UNIVERSITÉ LYON I

COURS DE MASTER, 2ième année (MATHÉMATIQUES PURES)

ANALYSE FONCTIONNELLE :

Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna,

Espaces de Hardy, et

une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel

Isabelle CHALENDAR

- 2008 -

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions harmoniques

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ est noté $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

1.1 Rappels : théorème de Poincaré et théorème de Fejér

1.1.1 Le théorème de Poincaré

Soit $w = fdx + gdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 (i.e. f et g sont de classe C^1) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Rappelons que dw est la 2-forme différentielle définie par $dw = df \wedge dx + dg \wedge dy$ et rappelons que si f est de classe C^1, df est appelée la 1-forme différentielle associée à f et est définie par $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.
On dit que w est **fermée** si $dw = 0$ et on dit que w est **exacte** s'il existe une fonction φ de classe C^2 sur Ω telle que $w = d\varphi$ (i.e. w est la 1-forme différentielle associée à φ).

Lemme 1.1.1 *Toute forme exacte sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est fermée.*

Preuve : Si $w = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$, alors

$$dw = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy\right) \wedge dy.$$

Rappelons que le produit extérieur $\wedge$ est **anticommutatif**, ce qui implique $dx \wedge dy = -dy \wedge dx, dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$. D'autre part, comme φ est de classe C^2, nous avons

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$. On obtient donc :

$$dw = \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) dx \wedge dy = 0.$$

□

Il existe une réciproque du Lemme 1.1.1 que nous admettrons (la preuve utilise la formule de Stokes, [7], Chap. 1, Section 2.8).

Théorème 1.1.1 (de Poincaré) *Soit Ω un ouvert* ***simplement connexe****. Alors toute* 1*-forme différentielle fermée sur Ω est exacte.*

Remarque 1.1.1 *Tout convexe est simplement connexe.*

1.1.2 Le théorème de Fejér

Pour f continue sur $\mathbb{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième **coefficient de Fourier** de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

La **série de Fourier** de f est la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$. La **somme partielle** de la série de Fourier de f est $S_m(f)(e^{it}) = \sum_{|n| \leq m} \hat{f}(n) e^{int}$. Le théorème suivant, que nous admettrons, dit que les sommes partielles ne convergent pas en général mais, si f est continue, on peut les "régulariser" et les rendre convergentes en prenant leurs moyennes.

Théorème 1.1.2 (de Fejér) *Si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors la* ***moyenne de Cesàro*** $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} S_m(f)$ *converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.*

Corollaire 1.1.1 *Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$, $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, pour la convergence uniforme sur $\mathbb{T}$.*

Preuve : Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la somme partielle $S_m(f)$ est un polynôme trigonométrique (un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $e^{it} \longmapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$).

□

1.2 Définition et premières propriétés des fonctions harmoniques

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est **harmonique** sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le **Laplacien** de f défini par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

Remarque 1.2.1 *Pour toute fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on a :*

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\Delta f,
\end{aligned}$$

car $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ puisque f est par hypothèse de classe C^2. Via un calcul analogue, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = \frac{1}{4}\Delta f$.

Proposition 1.2.1 *Toute fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω*

Preuve : Si $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$, f est de classe C^2 et de plus $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ sur Ω. Par conséquent, $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) \equiv 0$. Si f est anti-holomorphe, f est de la forme $\overline{g}$ où g est holomorphe. Ainsi f est elle-aussi de classe C^2 et $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ sur Ω. Par conséquent, $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \equiv 0$.

□

Remarque 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que $Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$.

Corollaire 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

Le corollaire ci-dessus admet une réciproque à condition d'imposer une condition supplémentaire sur l'ouvert Ω.

Théorème 1.2.1 *Soit Ω un ouvert* ***simplement connexe*** *de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ holomorphe sur Ω telle que $Re(\varphi) = f$.*

Preuve : On cherche une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle que $f + ig$ soit holomorphe sur Ω. D'après les **équations de Cauchy-Riemann**, $f + ig$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ sur Ω.

Considérons la 1-forme différentielle w de classe C^1 définie par $w = -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$. Alors w est une forme fermée. En effet,

$$\begin{aligned}
dw &= \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right) \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dx \wedge dy \\
&= \Delta f dx \wedge dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'ouvert Ω étant simplement connexe, d'après le théorème de Poincaré, il existe une fonction g de classe C^2 sur Ω telle que

$$-\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy = w = dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

On a donc $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$. La fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi = f + ig$ est donc holomorphe sur Ω et par construction $f = Re(\varphi)$.

□

Remarque 1.2.3 *L'hypothèse "Ω simplement connexe" est nécessaire.*

En effet, posons $f(z) = \log |z|$ pour $z \neq 0$. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe une détermination holomorphe φ du logarithme sur $D(a, |a|)$, le disque ouvert centré en a et de rayon $|a|$ (en fait, plus généralement, il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite d'extrémité l'origine). On a donc $e^{\varphi(z)} = z$ pour $|z-a| < |a|$, ce qui implique $|z| = e^{Re(\varphi(z))}$ et $\log|z| = Re(\varphi(z))$. Ainsi $\log|z|$ est une fonction harmonique sur $D(a,|a|)$ pour tout $a \neq 0$ et donc $\log|z|$ est une fonction harmonique à valeurs réelles sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. S'il existait une fonction φ_1 holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $Re(\varphi_1(z)) = \log|z|$, on obtiendrait une détermination holomorphe Ψ du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ce qui est absurde. En effet, rappelons qu'une fonction Ψ holomorphe sur un ouvert non vide Ω est une détermination holomorphe du logarithme sur Ω si $e^{\Psi(z)} = z$ sur Ω. D'après les équations de Cauchy-Riemann, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\Psi(z)} = z,\ z \in \Omega \\ \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Re(\Psi(z)) = \log|z| \text{ sur } \Omega \\ \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega \\ \exists z_0 \in \Omega \text{ tel que } e^{\Psi(z_0)} = z_0. \end{array}\right.$$

S'il existait une fonction φ_1 holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $Re(\varphi_1(z)) = \log|z|$, on obtiendrait une détermination holomorphe φ_1 du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en posant $\Psi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_1(1)$. Ceci est absurde car toute détermination holomorphe du logarithme sur Ω est une primitive de $1/z$, ce qui implique $\int_\gamma 1/z dz = 0$ pour tout lacet tracé dans Ω. Or l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne vérifie pas cette dernière condition.

On obtient ainsi la caractérisation suivante des fonctions harmoniques à valeurs réelles.

Corollaire 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est harmonique sur Ω.*
2. *Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et φ holomorphe sur $D(z_0,r)$ tels que $f = Re(\varphi)$ sur $D(z_0,r)$.*
3. *Pour tout ouvert simplement connexe $\mathcal{U}$ de Ω, il existe ψ holomorphe sur $\mathcal{U}$ tel que $f = Re(\psi)$ sur $\mathcal{U}$.*

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a,r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a,r)}$ et à valeurs complexes ont la propriété suivante.

Corollaire 1.2.3 *Soit f une fonction continue sur $\overline{D(a,r)}$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), harmonique sur $D(a,r)$ et à valeurs complexes. Alors on a* ***la formule de la moyenne*** *:*

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy. \end{aligned}$$

Preuve : Supposons que f soit harmonique sur $D(a,\rho)$ avec $\rho > r$. Soit $f_1 = Re(f)$. Alors f_1 est harmonique sur $D(a,\rho)$. Comme $D(a,\rho)$ est simplement connexe, d'après le Théorème 1.2.1, il existe φ holomorphe sur $D(a,\rho)$ telle que $f_1 = Re(\varphi)$ sur $D(a,\rho)$. D'après la **formule de Cauchy**, nous avons :

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a,r)} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - a}d\xi,$$

avec $0 < r < \rho$ et où $\Gamma(a,r)$ est le cercle centré en a et de rayon r. Posons $\xi = a + re^{it}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. On obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a+re^{it})dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_1(a) = Re(\varphi(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(\varphi(a+re^{it}))dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a+re^{it})dt,$$

avec $f_1 = Re(f)$. De même, en remplaçant f_1 par $f_2 = Im(f)$ on montre que $Im(f(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Im(f(a+re^{it}))dt$. On obtient donc

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt,$$

sous l'hypothèse f harmonique sur $D(a,\rho)$ avec $\rho > r$.

Dans le cas général, on a, pour tout $s < r$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+se^{it})dt.$$

En faisant tendre s vers r et par continuité de f sur $\overline{D(a,r)}$, on obtient :

$$f(a) = \lim_{s\to r^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+se^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

Calculons à présent $\displaystyle\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy$. En posant $x+iy = se^{i\theta}$ (ce qui donne $dxdy = sdsd\theta$) et grâce à la continuité de f sur le compact $\overline{D(a,r)}$ (ce qui implique que f est uniformément bornée) on peut alors calculer l'intégrale double de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy &= \int_0^r\int_0^{2\pi} f(a+se^{i\theta})sdsd\theta \\
&= \int_0^r s\left(\int_0^{2\pi} f(a+se^{i\theta})d\theta\right)ds \\
&= \int_0^r s(2\pi f(a))ds \\
&= 2\pi f(a)\tfrac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a).
\end{aligned}$$

□

Nous allons à présent démontrer le **Principe du maximum** pour les fonctions harmoniques **à valeurs réelles** et définies sur un ouvert **connexe**.

Corollaire 1.2.4 (Principe du Maximum) *Soit Ω un ouvert **connexe** et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Si f admet un **maximum relatif** sur Ω, alors f est constante.*

Preuve : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des maxima relatifs de f sur Ω. Supposons que $\mathcal{S}$ est non vide. Soit $a \in \mathcal{S}$ et soit $D(b,r)$ un disque ouvert centré en b, de rayon r, contenant a et contenu dans Ω (cf. Figure 1.1).

