Chapter 1

Fonctions continues

Les résultats de ce chapitre sont formulés pour des espaces métriques. Néanmoins ils restent vrais pour des espaces topologiques.

1.1 Convergence uniforme

Dans ce chapitre X désigne un espace métrique et K est le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On note $C(X,K)$ l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans K. On dit qu'une fonction $f \in C(X,K)$ s'annule à l'infini si X est compact ou si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $Y \subset X$ tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour $x \notin Y$. On note par $C_0(X,K)$ le sous-espace de $C(X,K)$ des fonctions qui s'annulent à l'infini. En particulier les fonctions de $C_0(X,K)$ sont bornées. On note aussi que, si X est compact, $C_0(X) = C(X)$.

Définition 1.1.1. On appelle

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

la *norme sup* ou *norme* ∞ de $f \in C_0(X,K)$. Une suite $(f_n)_n$ des fonctions de $C_0(X,K)$ converge *uniformément* vers une fonction $f : X \to K$ si la suite des nombres $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0 pour $n \to \infty$. On va utiliser les notations $f_n \xrightarrow{u} f$ ou $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ pour la convergence uniforme.

La convergence uniforme d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions vers f entraîne la convergence ponctuelle, c'est-à-dire que $\forall x \in X : f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Par contre, la réciproque est fausse.

Les résultats suivants font partie du cours de Topologie.

Théorème 1.1.2. *Si une suite $(f_n)_n$ de fonctions de $C_0(X,K)$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to K$ alors f est continue.*

Théorème 1.1.3. *L'espace vectoriel* $(C_0(X,K), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach (c'est-à-dire, un espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy admet une limite dans* $C_0(X,K)$*).*

Le produit de deux fonctions, défini par $(fg)(x) = f(x)g(x)$, est associatif et distributif. Il définit donc une structure d'algèbre sur $C_0(X,K)$. De plus on a le résultat suivant :

Lemme 1.1.4. $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Ce lemme, dont la preuve est triviale, dit que $C_0(X,K)$ est muni d'une **norme d'algèbre**.

1.2 Le Théorème de Stone-Weierstraß

On va maintenant considérer le cas où X est compact et se poser le problème d'approcher une fonction continue en norme ∞ par des fonctions plus simples.

Théorème 1.2.1 (Stone-Weierstraß). *Soit* X *un espace métrique compact et* $K = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$*. Soit* $A \subset C(X,K)$ *tel que :*

(i) A *est une sous-algèbre auto-adjointe (c'est-à-dire,* $f \in A$ *implique* $\overline{f} \in A$*).*

(ii) A *contient les fonctions constantes.*

(iii) A *sépare les points de* X *(c'est-à-dire, pour tous* $x, y \in X$*,* $x \neq y$*, il existe une fonction* $f \in A$ *telle que* $f(x) \neq f(y)$*).*

Alors A *est dense dans* $C(X,K)$ *pour la topologie de la norme* $\|\cdot\|_\infty$*. Autrement dit, pour toute fonction* $f \in C(X,K)$*, il existe une suite* $(f_n)_n$ *dans* A *qui converge uniformément vers* f*.*

Exemple 1.2.2. Soit $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et soit A l'algèbre des polynômes sur $[a,b]$ à valeurs dans K. Alors X est compact et A satisfait les critères du Théorème 1.2.1 (le polynôme $P(x) = x$ sépare les points). Donc toute fonction continue sur $[a,b]$ (à valeurs dans K) peut être approchée par des polynômes sur $[a,b]$.

Remarque 1.2.3. L'hypothèse de compacité est nécessaire.

Exemple 1.2.4. Soit $X = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et A l'algèbre des polynômes de Laurent sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, $L \in A$ est de la forme

$$L(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$$

pour un certain $N \in \mathbb{N}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. Comme $\bar{z} = z^{-1}$ sur $\mathbb{T}$ on a $\overline{L}(z) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_{-n}} z^n$, donc A est autoadjoint. A satisfait les critères du Théorème 1.2.1 et donc est dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Posons $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$ pour $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Alors $\tilde{f}$ est continue et 2π-périodique. La densité de A dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ veut donc dire que toute fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) peut être approchée par des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des fonctions de la forme $\tilde{L}(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$.

1.3 Preuve du théorème de Stone-Weierstraß

La démonstration est élémentaire mais longue. Nous la divisons en plusieurs étapes.

