Chapter 2

Rappel sur les fonctions intégrables

Dans ce chapitre sont rappelés les principaux résultats du cours "Calcul Intégral" qui sont importants pour le cours "Analyse Réelle".

2.1 Rappel sur l'intégrale de Lebesgue

On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Définition 2.1.1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *intégrable* (pour la mesure μ) si elle est mesurable et si

$$\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

On écrira aussi $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int f$ pour $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$ (lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté).

Rappel Une fonction à valeurs complexes est mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si les ensembles $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$ sont mesurables.

On définit l'intégrale d'une fonction étagée $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $A_i \subset \Omega$ mesurable par

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

et celui d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable par

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{f \geq g, \text{ étagée}} \int_\Omega g d\mu.$$

Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on décompose $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et on pose

$$\int f = \int f_1 - \int f_2 + i \int f_3 - i \int f_4.$$

Lemme 2.1.2. *$\int$ a les propriétés importantes suivantes :*

(i) *$\int$ est linéaire : si f, g sont intégrables et $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ alors $\int(\lambda f + \nu g) = \lambda \int f + \nu \int g$.*

(ii) *$\int$ préserve l'ordre : si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont intégrables, $f \leq g$ μ-p.p.*[1] *alors $\int f \leq \int g$. En particulier, si f et g coïncident sur le complément d'un ensemble de mesure nulle alors $\int f = \int g$.*

(iii) *Si f et intégrable alors $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.*

2.2 Trois résultats fondamentaux d'intégration à connaître

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrables : $f_n \leq f_{n+1}$, μ-presque partout. Alors on peut définir pour presque tout x,

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Théorème 2.2.1 (Beppo Levi (convergence monotone))**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite* croissante *de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrables. On suppose que*

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Alors $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$ existe et est finie μ-p.p.. De plus f est intégrable et $\int |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier

$$\int f = \sup_n \int f_n.$$

Théorème 2.2.2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables qui sont μ-p.p.* positives. *Alors $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ existe, est mesurable, à valeurs μ-p.p. dans $[0, \infty]$. De plus*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

En particulier, si $\sup_n \int f_n < \infty$ alors f est intégrable.

[1] Une propriété est vraie μ-p.p. (ou μ-p.t. x) si elle est vraie sur le complément d'un ensemble de mesure nulle.

Théorème 2.2.3 (Lebesgue-convergence dominée-)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ intégrables. On suppose que*

(i) $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour μ-p.t. $x \in \Omega$,*

(ii) *il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n et μ-p.t. $x \in \Omega$.*

Alors f est intégrable et $\int |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

2.3 Intégrales doubles

(Ω_1, μ_1) et (Ω_2, μ_2) sont deux espaces mesurés.

Théorème 2.3.1 (Fubini)**.** *Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$. Alors :*

(i) *pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω_2 et la fonction (définie presque partout) $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est intégrable sur Ω_1,*

(ii) *pour presque tout $y \in \Omega_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω_1 et la fonction (définie p.p.) $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est intégrable sur Ω_2,*

(iii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 (Tonelli)**.** *Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction* mesurable. *On suppose que la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur Ω_2 pour presque tout $x \in \Omega_1$ et que $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty$. Alors $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à la mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$. En particulier le théorème de Fubini s'applique à f.*

2.4 Changement de variables

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. Le déterminant de la matrice de Jacobi est

$$J_{ij}(x) = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x),$$

avec $\phi(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x))$ et $\phi_i : U \to \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Théorème 2.4.1. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^1. Soit $f : V \to \mathbb{C}$ une fonction. Alors f est intégrable sur V si et seulement si $f(\phi(x))|\det J(x)|$ est intégrable sur U et sous ces conditions*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|\det J(x)|dx.$$

2.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit (Ω, μ) un espace mesuré et Λ un espace metrique. On considère une fonction

$$f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{C}$$

et on suppose que, pour tout paramètre $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f_\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$, $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$ est intégrable. On peut alors considerer la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{C}$,

$$F(\lambda) = \int_\Omega f_\lambda(x) d\mu(x),$$

qui est définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Théorème 2.5.1 (Continuité sous le signe $\int$)**.** *Dans le cadre ci-dessus supposons que $\lambda_0 \in \Lambda$ et*

(i) *pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue en λ_0,*

(ii) *il existe un voisinage $V \subset \Lambda$ de λ_0 est une fonction intégrable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$ pour tout $\lambda \in V$ et presque tout $x \in \Omega$.*

Alors $F(\lambda)$ est continue en λ_0.

Théorème 2.5.2 (Différentiation sous le signe $\int$)**.** *Dans le cadre ci-dessus supposons que Λ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que*

(i) *pour presque tout* $x \in \Omega$*, la fonction* $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ *admet des dérivées partielles* $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda_j}$ *continues par rapport à* λ*,*

(ii) *il existe des fonctions intégrables* $h_j : \Omega \to \mathbb{R}$ *t.q.* $\left|\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda_j}\right| \leq h_j(x)$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *et presque tout* $x \in \Omega$*.*

Alors $F(\lambda)$ *admet des dérivées partielles* $\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_j}$ *continues par rapport à* λ *et on a*

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \int_\Omega \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} d\mu(x).$$