Puisque $a \in \mathcal{S}$, il existe $\rho > 0$ tel que $\overline{D(a,\rho)} \subset D(b,r)$ et tel que $f(a) \geq f(z)$ pour tout $z \in \overline{D(a,\rho)}$. D'après le Corollaire 1.2.3, nous avons :

$$f(a) = \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\overline{D(a,\rho)}} f(x+iy)dxdy.$$

Comme $\pi\rho^2 = \displaystyle\iint_{\overline{D(a,\rho)}} dxdy$, on a donc $f(a) = \frac{1}{\pi\rho^2}\displaystyle\iint_{\overline{D(a,\rho)}} f(a)dxdy$, et ainsi

$$\iint_{\overline{D(a,\rho)}} (f(a) - f(x+iy))dxdy = 0,$$

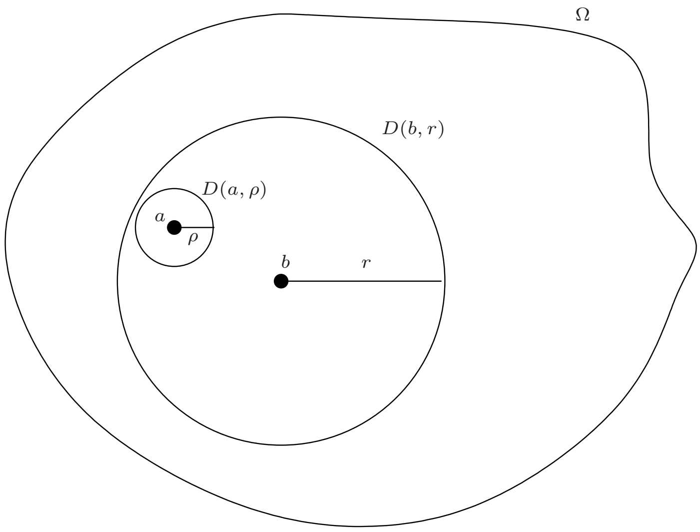


FIG. 1.1 – Principe du maximum

avec $(x, y) \longmapsto f(a) - f(x + iy)$ continue et positive sur $\overline{D(a, \rho)}$. Ainsi $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in \overline{D(a, \rho)}$. De ce fait $D(a, \rho) \subset \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S}$ est ouvert dans Ω.

Nous allons montrer qu'en fait $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in D(b, r)$, autrement dit que f est constante sur tout disque ouvert contenu dans Ω et contenant un maximum relatif. D'après l'assertion 2. du Corollaire 1.2.2, il existe une fonction φ holomorphe sur $D(b, r)$ telle que $f = Re(\varphi)$ sur $D(b, r)$. Nous venons de montrer que nécessairement $Re(\varphi)$ était constante sur $D(a, \rho)$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, $Im(\varphi)$ est également constante sur $D(a, \rho)$. Il résulte du **principe des zéros isolés** que φ est constante sur $D(b, r)$. Ainsi f est elle aussi constante sur $D(b, r)$.

Nous allons montrer à présent que $\mathcal{S}$ est aussi fermé dans Ω. Soit $u \in \Omega \cap \overline{\mathcal{S}}$. Soit $s > 0$ tel que $D(u, s) \subset \Omega$. Comme $u \in \overline{\mathcal{S}}$, $D(u, s) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. D'après ce qui précède, on a donc $D(u, s) \subset \mathcal{S}$ et donc en particulier, $u \in \mathcal{S}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}$ est fermé dans Ω.

Comme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ est un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé de Ω qui est connexe, on obtient $\mathcal{S} = \Omega$. La fonction f est donc localement constante sur Ω. Comme par hypothèse f (de classe C^2) est continue, f est donc constante sur Ω.

$\square$

Nous terminerons cette section avec un dernier corollaire.

Corollaire 1.2.5 *Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction (à valeurs complexes) continue sur K et harmonique sur l'intérieur de K, $\overset{\circ}{K}$. Alors*

$$\sup_{z\in K}|f(z)| = \sup_{z\in Fr(K)}|f(z)|,$$

où $Fr(K)$ désigne la frontière de K.

Preuve : Comme une fonction continue sur un compact atteint son supremum, il existe $z_0 \in K$ tel que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in K$. Si $z_0 \in Fr(K)$, la preuve du corollaire est terminé.

Supposons que $z_0 \in \overset{\circ}{K}$. Soit $\mathcal{U}$ la composante connexe de z_0 dans $\overset{\circ}{K}$. Rappelons que les composantes connexes de tout ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ sont à la fois ouvertes et fermées dans $\mathcal{V}$ (cf. Chap. II, § 9, Remarque 9 de [23]). Ceci résulte en fait d'un résultat beaucoup plus général qui dit que les composantes connexes de tout espace localement connexe sont à la fois ouvertes et fermées (cf. Chap. II, § 9, Théorème 2.9.19 de [23]).

Supposons que $|f(z_0)| > 0$ et posons $g(z) = \dfrac{|f(z_0)|}{f(z_0)} f(z)$. Par construction, g est harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, $|g(z)| = |f(z)|$ pour tout $z \in K$ et $g(z_0) = |f(z_0)|$. Pour $z \in K$, on a :

$$Re(g(z)) \leq |g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = g(z_0) = Re(g(z_0)).$$

D'après le Corollaire 1.2.4, $Re(g)$ est constante sur l'ouvert connexe $\mathcal{U}$. Comme $Re(g)$ est continue sur $\overline{\mathcal{U}}$, $Re(g)$ est constante sur $\overline{\mathcal{U}}$. Il existe donc $z_1 \in Fr(\mathcal{U})$ tel que $Re(g(z_1)) = Re(g(z_0)) = g(z_0)$. On a donc

$$|f(z_1)| \geq Re(g(z_1)) = g(z_0) = |f(z_0)| \geq |f(z_1)|.$$

Par conséquent, $|f(z_1)| = |f(z_0)|$ et $|f|$ atteint son maximum en z_1 avec $z_1 \in Fr(\mathcal{U})$. Comme $\mathcal{U}$ est une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$, $\mathcal{U}$ est fermé dans $\overset{\circ}{K}$. On en déduit que nécessairement $z_1 \in Fr(K)$ car $z_1 \in \overset{\circ}{K}$ implique $z_1 \in \mathcal{U}$ puisque $\overline{\mathcal{U}} \cap \overset{\circ}{K} = \mathcal{U} \cap \overset{\circ}{K}$. Ceci termine la preuve du corollaire.

□

1.3 Formule de Poisson

Définition 1.3.1 *Pour* $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Pour r *fixé,* $0 \leq r < 1$, P_r *est appelé un* ***noyau de Poisson*** *et* $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ *est appelée la* ***famille des noyaux de Poisson****.*

Remarque 1.3.1

1. *Pour* r *fixé,* $0 \leq r < 1$, *la série* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$ *converge normalement, donc uniformément en* t. *La fonction* P_r *est continue sur* $[0, 2\pi]$

2. *Pour* r *fixé,* $0 \leq r < 1$, *on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 1.$$

Pour voir ceci, on peut inverser l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$ *ou encore remarquer que* $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = \widehat{P_r}(0)$, *le* 0*-ième coefficient de Fourier de la fonction continue* P_r.

Proposition 1.3.1 *Pour* $z = re^{i\theta}$ *avec* $0 \leq r < 1$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) && (1.1) \\ &= Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) && (1.2) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}. && (1.3) \end{aligned}$$

Preuve : La première égalité est immédiate. Elle provient du fait que

$$P_r(\theta - t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in(\theta - t)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)).$$

Pour démontrer la deuxième égalité on remarque que :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} &= \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} = \frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} \\
&= \frac{1-re^{i(\theta-t)}+2re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} = 1+\frac{2re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} \\
&= 1+2re^{i(\theta-t)}\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta-t)) = P_r(\theta-t).$$

La troisième égalité s'obtient en remarquant que :

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-|z|^2+(ze^{-it}-\overline{z}e^{it})}{|e^{it}-z|^2}.$$

Comme $ze^{-it}-\overline{z}e^{it}$ est imaginaire pur,

$$Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-r^2}{|1-ze^{-it}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

Enfin on calcule

$$\begin{aligned}
|1-re^{i(\theta-t)}|^2 &= |1-r\cos(\theta-t)-ir\sin(\theta-t)|^2 \\
&= (1-r\cos(\theta-t))^2+r^2\sin^2(\theta-t) \\
&= 1+r^2-2r\cos(\theta-t),
\end{aligned}$$

et la preuve de la proposition est achevée.

$\square$

Remarque 1.3.2 *Il résulte de la proposition précédente qu'un noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur* $[0,2\pi]$, 2π*-périodique, positive et paire.*

La proposition suivante nous montre comment construire des fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ à partir de mesures complexes sur $\mathbb{T}$.

Proposition 1.3.2 *Soit μ une mesure complexe (finie) sur $[-\pi,\pi]$. Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$P(\mu)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

Alors P_μ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Preuve : La mesure complexe μ est de la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures réelles définies par $\mu_1(A) = Re(\mu(A))$ et $\mu_2(A) = Im(\mu(A))$ pour tout borélien A de $[-\pi,\pi]$. Ainsi $P(\mu)(z) = P(\mu_1)(z) + iP(\mu_2)(z)$ et pour montrer que P_μ (avec μ mesure complexe sur $\mathbb{T}$) est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ il suffit de montrer que si ν est une mesure **réelle** sur $\mathbb{T}$ alors $P(\nu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour cela on remarque que :

$$P(\nu)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\nu(t) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right) = Re(\varphi(z)),$$

avec $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(e^{it})$. La fonction φ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$ (comme intégrale de la fonction holomorphe $z \longmapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ sur $\mathbb{D}$), d'après le Corollaire 1.2.1, $P(\nu)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Ceci termine la preuve de la proposition.

$\square$

Le théorème suivant est la solution du **problème de Dirichlet** que l'on peut formuler ainsi :

Etant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{T}$, trouver une fonction g continue sur le disque fermé unité $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et telle que $g_{|\mathbb{T}} = f$.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $g_{|\mathbb{T}} = f$. De plus, pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$. On notera $P(f)$ la fonction définie par $re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$.*

Preuve : Montrons tout d'abord l'**unicité** de la solution du problème de Dirichlet. Soient g_1 et g_2 deux solutions du problème de Dirichlet. D'après le Corollaire 1.2.5, comme $g_1 - g_2$ est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, on a :

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\{|g_1(z) - g_2(z)|\} = \sup_{z\in\mathbb{T}}\{|g_1(z) - g_2(z)|\} = 0,$$

puisque $g_1(z) = f(z) = g_2(z)$ sur $\mathbb{T}$. Ceci termine la preuve de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Montrons à présent l'**existence** d'une solution au problème de Dirichlet. D'après la Proposition 1.3.2, $P(f)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Posons $\tilde{P}(f)(z) = \begin{cases} P(f)(z) & \text{si } |z| < 1 \\ f(z) & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$.