Lemme 1.3.1. *Il existe une suite de polynômes $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$.*
(Notons que ceci est un cas particulier du théorème de Stone-Weierstraß, avec $X = [-1, 1]$, $K = \mathbb{R}$ et $A \subseteq C([-1, 1], \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions polynômiales).

Proof. Nous définissons par récurrence les fonctions polynômiales suivantes :

$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(P_n(x)^2 + x). \tag{1.1}$$

Un simple calcul donne :

$$2P_{n+2} - 2P_{n+1} = P_{n+1}^2 - P_n^2 = (P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n)$$

d'où

$$P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n). \tag{1.2}$$

On vérifie aisément par récurrence que :

(i) $P_n(x)$ est croissant sur $[0, 1]$, et $0 \le P_n(x) \le 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ (par (1.1)), et

(ii) $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ est croissant sur $[0, 1]$, et $0 \le P_{n+1}(x) - P_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ (par (1.2)).

En particulier, pour tout n et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \le P_{n+1}(x) - P_n(x) \le P_{n+1}(1) - P_n(1),$$

d'où, pour tout $n \le m$ (et tout $x \in [0, 1]$) :

$$0 \le P_m(x) - P_n(x) \le P_m(1) - P_n(1),$$

et

$$\|P_m - P_n\|_\infty \leq |P_m(1) - P_n(1)|.$$

Or, la suite $(P_n(1))_n$ étant croissante et bornée par 1, elle converge et est donc de Cauchy. Par conséquent, la suite des fonctions $(P_n)_n$ est de Cauchy dans $C([0,1],\mathbf{R})$. Par complétude de ce dernier, il existe une fonction continue $g \in C([0,1],\mathbf{R})$ telle que $P_n \to g$ uniformément sur $[0,1]$.

En particulier $P_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, d'où

$$g(x) = \frac{1}{2}(g(x)^2 + x), \qquad \text{ou :} \qquad \big(1 - g(x)\big)^2 = 1 - x.$$

Or, nous savons déjà que $1 - g(x) \geq 0$, d'où :

$$1 - g(x) = \sqrt{1-x}, \qquad \text{i.e.,} \qquad g(x) = 1 - \sqrt{1-x}.$$

On a donc $P_n(x) \to 1 - \sqrt{1-x}$ uniformément sur $[0,1]$.
On en conclut que $1 - P_n(1-x^2) \to \sqrt{x^2} = |x|$ uniformément sur $[-1,1]$. $\blacksquare_{1.3.1}$

Lemme 1.3.2. *Soit X un espace compact contenant au moins deux points, $A \subseteq C(X,\mathbb{R})$, et supposons que :*

(i) *Pour tous $x \neq y$ dans X, tous $r, s \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in A$ telle que $|f(x) - r| < \varepsilon$ et $|f(y) - s| < \varepsilon$.*

(ii) *Pour tous $f, g \in A$ on as aussi $\max(f,g) \in A$ et $\min(f,g) \in A$.*

Alors A est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Proof. Soit $h \in C(X,\mathbb{R})$, et soit $\varepsilon > 0$ donné. Tout d'abord, pour tous $x \neq y \in X$ nous trouvons une fonction $f_{xy} \in A$ telle que $|f_{xy}(x) - h(x)| < \varepsilon$ et $|f_{xy}(y) - h(y)| < \varepsilon$ En particulier on a :

$$f_{xy}(x) < h(x) + \varepsilon, \qquad f_{xy}(y) > h(y) - \varepsilon.$$

Fixons $x \in X$, et pour tout $y \in X$ posons $U_{xy} = \{z \in X : f_{xy}(z) > h(z) - \varepsilon\}$. On observe que c'est un voisinage ouvert de y. On a donc $X = \bigcup_{y \in X} U_{xy}$, et par compacité il existe $y_0, \ldots, y_{m-1} \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=0}^{m-1} U_{xy_i}$. Nous posons alors $g_x = \max(f_{xy_0}, \ldots, f_{xy_{m-1}})$. Par hypothèse $g_x \in A$ et par construction nous avons :

$$g_x(x) < h(x) + \varepsilon, \qquad g_x(z) > h(z) - \varepsilon \quad \text{quelque soit } z \in X.$$

On construit $g_x \in A$ avec ces propriétés pour chaque $x \in X$, et l'on pose $V_x = \{z \in X : g_x(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Comme précédemment V_x est un voisinage de x, d'où

