.10. Soient $a < b$ deux réels. On note A l'ensemble des fonctions polynomiales réelles dont l'intégrale est nulle sur $[a, b]$. Décrire l'adhérence de A dans l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 6.1.11. Soit K un espace métrique compact et soit $a \in K$. Soit A une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ telle que pour tout $g \in A$, $g(a) = 0$. Décrire l'adhérence de A dans l'espace des fonctions continues de K vers $\mathbb{R}$.