Il nous reste à démontrer la continuité de $\tilde{P}(f)$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour cela nous allons montrer que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$.

La **première étape** consiste à vérifier que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{T}$ on a :

$$|\tilde{P}(f)(z)| \leq \|f\|_\infty \text{ pour } |z| \leq 1. \tag{1.4}$$

Pour $|z| < 1$, $z = re^{i\theta}$, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(f)(z)| &= |P(f)(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f(e^{it})| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt \\ &= \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

En effet, comme $s \longmapsto P_r(s)$ est 2π périodique et paire, via le changement de variable $s = t - \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt &= \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) dt \\ &= \int_{-\theta}^{-\theta + 2\pi} P_r(s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} P_r(s) ds \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

d'après la Remarque 1.3.1. Comme pour $|z| = 1$, par définition, on a $|\tilde{P}(f)(z)| = |f(z)|$, l'inégalité (1.4) est vérifiée.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction e_p fonction continue de $\mathbb{T}$ dans lui-même définie par $e_p(e^{it}) = e^{ipt}$. C'est aussi la fonction $z \longmapsto z^p$ si $p \geq 0$ et $z \longmapsto \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$. La solution au problème de Dirichlet est triviale pour les fonctions e_p : il s'agit de la fonction $g(z) = z^p$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ si $p \geq 0$ et $g(z) = \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$ (fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ d'après la Proposition 1.2.1). La **deuxième étape** consiste à montrer que $\tilde{P}(e_p)$ est $z \longmapsto z^p$ si $p \geq 0$ et est égale à $z \longmapsto \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$. Ceci nous montrera que $\tilde{P}(e_p)$ **est continue sur** $\overline{\mathbb{D}}$ **pour tout** $p \in \mathbb{Z}$. Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, par définition, nous avons :

$$\tilde{P}(e_p)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)e^{ipt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}\right)e^{ipt}dt.$$

Comme, pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégrale et la somme dans l'égalité ci-dessus. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(e_p)(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{r^{|n|}e^{in\theta t}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)}dt \\ &= r^{|p|}e^{ip\theta},\end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}dt = 0$ si $p \neq n$ et $\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}dt = 2\pi$ si $p = n$. On obtient ainsi, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $\tilde{P}(e_p)(z) = z^p$ si $p \geq 0$ et $\tilde{P}(e_p)(z) = \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$.

Nous allons à présent conclure la preuve du théorème en utilisant le **théorème de Fejér**. Rappelons qu'un polynôme trigonométrique est une application p définie sur $\mathbb{T}$ de la forme $e^{it} \longmapsto \sum_{|n|\leq k} c_n e^{int}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$. Autrement dit $p = \sum_{|n|\leq k} c_n e_n$. Par définition, de façon évidente, nous avons :

$$\tilde{P}(p) = \sum_{|n|\leq k} c_n \tilde{P}(e_n).$$

Ainsi, d'après la deuxième étape, $\tilde{P}(p)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour tout polynôme trigonométrique p. D'après le Théorème de Fejér, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(p_m)_{m\geq 1}$ telle que $\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_\infty = 0$. Il nous reste à vérifier que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de $\tilde{P}(p_m)$. Pour cela, on remarque que, par définition, $\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z) = \tilde{P}(f - p_m)(z)$. De plus, d'après (1.4), $|\tilde{P}(f - p_m)(z)| \leq \|f - p_m\|_\infty$ et donc

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z)| \leq \lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_\infty = 0.$$

Ainsi $\tilde{P}(f)$ est bien continue sur $\mathbb{T}$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{T}$. Ceci termine la preuve du théorème.

$\square$

Remarque 1.3.3 *Si f est une fonction harmonique réelle sur $D(0,r)$ avec $r \geq 1$, on a :*

$$f(z) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt\right) \text{ pour } |z| \leq 1$$

et la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a ainsi redémontré le résultat annoncé par le Théorème 1.2.1 de façon constructive.

Si l'on souhaite trouver une solution au problème de Dirichlet en remplaçant le disque unité $\mathbb{D}$ par un disque quelconque de $\mathbb{C}$, il suffit de faire un changement de variable. C'est ce que nous dit le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1 *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\Gamma(a,R)$ où $\Gamma(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, il existe une unique fonction g continue sur $\overline{D(a,R)} := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$, harmonique sur $D(a,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ et telle que $g_{|\Gamma(a,R)} = f$. De plus, si $z = a + re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t)f(a + Re^{it})dt.$$

Preuve : Comme dans la preuve du Théorème 1.3.1, l'unicité de la solution résulte du principe du maximum. Pour démontrer l'existence d'une solution g posons $f_1(z) = f(a + Rz)$ pour $|z| = 1$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{T}$, d'après le Théorème 1.3.1, il existe une fonction g_1 harmonique sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et telle que la restriction de g_1 à $\mathbb{T}$ coïncide avec f_1. On pose $g(z) = g_1\left(\frac{z-a}{R}\right)$ pour $z \in \overline{D(a,r)}$. Par construction on vérifie aisément que g vérifie les hypothèses du corollaire. Notons aussi que

$$P_{r/R}(\theta - t) = \frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(\theta - t) + \frac{r^2}{R^2}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}.$$

$\square$

D'après le Corollaire 1.2.3, si une fonction f est harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ alors f vérifie la “propriété de la moyenne” sur Ω, i.e., pour $a \in \Omega$ et pour tout disque fermé $\overline{D(a,r)}$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ on a $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt$. Le théorème suivant est en quelque sorte la réciproque de ce résultat : on montre que si f vérifie la **propriété de la moyenne faible** (condition un peu moins forte que la propriété de la moyenne) sur Ω, nous pourrons conclure à l'harmonicité de la fonction f sur Ω.

Théorème 1.3.2 *Soit f une fonction continue sur Ω vérifiant la propriété suivante dite* ***“propriété de la moyenne faible”*** *sur Ω : pour tout $a \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $\overline{D(a,r_n)} \subset \Omega$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ et $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+r_ne^{it})dt$ pour tout $n \geq 1$. Alors f est harmonique sur Ω.*

Preuve : En considérant séparément $Re(f)$ et $Im(f)$ on peut se limiter au cas où f est à valeurs réelles. Soit $R > 0$ tel que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. D'après le Corollaire 1.3.1, puisque f est continue sur le cercle $\Gamma(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, il existe une fonction g réelle, continue sur $\overline{D(a,R)}$, harmonique sur $D(a,R)$ et telle que g et f soient égales sur $\Gamma(a,R)$. La fonction g, étant harmonique sur $D(a,R)$, vérifie la propriété de la moyenne sur $D(a,R)$ et donc elle vérifie aussi la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$. Ainsi la fonction $h := g - f$ réelle vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$ et h est identiquement nulle sur $\Gamma(a,R)$. Soit $m = \sup\limits_{z\in\overline{D(a,R)}} h(z)$ et soit

$$K = \{\xi \in \overline{D(a,R)} : h(\xi) = m\}.$$

Comme h est continue sur le compact $\overline{D(a,R)}$, K est un compact non vide de $\overline{D(a,R)}$. Supposons que $m > 0$. Alors $K \subset D(a,R)$. Soit z_0 un point de la frontière de K en lequel la fonction continue sur le compact K définie par $z \longmapsto |z-a|$ atteint son maximum. Comme h vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $\overline{D(z_0,r_n)} \subset D(a,R)$ avec

$$m = h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + r_ne^{it})dt.$$

On a donc :

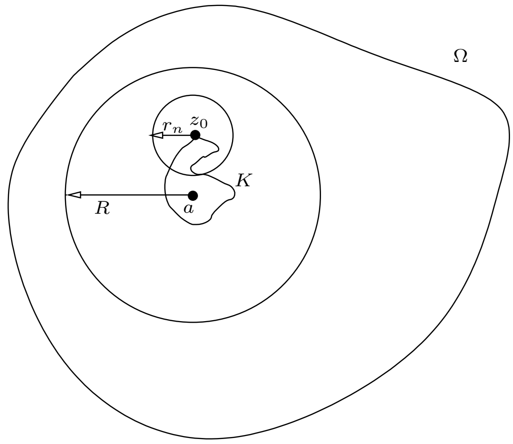


FIG. 1.2 – Propriété de la moyenne faible et harmonicité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h(z_0)-h(z_0+r_ne^{it}))dt=0,$$

avec $t \longmapsto h(z_0)-h(z_0+r_ne^{it})$ continue, réelle et positive sur $[0,2\pi]$. Par conséquent $h(z_0)=h(z_0+r_ne^{it})$ et donc $\Gamma(z_0,r_n)\subset K$, ce qui est absurde d'après le choix de z_0. On obtient ainsi $m=0$ (puisque $h(z)=0$ pour $z\in\Gamma(a,R)$) et donc $h(z)\leq 0$ pour $z\in\overline{D(a,R)}$. En appliquant un raisonnement analogue à $-h$ on montre que $h(z)\geq 0$ pour $z\in\overline{D(a,R)}$. Finalement $h(z)=0$ pour $z\in\overline{D(a,R)}$. La fonction f est donc harmonique car elle coïncide avec une fonction harmonique au voisinage de tout point de Ω.

□

Remarque 1.3.4 *Soit f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est harmonique sur Ω.*
2. *La fonction f vérifie la “propriété de la moyenne faible” sur Ω.*
3. *La fonction f vérifie la “propriété de la moyenne” sur Ω.*

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1

1. *Soient u et v deux fonctions harmoniques à valeurs réelles dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. A quelles conditions la fonction uv est-elle harmonique ?*

   (remarquer que la réponse dépend fortement du fait que les fonctions considérées sont à valeurs réelles).

2. *Montrer que u^2 ne peut être harmonique dans Ω que si u est constante.*

3. *Pour quelles fonctions $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ la fonction $|f|^2$ est-elle harmonique ?*

Exercice 1.4.2

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonique et telle que f^2 est harmonique.

1. *Démontrer que f ou $\overline{f}$ est holomorphe.*

2. *Si l'on remplace l'hypothèse "f^2 est harmonique" par $|f|^2$ est harmonique, que dire de f ?*

Exercice 1.4.3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω.