$X = \bigcup_{x\in X} V_x$. Par compacité de X, il existe $x_0, \dots, x_{k-1}$ tels que $X = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_{x_j}$. Nous posons alors $h_\varepsilon = \min(g_{x_0}, \dots, g_{x_{k-1}})$. Par hypothèse $h_\varepsilon \in A$ et par construction nous avons :

$$h_\varepsilon(z) < h(z) + \varepsilon, \qquad h_\varepsilon(z) > h(z) - \varepsilon \quad \text{quelque soit } z \in X.$$

Autrement dit, $\|h - h_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Comme un tel $h_\varepsilon \in A$ existe pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons démontré que h est dans l'adhérence de A. $\blacksquare_{1.3.2}$

Démonstration du Théorème de Stone-Weierstraß. Nous observons d'abord que l'adhérence de A, notée $\overline{A}$, satisfait elle aussi toutes les hypothèses du théorème. En effet, si $f_n \to f$ et $g_n \to g$ uniformément, où $f_n, g_n \in A$, alors il existe nécessairement $M \in \mathbb{R}$ qui majore $\|f_n\|_\infty$, $\|f\|$, $\|g_n\|_\infty$ et $\|g\|$ pour tout n. Dans ce cas on a pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty, \\
\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + g(f_n - f)\|_\infty \\
&\leq \|f_n\|_\infty \|(g_n - g)\|_\infty + \|g\|_\infty \|(f_n - f)\|_\infty \\
&\leq M\|(g_n - g)\|_\infty + M\|(f_n - f)\|_\infty, \\
\|\bar{f}_n - \bar{f}\|_\infty &= \|f_n - f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nous obtenons que $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$ et $\bar{f}_n \to \bar{f}$ uniformément, d'où $f + g \in \overline{A}$, $fg \in \overline{A}$ et $\bar{f} \in \overline{A}$. Cela montre que $\overline{A}$ est également une sous algèbre auto-adjointe. Le fait que $\overline{A}$ contient les fonctions constantes et sépare les points découle de $A \subseteq \overline{A}$. Nous pouvons donc supposer que A est fermé dans $C(X, K)$.

Nous traitons d'abord le cas réel, $K = \mathbb{R}$. Si X ne consiste que d'un seul point, toute fonction dans $C(X, \mathbb{R})$ est constante, d'où $A = C(X, \mathbb{R})$ par hypothèse. Nous pouvons donc supposer que X contient au moins deux points.

Soit $(Q_n(x))_n$ la suite de polynômes dans $\mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$. Si $f \in A$ satisfait $\|f\|_\infty \leq 1$ alors $Q_n(f) \in A$ (car A est une $\mathbb{R}$-algèbre contenant les constantes) et $Q_n(f) \to |f|$ uniformément (car $f(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in X$). Comme A est supposé fermé, $|f| \in A$. Si $\|f\|_\infty > 1$ nous avons $\frac{f}{\|f\|_\infty} \in A$, $\left\| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right\|_\infty = 1$ et $|f| = \|f\|_\infty \left| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right| \in A$. Ainsi, $|f| \in A$ pour tout $f \in A$. Si $g \in A$ est une autre fonction alors :

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in A, \qquad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in A.$$

Soient maintenant $x \neq y \in X$, $r, s \in \mathbb{R}$. Alors il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Posons $g(z) = r + \frac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}(s - r)$. Alors $g \in A$, $g(x) = r$ et $g(y) = s$. D'après le résultat précédent, A est dense dans $C(X, \mathbb{R})$, et donc $A = C(X, \mathbb{R})$ (car A est fermé). Ceci conclut la démonstration du cas réel.

Dans le cas complexe, nous supposons également que $f \in A \implies \bar{f} \in A$. Posons $A' = A \cap C(X, \mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in A$ nous avons $Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in A'$ et $Im(f) = Re(-if) \in A'$. Il est facile de vérifier que A' vérifie les hypothèses du cas réel, d'où $A' = C(X, \mathbb{R})$. De plus, toute fonction $f \in C(X, \mathbb{C})$ peut être écrite comme $f = g + ih$ où $g, h \in C(X, \mathbb{R}) = A' \subseteq A$. Comme A est une $\mathbb{C}$-algèbre, on a $f = g + ih \in A$.
On a donc démontré que $A = C(X, \mathbb{C})$, ce qui achève la preuve. $\blacksquare_{1.3.2}$