Démontrer que $\log |f|$ *est harmonique en calculant son laplacien.*

Exercice 1.4.4

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω.

Démontrer que $\log |f|$ *est harmonique (sans calculer son laplacien !).*

Exercice 1.4.5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. Montrer que si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ défini par $g(z) = zf(z)$ est harmonique alors f est analytique sur Ω.

Exercice 1.4.6

Soit f une fonction de classe C^3 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. *Démontrer que si f est harmonique sur Ω, les dérivées partielles de f sont elles aussi harmoniques.*
2. *Vérifier par un calcul direct que pour t fixé, $re^{i\theta} \longmapsto P_r(\theta - t)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.*
3. *En déduire (sans introduire de fonction holomorphe) que l'intégrale de Poisson $P(\mu)$ de toute mesure de Borel finie sur $\mathbb{T}$ est harmonique dans $\mathbb{D}$ en montrant que toute dérivée partielle de $P(\mu)$ est égale à l'intégrale de la dérivée correspondante du noyau.*

Exercice 1.4.7

1. *Soit u une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$ et telle que $u(0) = 1$. Majorer et minorer du mieux possible $u(1/2)$.*
2. *Soit $f = u + iv$, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ et $|u| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$. Pour $0 < r < 1$, majorer $|f(re^{i\theta})|$.*

Exercice 1.4.8

Soit u une fonction Lebesgue-mesurable dans un ouvert connexe Ω et appartenant localement à L^1 (cela signifie que l'intégrale de $|u|$ sur tout sous-ensemble compact de Ω est finie). Démontrer que u est harmonique si elle satisfait la forme suivante de la propriété de la moyenne :

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D(a,r)}} u(x, y) dx dy,$$

dès que $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$.

Chapitre 2

Théorie avancée des fonctions harmoniques

2.1 Rappels : théorème d'Hahn-Banach et mesures complexes

2.1.1 Conséquence de la théorie d'Hahn-Banach

Théorème 2.1.1 *Soit X un espace vectoriel normé et soit X^* son dual topologique. Pour $M \subset X$, on pose $M^\perp := \{\ell \in X^* : M \subset \ker \ell\}$. Soit E un sous-espace vectoriel de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est dense dans X.*
2. *$E^\perp = \{0\}$.*

2.1.2 Mesures complexes

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Autrement dit X est un ensemble et $\mathcal{M}$ est une tribu sur X (i.e. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X, avec $X \in \mathcal{M}$, $X \setminus A \in \mathcal{M}$ dès que $A \in \mathcal{M}$ et de plus pour toute famille $(A_n)_n$ finie ou dénombrable de $\mathcal{M}$, $\cup_n A_n \in \mathcal{M}$).
Une **mesure complexe** est une application $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\text{pour tout } E \in \mathcal{M} \text{ et toute partition dénombrable } (E_i)_{i\geq 1} \text{ de } E, \text{ on a : } \mu(E) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i).$$

A toute mesure complexe μ on associe sa **variation totale** $|\mu|$ définie par la formule :

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i\geq 1} |\mu(E_i)| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition dénombrable de } E \right\},$$

pour tout $E \in \mathcal{M}$.

On vérifie que μ est bien défini, $|\mu|(X) < \infty$ et $|\mu|$ est une mesure positive au sens usuel. En fait $|\mu| = \mu$ si μ est une mesure positive finie (i.e. $\mu(X) < \infty$). On démontre aussi (cf. [22], p.120) qu'il existe $h : X \longmapsto \mathbb{C}$ mesurable (i.e. l'image réciproque par h de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un élément de $\mathcal{M}$) telle que $|h(x)| = 1$, $|\mu|$-presque partout vérifiant :

$$\mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \text{ pour tout } E \in \mathcal{M}.$$

Si f est mesurable et si $f \in L^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$, on pose alors :

$$\int_X f d\mu = \int_X fh \, d|\mu|.$$

Si de plus X **est un espace topologique séparé compact**, on note $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^*(X)$ le dual topologique de $\mathcal{C}(X)$. L'ensemble $\mathcal{C}^*_+(X)$ désigne le sous-ensemble des applications Λ de $\mathcal{C}^*(X)$ telles que $\Lambda(f) \geq 0$ si $f \in \mathcal{C}(X)$ est positive. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures complexes sur $(X, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens, c'est à dire la tribu engendrée par les ouverts de X. On note $\mathcal{M}^+(X)$ l'ensemble des mesures positives finies sur $(X, \mathcal{B})$. On vérifie que $\mathcal{M}(X)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Pour $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $f \in \mathcal{C}(X)$, on pose

$$L_c(\mu)(f) = \int_X f \, d\mu \quad (= \int_X fh \, d|\mu|).$$

$\int_X f \, d\mu$ est bien défini car comme $f \in \mathcal{C}(X)$, f est mesurable et bornée (X étant compact). Ainsi la fonction fh mesurable et bornée sur X est intégrable pour la mesure positive finie $|\mu|$. Nous rappelons à présent le lien entre $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{C}^*(X)$ et entre $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{C}^*_+(X)$, toujours dans le cas où X est compact :

Théorème 2.1.2 (de représentation de Riesz) *Soit X un espace topologique séparé compact. Alors l'application $L_c : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{C}^*(X)$ (resp. $L_+ : \mathcal{M}^+(X) \to \mathcal{C}^*_+(X)$) définie par $L_c(\mu)(f) = \int_X f \, d\mu$ (resp. $L_+(\mu)(f) = \int_X f \, d\mu$) est une isométrie bijective.*

Il existe une version plus générale de ce théorème pour les espaces topologiques séparés localement compacts (cf. [22], p. 126).

2.2 Bijection entre les mesures complexes sur $\mathbb{T}$ et certaines fonctions harmoniques

Théorème 2.2.1 *Soit S l'ensemble des fonctions harmoniques f sur $\mathbb{D}$ telles que*

$$\rho(f) := \sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Alors l'application $\mu \longmapsto P(\mu)$ est une bijection de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ sur S. De plus,

$$\rho(P(\mu)) = |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\| \text{ et } \int_{\mathbb{T}} g \, d\mu = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} P(\mu)(se^{it}) g(e^{it}) dt$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Preuve :

Montrons que $P(\mu) \in S$.

D'après la Proposition 1.3.2, si μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ alors $P(\mu)$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$. Il reste à vérifier que $\rho(P(\mu)) < \infty$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |P(\mu)(re^{i\theta})| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Le noyau de Poisson positif P_r étant continu par rapport aux variables t et θ, P_r est mesurable. D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t) \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta \right) d|\mu|(t) \\ &= \int_0^{2\pi} d|\mu|(t) = |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\rho(P(\mu) \leq \mu(\mathbb{T}) = \|\mu\| < \infty, \tag{2.1}$$

et ainsi $P(\mu) \in S$.

Vérifions que $\int_{\mathbb{T}} g \, d\mu = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} P(\mu)(se^{it})g(e^{it})dt$.

D'après le Théorème 1.3.1, il existe une unique fonction G continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ avec $G_{|\mathbb{T}} = g$. On a donc $\lim_{s\to 1^-} \|G_s - g\|_\infty = 0$ où $G_s(e^{i\theta}) = G(se^{i\theta})$. En effet, G continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple (z_1, z_2) de $\overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \eta$ on ait $|G(z_1) - G(z_2)| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour $1 > s > 1 - \eta$ on a $|G_s(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})| = |G(se^{i\theta}) - G(e^{i\theta})| < \varepsilon$. Ainsi pour $s > 1 - \eta$ on a

$$\|G_s - g\|_\infty < \varepsilon \text{ et donc } \lim_{s\to 1^-} \|G_s - g\|_\infty = 0.$$

Rappelons que

$$G(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt.$$

En utilisant de nouveau le théorème de Fubini, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})d\mu(\theta) = \lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \left(\int_0^{2\pi} P_s(\theta - t)d\mu(t) \right) dt = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} g(e^{it})P_\mu(se^{it})dt. \tag{2.2}$$

Montrons que $\rho(P_\mu) = \|\mu\|$.

D'après le Théorème 2.1.2, $\|\mu\| = \|L_c(\mu)\|$ avec $L_c(\mu)(f) = \int_{\mathbb{T}} f \; d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ainsi

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})d\mu(\theta) \right| : g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

D'après (2.2), on a donc

$$\|\mu\| \leq \limsup_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} |P(\mu)(se^{it})|dt \leq \rho(P(\mu)).$$

Finalement, en utilisant (2.1) on a montré que $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$.

Montrons que $T : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \to S$ défini par $T(\mu) = P(\mu)$ est bijective.

Par définition, l'application T est linéaire. D'autre part l'égalité $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$ nous garantit l'injectivité de T. Il nous reste donc à vérifier que toute fonction $f \in S$ est de la forme $f = P(\mu)$ pour une certaine mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$\varphi_{r,\theta}(e^{it}) = P_r(\theta - t)$. On a donc $\varphi_{r,\theta} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par $\{\varphi_{r,\theta} : 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$. Nous allons montrer que E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.1.1, il suffit de montrer que si $\ell \in E^{\perp}$ alors $\ell = 0$. D'après le Théorème 2.1.2, ℓ est définie par une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $\ell = 0$ si et seulement si $\mu = 0$. Comme

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}(e^{it}) d\mu(t) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = P(\mu)(re^{i\theta}),$$

on a donc $\int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}(e^{it}) d\mu(t) = 0$ pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P(\mu) = 0$, ce qui implique $0 = \rho(P(\mu)) = \|\mu\|$. Finalement $\ell = 0$ et de ce fait E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
Fixons $f \in S$ non identiquement nulle. Pour $0 \leq s < 1$, on définit l'application linéaire $L_s : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ par

$$L_s(g) = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) f(se^{it}) dt.$$

On remarque que $L_s(\varphi_{r,\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(se^{it}) dt$. Comme la fonction $u \longmapsto f(su)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$, d'après le Théorème 1.3.1, $\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(se^{it}) dt = 2\pi f(sre^{i\theta})$. On a donc $L_s(\varphi_{r,\theta}) = 2\pi f(sre^{i\theta})$ et par continuité de f sur $\overline{D(0,r)}$ on obtient :

$$\lim_{s \to 1^-} L_s(\varphi_{r,\theta}) = 2\pi f(re^{i\theta}).$$

La linéarité de L_s nous garantit que pour tout $g \in E$, $\lim_{s \to 1^-} L_s(g)$ existe.
L'étape suivante de la preuve consiste à montrer que $\lim_{s \to 1^-} L_s(h)$ existe pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On a

$$\|L_s\| = \sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} f(se^{it}) g(e^{it}) dt \right| : \|g\|_\infty \leq 1 \right\} \leq \int_0^{2\pi} |f(se^{it})| dt \leq \rho(f) < \infty. \quad (2.3)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Comme E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, il existe $g \in E$ telle que $\|g - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\rho(f)}$. De plus, comme $L(g) := \lim_{s \to 1^-} L_s(g)$ existe, il existe $\nu > 0$ tel que pour $1 - \nu < s < 1$, on ait $|L_s(g) - L(g)| < \frac{\varepsilon}{4\rho(f)}$. Pour $s, s' \in]1 - \nu, 1[$, d'après (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} |L_s(h) - L_{s'}(h)| &\leq |L_s(h) - L_s(g)| + |L_s(g) - L(g)| + |L(g) - L_{s'}(g)| + |L_{s'}(g) - L_{s'}(h)| \\ &\leq \|L_s\| \|h - g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{4\rho(f)} + \frac{\varepsilon}{4\rho(f)} + \|L_{s'}\| \|h - g\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \rho(f)\frac{\varepsilon}{2\rho(f)} + \frac{\varepsilon}{2\rho(f)} + \rho(f)\frac{\varepsilon}{2\rho(f)} \\ &= \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\rho(f)}\right). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{C}$ est complet, l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{C}$ est complet. Ainsi, la suite $(L_s)_{0\leq s<1}$, vérifiant le critère de Cauchy, est convergente. Appelons L sa limite qui, d'après (2.3), vérifie $\|L\| \leq \rho(f)$. Puisque $L \in (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$, d'après le Théorème 2.1.2, il existe une mesure complexe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que :

$$L(h) = L_c(\mu)(h) = \int_0^{2\pi} h(e^{it})d\mu(t), \quad h \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $P(\mu) = f$.

D'après les calculs précédents, nous avons :

$$\begin{aligned} P(\mu)(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}L(\varphi_{r,\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{s\to 1^-} L_s(\varphi_{r,\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi f(re^{i\theta}) = f(re^{i\theta}). \end{aligned}$$

Ainsi $P(\mu) = f$ et la preuve du théorème est achevée.

□

Corollaire 2.2.1 *L'application $\mu \longmapsto P(\mu)$ est une isométrie bijective de $\mathcal{M}^+(\mathbb{T}) :=$ $\{$mesure positive finie sur $\mathbb{T}\}$ sur l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$.*

Preuve : Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ positive on a donc $\int_{\mathbb{T}} f d\mu \geq 0$. Comme $P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$ avec $t \longmapsto P_r(\theta - t)$ continue et positive pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc $P(\mu)$ fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$.

Réciproquement, si l'on suppose que f est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(se^{it})|dt &= \int_0^{2\pi} f(se^{it})dt \\ &= 2\pi f(0), \end{aligned}$$

d'après le Corollaire 1.2.3. On a donc $\rho(f) := \sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})|d\theta = 2\pi f(0) < \infty$, ce qui prouve que $f \in S$. D'après le Théorème 2.2.1, il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $f = P(\mu)$. Dans la preuve du Théorème 2.2.1, on a vu que pour toute fonction h continue sur $\mathbb{T}$ on a :

$$\int_0^{2\pi} h(e^{it})\, d\mu(t) = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) f(se^{it})\, dt.$$

Ainsi, si h est une fonction continue positive sur $\mathbb{T}$ on a $\int_0^{2\pi} h(e^{it})\, d\mu(t) \geq 0$. Ceci montre aussi que l'application linéaire $\ell : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ définie par $\ell(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it})\ d\mu(t)$ est continue avec $\|\ell\| = f(0)$ et positive. Ainsi $\ell \in \mathcal{C}_+^*(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.1.2, μ est une mesure positive finie.

□

2.3 Limites radiales des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$

Nous allons montrer à présent que si f est une fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$ alors $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe pour presque tout t et de plus cette limite radiale coïncide avec la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure positive μ vérifiant $f = P(\mu)$.

2.3.1 Rappels de théorie de la mesure sur $\mathbb{R}$

Soit m **la mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}$, $m(E) = \int_E dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$. Soit μ **une mesure complexe** sur $\mathbb{R}$.

Mesure étrangère à la mesure de Lebesgue

On dit que μ **est étrangère à** m et on note $\mu \perp m$ s'il existe un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = 0$ et tel que $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ pour tout borélien E. Autrement dit, μ est portée par un borélien de mesure de Lebesgue nulle. Voici deux exemples de mesures sur $\mathbb{R}$ étrangères à m :

1. Soit t_0 un point de $\mathbb{R}$ et soit δ_{t_0} la mesure de Dirac en t_0. Posons $A = \{t_0\}$. On a donc $m(A) = 0$ tandis que pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ on a $\delta_{t_0}(E) = \delta_{t_0}(E \cap A)$ car

$\delta_{t_0}(E) = 0$ si $t_0 \notin E$ et $\delta_{t_0}(E) = 1$ si $t_0 \in E$.

2. On énumère $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite dénombrable des rationnels de $\mathbb{R}$ et on considère la mesure $\mu = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\delta_{r_n}$, série convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Posons $A = \mathbb{Q}$. Nous avons $m(A) = 0$ et par construction, pour tout borélien E de $\mathbb{R}$, nous avons $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ même si A est dense dans $\mathbb{R}$.

De plus, si μ est portée par un borélien A, il en est de même pour $|\mu|$. En effet, pour tout borélien E de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |\mu|(E \cap A) &= \sup\left\{\sum_j |\mu(F_j)| : (F_j)_j \text{ partition de } E \cap A\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_j |\mu(E_j \cap A)| : (E_j)_j \text{ partition de } E\right\}. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\mu(F\cap A) = \mu(F)$ pour tout borélien F de $\mathbb{R}$, on a donc $|\mu|(E\cap A) = \sup\{\sum_j |\mu(E_j)| : (E_j)_j \text{ partition de } E\} = |\mu|(E)$. Ainsi

$$\mu \perp m \Rightarrow |\mu| \perp m. \tag{2.4}$$

Mesure absolument continue par rapport a la mesure de Lebesgue

Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. On dit que μ est **absolument continue** par rapport a la mesure de Lebesgue et on note $\mu \ll m$ si $m(E) = 0$ implique $\mu(E) = 0$. Si μ est absolument continue par rapport à m, il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$. On écrit aussi $d\mu(x) = f(x)dx$.

Théorème de Radon-Nikodym et dérivée d'une mesure au sens de Radon-Nikodym

Théorème 2.3.1 (de Radon-Nikodym) *Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure complexe définie sur $\mathbb{R}$, i.e. $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple (ν, ρ) de mesures de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ tel que*

$$\mu = \nu + \rho \text{ avec } \nu \perp m \text{ et } \rho \ll m.$$

L'objet de la section suivante (cf. [22], Chap. 8, p. 148) est de montrer que si f est **la dérivée de Radon-Nikodym de** μ, i.e. la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\rho(E) = \displaystyle\int_E f(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s, x+s[)}{2s} = f(x) \ m\text{-presque partout.}$$

2.3.2 Dérivées supérieures et inférieures d'une mesure à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$

Définition 2.3.1 *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, on pose $I_{x,s} =]x-s, x+s[$. Soit μ une mesure à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$.*
*On appelle **dérivée supérieure de** μ **en** x la quantité*

$$\overline{D}(\mu)(x) := \limsup_{s\to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}.$$

*On appelle **dérivée inférieure de** μ **en** x la quantité*

$$\underline{D}(\mu)(x) := \liminf_{s\to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}.$$

Nous allons tout d'abord donner deux lemmes précisant certaines propriétés des dérivées supérieures et inférieures d'une mesure positive.

Lemme 2.3.1 *Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est **positive** alors $\overline{D}(\mu)$ et $\underline{D}(\mu)$ sont des fonctions boréliennes (i.e. l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^+$ est un borélien de $\mathbb{R}$).*

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose :

$$\Delta_n(x) = \frac{\mu(I_{x,\frac{1}{n}})}{\frac{2}{n}} = \frac{n\mu(I_{x,\frac{1}{n}})}{2}.$$

Soit $s \in]0,1[$ et soit $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n+1} < s \leq \frac{1}{n}$. Comme μ est une mesure positive on a :

$$\mu\left(I_{x,\frac{1}{n+1}}\right) \leq \mu(I_{x,s}) \leq \mu\left(I_{x,\frac{1}{n}}\right)$$

et donc

$$\frac{n}{2}\mu\left(I_{x,\frac{1}{n+1}}\right) \leq \frac{\mu(I_{x,s})}{2s} \leq \frac{n+1}{2}\mu\left(I_{x,\frac{1}{n}}\right).$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{n}{n+1}\Delta_{n+1}(x) \leq \frac{\mu(I_{x,s})}{2s} \leq \frac{n+1}{n}\Delta_n(x).$$

Comme $\limsup_{n\to\infty}\Delta_n(x) = \limsup_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\Delta_n(x) = \limsup_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\Delta_{n+1}(x)$ et $\liminf_{n\to\infty}\Delta_n(x) = \liminf_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\Delta_n(x) = \liminf_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\Delta_{n+1}(x)$, on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty}\Delta_n(x) = \limsup_{s\to 0}\frac{\mu(I_{x,s})}{2s} \text{ et } \liminf_{n\to\infty}\Delta_n(x) = \liminf_{s\to 0}\frac{\mu(I_{x,s})}{2s}.$$

Fixons $n \geq 1$ et choisissons $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < x - \frac{1}{n}$. On obtient alors :

$$\frac{2}{n}\Delta_n(x) = \mu\left(I_{x,\frac{1}{n}}\right) = \mu\left(\left]a, x+\frac{1}{n}\right[\right) - \mu\left(\left]a, x-\frac{1}{n}\right]\right).$$

La positivité de μ implique que $x \longmapsto \mu\left(\left]a, x+\frac{1}{n}\right[\right)$ et $x \longmapsto \mu\left(\left]a, x-\frac{1}{n}\right]\right)$ sont des fonctions croissantes donc boréliennes. Par conséquent, $x \longmapsto \Delta_n(x)$ est une fonction borélienne et $\overline{D}(\mu)$ et $\underline{D}(\mu)$ sont des fonctions boréliennes comme limite supérieure ou inférieure de fonctions boréliennes.

□

Lemme 2.3.2 *Soit μ une **mesure de Borel positive** sur $\mathbb{R}$ non nécessairement finie mais telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et soit A un borélien tel que $\mu(A) = 0$. Alors il existe un borélien $B \subset A$ tel que $m(B) = 0$ avec $\overline{D}(\mu)(x) = 0$ pour tout $x \in A \setminus B$.*

Preuve : Soit $P = \{x \in \mathbb{R} : \overline{D}(\mu)(x) > 0\}$. P est un borélien comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par la fonction borélienne $\overline{D}(\mu)$. Posons $B = A \cap P$. Par définition $B \subset A$ et si $x \in A \setminus B$ alors $x \notin P$ et donc $\overline{D}(\mu)(x) = 0$.

Il nous reste donc à vérifier que $m(B) = 0$.

On pose $P_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \overline{D}(\mu)(x) > \frac{1}{n}\right\}$, de sorte que $P = \cup_{n\geq 1}P_n$ et donc $B = P \cap A = \cup_{n\geq 1}(P_n \cap A)$. Si $m(P \cap A) > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $m(P_{n_0} \cap A) > 0$. On pose alors $D = P_{n_0} \cap A$. Nous savons que $m(D) = \sup\{m(K) : K \subset D, K \text{ compact}\}$ $(= \inf\{m(V) : V \supset D, V \text{ ouvert}\})$. Donc si $m(B) > 0$ il existe K compact, $K \subset D$ avec $m(K) > 0$.

Fixons $\delta > 0$. Comme $K \subset P_{n_0} = \left\{x \in \mathbb{R} : \limsup_{s\to 0}\frac{\mu(I_{x,s})}{2s} > \frac{1}{n_0}\right\}$, pour tout $x \in K$, il existe $s(x) > 0$ avec $s(x) < \delta$ vérifiant

$$\frac{\mu(I_{x,s(x)})}{2s(x)} \geq \frac{1}{n_0}.$$

La famille d'ouverts $(I_{x,s(x)})_{x\in K}$ forme un recouvrement ouvert de K. K étant compact, on peut en extraire un recouvrement fini $I_{x_1,s(x_1)}, \cdots, I_{x_k,s(x_k)}$ avec (modulo un réarrangement) $s(x_1) \geq \cdots \geq s(x_k)$. On pose ensuite $u_1 = 1$ et on définit la suite croissante d'entiers $u_2, \cdots, u_p$ avec $p \leq k$ par la relation :

$$u_{i+1} = \inf\{j \geq u_i : I_{x_j,s(x_j)} \cap (\cup_{t\leq i} I_{x_{u_t},s(x_{u_t})}) = \emptyset\}.$$

On s'arrête à $p \leq k$ tel que

$$(\cup_{t\leq p} I_{x_{u_t},s(x_{u_t})}) \cap I_{x_j,s(x_j)} \neq \emptyset \text{ pour tout } j > u_p.$$

Par construction les intervalles $L_i = I_{x_{u_i},s(x_{u_i})}$ sont disjoints deux à deux pour $1 \leq i \leq p$. Pour $1 \leq i \leq p$, on note ensuite par $\widetilde{L_i}$ l'intervalle ouvert $]x_{u_i} - 3s(x_{u_i}), x_{u_i} + 3s(x_{u_i})[$. Autrement dit $\widetilde{L_i}$ est, comme L_i, centré en x_{u_i} mais a une longueur triple de celle de L_i. Nous allons vérifier que $(\widetilde{L_i})_{1\leq i\leq p}$ est un recouvrement ouvert de K.
Si $i = u_t$ pour un certain t avec $1 \leq t \leq p$ alors $I_{x_i,s(x_i)} = L_t \subset \widetilde{L_t}$.
Si $i \neq u_t$ pour tout t avec $1 \leq t \leq p$, soit t_0 le plus grand entier tel que $u_{t_0} < i$. Alors $I_{x_i,s(x_i)}$ rencontre $I_{x_{u_j},s(x_{u_j})}$ pour un certain $j \leq t_0$. Comme $u_j \leq u_{t_0} < i$, la longueur de $I_{x_i,s(x_i)}$ qui vaut $2s(x_i)$ est donc par construction inférieure ou égale à $2s(x_{u_j})$ qui est la longueur de L_j. Ainsi on a donc $I_{x_i,s(x_i)} \subset \widetilde{L_j}$.
En résumé on a montré que les intervalles $(L_i)_{1\leq i\leq p}$ étaient disjoints deux à deux et que $(\widetilde{L_i})_{1\leq i\leq p}$ forment un recouvrement ouvert de K.
Soit K_δ le compact défini par $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, K) \leq \delta\}$ (c'est la continuité de la distance qui nous garantit que K_δ est compact). Par construction les intervalles L_i, $1 \leq i \leq p$, sont centrés en des points de K et de demi-longueur strictement inférieures à δ, on a donc $\cup_{1\leq i\leq p} L_i \subset K_\delta$. Les intervalles L_i, $1 \leq i \leq p$, étant deux à deux disjoints on a donc :

$$\mu(K_\delta) \geq \sum_{1\leq i\leq p} \mu(L_i)$$

Comme L_i est de la forme $]x-s, x+s[$ avec $\frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} \geq \frac{1}{n_0}$, on a donc :

$$\mu(L_i) \geq \frac{m(L_i)}{n_0} = \frac{m(\widetilde{L_i})}{3n_0} \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

On en déduit :

$$\mu(K_\delta) \geq \sum_{1\leq i\leq p} \frac{m(\widetilde{L_i})}{3n_0} \geq \frac{1}{3n_0} m(\cup_{1\leq i\leq p}\widetilde{L_i}) \geq \frac{1}{3n_0} m(K),$$

avec $m(K) > 0$. Comme $K = \cap_{m\geq 1} K_{\frac{1}{m}}$, on a donc :

$$\mu(K) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(K_{\frac{1}{m}}\right) \geq \frac{1}{3n_0} m(K) > 0.$$

D'autre part, comme $K \subset A$ avec $\mu(A) = 0$, nécessairement $\mu(K) = 0$. On a donc une contradiction et on en déduit que $m(B) = 0$ avec $B = A \cap P$.

□

Corollaire 2.3.1 *Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \perp m$ alors*

$$D(\mu)(x) := \lim_{s\to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$$

existe et est nul m-presque partout.

Preuve : D'après (2.4) nous avons $|\mu| \perp m$. Ainsi il existe un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = 0$ et $|\mu|(E) = |\mu|(E \cap A)$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$. Soit $D = \mathbb{R} \setminus A$. On a donc

$$|\mu|(D) = |\mu|(D \cap A) = 0.$$

D'après le Lemme 2.3.2, il existe un borélien $F \subset D$ tel que $m(F) = 0$ et $\overline{D}(|\mu|)(x) = 0$ pour tout $x \in D \setminus F$. Comme $\frac{|\mu(I_{x,s})|}{2s} \leq \frac{|\mu|(I_{x,s})}{2s}$, $\overline{D}(|\mu|)(x) = 0$ implique $D(\mu)(x) = 0$ pour tout $x \in D \setminus F$. Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $D \setminus F$ est $\mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus F)) = A \cup F$. Comme $m(A) = 0 = m(F)$, on a donc $m(A \cup F) = 0$ et donc $D(\mu)(x)$ est nul m-presque partout.

□

Corollaire 2.3.2 *Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \ll m$ alors*

$$D(\mu)(x) := \lim_{s\to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$$

existe et coïncide avec $f(x)$ m-presque partout où f est la fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit f la fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$. Si f est continue, on a :

$$\mu(]x-s, x+s[) = \int_{x-s}^{x+s} f(t)dt,$$

et donc

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s, x+s[)}{2s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2s} \int_{x-s}^{x+s} f(t)dt = f(x).$$

Dans un premier temps nous allons nous restreindre au cas où μ **est une mesure réelle**. Dans ce cas f est elle-aussi à valeurs réelles.

Pour $r \in \mathbb{Q}$ on pose $A_r = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\}$ et $B_r = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq r\}$. On définit la mesure λ_r sur tout borélien E de $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\lambda_r(E) = \int_{E\cap B_r} (f(x) - r)dx.$$

λ_r a bien un sens car $x \longmapsto f(x) - r$ est mesurable. Comme $f(x) - r$ est positive sur $E \cap B_r$, la mesure λ_r est positive. D'autre part, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et comme la mesure de Lebesgue est finie sur les compacts, la mesure λ_r est finie sur les compacts. De plus $\lambda_r(A_r) = \int_\emptyset (f(x) - r)dx = 0$. D'après le Lemme 2.3.2, il existe un borélien $A'_r \subset A_r$ tel que $m(A_r \setminus A'_r) = 0$ et $\overline{D}(\lambda_r)(x) = 0$ pour tout $x \in A'_r$. Par construction, la mesure λ_r est positive et donc $D(\lambda_r)(x) \geq 0$. Ainsi $\overline{D}(\lambda_r)(x) = 0$ pour tout $x \in A'_r$ implique $D(\lambda_r)(x) = 0$ pour tout $x \in A'_r$. On pose $Y := \cup_{r\in\mathbb{Q}}(A_r \setminus A'_r)$. $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, Y est la réunion dénombrable d'ensembles de mesures de Lebesgue nulle. On a donc $m(Y) = 0$. Soit $x \notin Y$ et soit r un rationnel tel que $r > f(x)$. On a donc $x \in A_r$ et comme $x \notin Y$, on a donc $x \in A'_r$. On a donc $\lim_{s\to 0} \frac{\lambda_r(]x-s, x+s[)}{2s} = 0$. On remarque que :

$$\lambda_r(]x-s, x+s[) = \int_{]x-s,x+s[\cap B_r} (f(t)-r)dt \geq \int_{]x-s,x+s[} (f(t)-r)dt = \mu(]x-s, x+s[) - 2rs,$$

car pour $t \in A_r$ on a $(f(t) - r) \leq 0$. On en déduit ainsi que :

$$\frac{\lambda_r(]x-s,x+s[)}{2s} + r \geq \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s}.$$

Ainsi, si $x \notin Y$ et si r est un rationnel tel que $r > f(x)$, on a :

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} \leq r.$$

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ nous permet d'affirmer que pour tout $x \notin Y$ on a :

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} \leq f(x).$$

Par un raisonnement analogue appliqué cette fois-ci à la mesure $(-\mu)$ qui reste absolument continue par rapport à m (et dont la dérivée de Radon-Nikodym est $-f$) on montre qu'il existe un borélien Z de mesure de Lebesgue nulle tel que si $x \notin Z$ on a :

$$\limsup_{s\to 0} \frac{-\mu(]x-s,x+s[)}{2s} \leq -f(x),$$

ce qui implique :

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} = -\limsup_{s\to 0} \frac{-\mu(]x-s,x+s[)}{2s} \geq -(-f(x)) = f(x).$$

On a donc montré que si μ est une mesure réelle absolument continue par rapport à m, pour tout $x \notin (Y \cup Z)$ avec $m(Y \cup Z) = 0$ (car $m(Y) = m(Z) = 0$), $D(\mu)(x)$ existe et coïncide avec $f(x)$.

On obtient la preuve du corollaire dans le cas où μ est une mesure complexe en considérant séparément la partie réelle $\mu_1 = Re(\mu)$ et la partie imaginaire $\mu_2 = Im(\mu)$ de μ qui sont absolument continues par rapport à m si $\mu \ll m$.

$\square$

La combinaison du Théorème de Radon-Nikodym (Théorème 2.3.1) avec les Corollaire 2.3.1 et Corollaire 2.3.2 nous donne le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple de mesures (ν, ρ) avec $\nu \perp m$ et $\rho \ll m$ et il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \rho(E) = \displaystyle\int_E f(x)dx \text{ pour tout borélien } E \text{ de } \mathbb{R} \\ D(\mu)(x) := \displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} = f(x) \ m\text{-presque partout.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors $D(\mu)(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et si on pose $\nu(E) := \mu(E) - \int_E D(\mu)(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ alors $\nu \perp m$.

Il existe un analogue du théorème ci-dessus pour des mesures complexes sur $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$ (cf. [22]).

2.3.3 Limite radiale de l'intégrale de Poisson par rapport à $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$

Proposition 2.3.1 *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. L'intégrale de Poisson par rapport à μ est la fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ définie par :*

$$P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t),$$

pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\limsup_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{i\theta}) \leq \overline{D}(\mu)(\theta) := \limsup_{s\to 0} \frac{\mu(]\theta - s, \theta + s[)}{2s}.$$

Preuve : Soit $\delta \in]0, \pi[$. On a alors :

$$P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

D'après la Proposition 1.3.1, on a $P_r(\theta - t) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}$. Si $\pi \geq |\theta - t| \geq \delta$ on obtient $P_r(\theta - t) \leq \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = P_r(\delta)$ et donc

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t)\right| \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} d|\mu|(t) \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\|\mu\|.$$

On remarque que comme $\delta \in]0, \pi[$, $\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1^-} \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = 0$. Nous allons estimer à présent $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta+\delta}^{\theta-\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t)$.
On considère le domaine Δ de $\mathbb{C}$ défini par $\Delta = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \theta - s < t < \theta + s, 0 < s < \delta\}$ (cf. Figure 2.1). Calculons $I = \displaystyle\iint_\Delta P_r'(s)\, ds d\mu(t)$. Comme la fonction P_r' est continue et

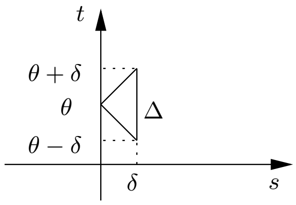


FIG. 2.1 – Domaine d'intégration Δ

bornée et comme on l'intègre sur un intervalle borné, d'après le Théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\delta \left(\int_{\theta-s}^{\theta+s} d\mu(t) \right) P_r'(s)ds = \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)P_r'(s)ds \quad \text{et} \\ I &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(\int_{|\theta-t|}^{\delta} P_r'(s)ds \right) d\mu(t) = \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} (P_r(\delta) - P_r(|\theta-t|))d\mu(t) \\ &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} (P_r(\delta) - P_r(\theta-t))d\mu(t), \end{aligned}$$

car P_r est une fonction paire. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\delta)d\mu(t) + \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)(-P_r'(s))ds \\ &= P_r(\delta)\mu(]\theta-s,\theta+s[) + \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)(-P_r'(s))ds, \end{aligned}$$

avec $-P_r'(s) \geq 0$ pour tout $s \in [0,\delta]$ car P_r est décroissante sur $[0,\delta]$ car $\delta \in]0,\pi[$. Soit $A > \overline{D}(\mu)(\theta)$. Si δ est assez petit, on a :

$$\forall s \in]0,\delta], \mu(]\theta-s,\theta+s[) < 2sA.$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) &\leq 2A\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta 2As(-P_r'(s))ds \\ &= 2A(\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds). \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on a :

$$\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds = \delta P_r(\delta) + [-sP_r(s)]_0^\delta + \int_0^\delta P_r(s)ds$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\delta P_r(s)ds \\ &\leq \int_0^\pi P_r(s)ds = \pi. \end{aligned}$$

Finalement, pour δ assez petit, comme $\displaystyle\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) \leq 2\pi A$, on obtient :

$$\forall A > \overline{D}(\mu)(\theta), \quad P(\mu)(re^{i\theta}) \leq A + P_r(\delta)\frac{\|\mu\|}{2\pi}.$$

Comme $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\delta) = 0$, $\limsup_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{i\theta}) \leq \overline{D}(\mu)$.

□

Nous déduisons aisément de la proposition précédente le théorème suivant :

Théorème 2.3.3 *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue),* $\lim_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it})$ *existe et si on pose $\varphi(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it})$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et φ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, si l'on pose $\nu(E) := \mu(E) - \int_E \varphi(e^{it})dt$ pour tout borélien E de $\mathbb{T}$, alors $\nu \perp m$.*

Preuve : Supposons tout d'abord que μ est à valeurs réelles. En appliquant la Proposition 2.3.1 à $-\mu$, comme $P_{-\mu} = -P(\mu)$, $\limsup_{r\to 1^-} -P(\mu)(re^{it}) = -\liminf_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it})$ et $\overline{D}(-\mu) = -\underline{D}(\mu)$, on obtient :

$$\underline{D}(\mu)(\theta) \leq \liminf_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it}) \leq \limsup_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it}) \leq \overline{D}(\mu)(\theta).$$

Or, d'après le Théorème 2.3.2, $\underline{D}(\mu)(\theta) = \overline{D}(\mu)(\theta) = D(\mu)(\theta)$ m-presque partout et de plus $D(\mu)$ coïncide avec la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.. On en déduit immédiatement l'assertion du théorème. Si μ est une mesure complexe, on écrit $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures à valeurs réelles. Comme $D(\mu_1)$ et $D(\mu_2)$ existent m-presque partout et comme $D(\mu) = D(\mu_1) + iD(\mu_2)$, $D(\mu)$ est bien défini m-presque partout. Comme $P(\mu) = P(\mu_1) + iP(\mu_2)$, l'assertion du théorème reste vraie si μ est une mesure complexe.

□

2.3.4 Applications : description de certaines fonctions harmoniques

En utilisant le Corollaire 2.2.1 et le Théorème 2.3.3, on obtient une description des fonctions harmoniques positive sur $\mathbb{D}$.

Corollaire 2.3.3 *Soit F une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$F^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} F(re^{it})$$

existe m-presque partout et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure positive finie ν sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$ et $F = P(F^*) + P(\nu)$ avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)(re^{it}) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Plus généralement, d'après le Théorème 2.2.1 et le Théorème 2.3.3, on obtient la description des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ telles que $\sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})| d\theta < \infty$.

Corollaire 2.3.4 *Soit F une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ telle que $\sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})| d\theta < \infty$. Alors*

$$F^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} F(re^{it})$$

existe m-presque partout et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure finie ν sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$ et $F = P(F^*) + P(\nu)$ avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)(re^{it}) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par $u(z) = Im\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right)$.

1. *Démontrer que u est une fonction harmonique qui n'est pas identiquement nulle mais dont toutes les limites radiales sont nulles.*
2. *Démontrer que la fonction u n'est l'intégrale de Poisson d'aucune mesure μ sur $\mathbb{T}$ et qu'elle n'est pas la différence de deux fonctions harmoniques positives dans $\mathbb{D}$.*

Exercice 2.4.2

Soit μ une mesure de Borel positive réelle sur $\mathbb{R}$ (une mesure de Borel est une mesure définie sur la tribu des boréliens d'un espace séparé localement compact) telle que $\mu \perp m$. Alors $D(\mu)(x) = +\infty$ presque partout par rapport à la mesure μ.

Exercice 2.4.3 *[utiliser l'exercice 2.4.2]*

Soit μ une mesure de Borel positive réelle sur $\mathbb{T}$ non identiquement nulle et telle que $\mu \perp m$. Si $u = P(\mu)$, démontrer que $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \infty$ pour au moins un $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.4.4 *[utiliser l'exercice 2.4.2]*

Soit u une fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$ telle que $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = 0$ pour tout $e^{i\theta} \neq 1$. Démontrer qu'il existe une constante c telle que $u(re^{i\theta}) = cP_r(\theta)$.

Exercice 2.4.5 *Soit Φ l'ensemble des fonctions harmoniques positives dans $\mathbb{D}$ telles que $u(0) = 1$. Montrer que Φ est un ensemble convexe et trouver les points extrémaux de Φ (un point x d'un ensemble convexe Φ est appelé un point extrémal de Φ si l'on ne peut pas trouver de segment contenant x dont les extrémités sont dans Φ et sont différentes de x).*
Indication : *Si C est l'ensemble convexe des mesures de Borel positives sur $\mathbb{T}$, de variation totale 1, montrer que les points extrémaux de C sont exactement les mesures de Dirac concentrées en un point de $\mathbb{T}$.*

Chapitre 3

La classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$

3.1 Rappels : primitive de fonction holomorphe, fonctions $\log^+$ et $\log^-$, décomposition de Jordan d'une mesure complexe

3.1.1 Primitive de fonction holomorphe

Les équivalences que donnent le théorème suivant se trouvent en particulier dans [15].

Théorème 3.1.1 *Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Ω est homéomorphe à $\mathbb{D}$.*
2. *Ω est simplement connexe.*
3. *Pour toute fonction holomorphe sur Ω et pour tout lacet γ dans Ω : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*
4. *Toute fonction holomorphe sur Ω possède une primitive (holomorphe) dans Ω.*
5. *Toute fonction holomorphe f sur Ω ne s'annulant pas sur Ω possède une détermination holomorphe de $\log f$, i.e. , il existe g holomorphe sur Ω vérifiant $f = e^g$.*

3.1.2 Fonctions $\log^+$ et $\log^-$

La fonction $\log^+$ est la fonction continue définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log^+(s) = \begin{cases} \log s & \text{si} \quad s \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < s < 1. \end{cases}$$

Autrement dit, $\log^+(s) = \sup(\log s, 0)$.

La fonction $\log^-$ est la fonction continue définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log^-(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \geq 1 \\ -\log s & \text{si} \quad 0 < s < 1. \end{cases}$$

Autrement dit, $\log^-(s) = \sup(-\log s, 0)$.

On a donc $\log(s) = \log^+(s) - \log^-(s)$ et $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$.

3.1.3 Décomposition de Jordan d'une mesure réelle

Soit μ une mesure réelle sur une tribu $\mathcal{M}$ d'un ensemble X. On définit les mesures μ^+ et μ^- par

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \text{ et } \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

où $|\mu|$ est la mesure positive définie pour tout $E \in \mathcal{M}$ par :

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i \geq 1} |\mu(E_i)| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition dénombrable de } E \right\}.$$

Alors μ^+ et μ^- sont des mesures positives telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. La mesure μ^+ est appelée la **variation positive de** μ et la mesure μ^- est appelée la **variation négative de** μ. La décomposition de μ sous la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée la **décomposition de Jordan** de μ.

Théorème 3.1.2 (de décomposition de Hahn) *Soit μ une mesure réelle (finie) sur une tribu $\mathcal{M}$ d'un ensemble X. Il existe deux ensembles A et B de $\mathcal{M}$ tels que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ et tels que les variations positives et négatives de μ satisfassent :*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \textit{ et } \mu^-(E) = -\mu(E \cap B) \textit{ pour tout } E \in \mathcal{M},$$

*ce qui implique en particulier que $\mu^+ \perp \mu^-$. Le couple (A, B) est appelé **la décomposition de Hahn de** X induite par μ.*

Preuve : Nous avons vu dans le paragraphe 2.1.2 qu'il existait une fonction h mesurable avec $|h| = 1$ $|\mu|$-presque partout et $d\mu = hd|\mu|$. Comme μ est réelle, h est aussi à valeurs réelles. Ainsi, quitte à redéfinir h sur un ensemble négligeable par rapport à la mesure $|\mu|$, on peut supposer que les deux seules valeurs que prend h sont 1 et -1. On définit ensuite les deux éléments A et B de $\mathcal{M}$ par $A := \{x \in X : h(x) = 1\}$ et $B := \{x \in X : h(x) = -1\}$. Comme $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\frac{1}{2}(1+h) = \begin{cases} h \text{ sur } A \\ 0 \text{ sur } B \end{cases}$, nous en déduisons que pour tout $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu| = \int_{E\cap A} hd|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Comme $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on obtient $\mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$.

□

3.2 Définition de la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ et description des fonctions de $\mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$

Définition 3.2.1 *La classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ est définie par :*

$$\mathcal{N} := \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt < \infty \right\}.$$

Les fonctions de $\mathcal{N}$ étant holomorphes, ce sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ à valeurs complexes. Nous allons tout d'abord considérer les fonctions de $\mathcal{N}$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$.

Théorème 3.2.1 *Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une mesure (finie) réelle μ sur $\mathbb{T}$ dont les variations positives et négatives μ^+ et μ^- satisfont :*

$$f(z) = e^{i\lambda} \frac{e^{\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu^-(t)}}{e^{\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu^+(t)}}.$$

En particulier f est le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

Preuve : Comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe, d'après le Théorème 3.1.1, si $f \in \mathcal{N}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, il existe $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $f = e^g$ et ainsi $\log|f| = Re(g)$.

Par conséquent $\log|f|$ est harmonique (comme partie réelle d'une fonction holomorphe). D'après le Corollaire 1.2.3, pour $0 \leq r < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{it})|dt = 2\pi \log|f(0)|.$$

Comme, par définition de $\mathcal{N}$, $\sup\limits_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{it})|dt < \infty$ et comme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|f(re^{it})|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{it})|dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{it})|dt,$$

on obtient :

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^-|f(re^{it})|dt < \infty.$$

De plus, comme $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$, on a :

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{it})||dt < \infty.$$

D'après le Théorème 2.2.1, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log|f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. Comme $\log|f|$ est réelle, il est clair que μ est réelle. On a donc

$$Re(g(z)) = \log|f(z)| = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right).$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) + i\lambda,$$

ce qui implique

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)},$$

où μ est une mesure réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la décomposition de Jordan d'une mesure μ réelle et d'après le Théorème 3.1.2, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ avec μ^+ et μ^- mesures positives telles que $\mu^+ \perp \mu^-$ (car concentrées sur deux ensembles disjoints). Finalement on obtient :

$$f(z) = e^{i\lambda}\frac{e^{\dfrac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^-(t)}}{e^{\dfrac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^+(t)}}.$$

On remarque que si ν est une mesure positive, on a :

$$\left| e^{\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)} \right| = e^{Re\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)} = e^{-P_\nu(z)} \leq 1,$$

car si $\nu \geq 0$, $-P_\nu(z) \leq 0$. La fonction $f \in \mathcal{N}$ est donc le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

$\square$

Nous allons tout d'abord énoncer un résultat concernant les fonctions analytiques bornées qui nous permettra de caractériser les fonctions f de $\mathcal{N}$ qui ne s'annulent pas et de conclure à l'existence de limite radiale pour f m-presque partout.

Lemme 3.2.1 *Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$ muni de la norme du supremum $\|\cdot\|_\infty$. Alors , $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) et appartient à $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Preuve : Soit f une fonction analytique et bornée sur $\mathbb{D}$. Nous avons

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{it})|dt \leq 2\pi\|f\|_\infty \text{ où } \|f\|_\infty := \sup_{|z|<1}|f(z)|.$$

De plus, comme f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ elle est harmonique sur $\mathbb{D}$. D'après le Corollaire 2.3.4, $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe m-presque partout et $f^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus $|f^*(e^{it})| \leq \|f\|_\infty$ m-presque partout. Ainsi on obtient $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

$\square$

Nous pouvons décrire à présent les fonctions de $\mathcal{N}$ sans zéro.

Théorème 3.2.2 *Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors, $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) et de plus $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure réelle $\mu \perp m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}.$$

Preuve : D'après le Théorème 3.2.1, il existe $g, h \in H^\infty(\mathbb{D})$ avec $g(z) \neq 0$ et $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\|g\|_\infty \leq 1, \|h\|_\infty \leq 1$ et $f = \frac{g}{h}$. Ainsi

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{it})| dt \leq 2\pi \text{ et } \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{it})| dt \leq 2\pi.$$

D'après le Lemme 3.2.1, $g^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} g(re^{it})$ et $h^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} h(re^{it})$ existe pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe et h ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, il existe une fonction $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que $h = e^\ell$. Comme $\|h\|_\infty \leq 1$, la fonction $Re(\ell)(= \log |h|)$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$. D'après le Corollaire 2.3.3, $\varphi(e^{it}) := \lim_{r \to 1^-} \log |h(re^{it})|$ existe pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Il existe donc un borélien A de $[0, 2\pi]$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $t \in [0, 2\pi] \setminus A$, on est simultanément :

$$\begin{cases} \lim_{r \to 1^-} \log |h(re^{it})| & = & \varphi(e^{it}) & \text{existe} \\ \lim_{r \to 1^-} h(re^{it}) & = & h^*(e^{it}) & \text{existe.} \end{cases}$$

Par conséquent, pour $t \in [0, 2\pi] \setminus A$, on a $|h^*(e^{it})| \neq 0$. Si B est un borélien de mesure de Lebesgue nulle telle que $g^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} g(re^{it})$ existe pour tout $t \in [0, 2\pi] \setminus B$, on a donc :

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{it}) \text{ existe pour tout } t \in [0, 2\pi] \setminus (A \cup B) \text{ et } f^*(e^{it}) = \frac{g^*(e^{it})}{h^*(e^{it})}.$$

Nous avons vu dans la preuve du Théorème 3.2.1 que f était de la forme

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)}$$

avec μ mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log |f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 2.3.3, $d\mu(t) = \varphi(e^{it}) dt + d\nu(t)$ avec $\nu \perp m$ et $\varphi(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} \log |f(re^{it})|$ pour presque tout t (par rapport à la mesure de Lebesgue) avec $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Nous venons de voir que, pour presque tout t, $\varphi(e^{it}) = \log |f^*(e^{it})|$. On obtient donc $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f^*(e^{it})| dt} \times e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t)},$$

avec ν mesure réelle, $\nu \perp m$.

$\square$

3.3 La formule de Jensen et ses conséquences

Dans cette section, nous allons montrer que les zéros de fonctions de $\mathcal{N}$, s'ils forment une suite infinie, tendent en module vers 1 assez rapidement.

Afin de démontrer **la formule de Jensen**, nous allons établir le lemme suivant.
Lemme 3.3.1

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0.$$

Preuve : On remarque tout d'abord que :

$$|1-e^{i\theta}| = |(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta|^{1/2} = |2(1-\cos\theta)|^{1/2} = |2\sin(\theta/2)|.$$

Si l'on pose $I = \int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta$, on obtient :

$$I = \int_0^{2\pi} \log|2\sin(\theta/2)|d\theta = \int_0^{2\pi} \log(2\sin(\theta/2))d\theta.$$

En effectuant le changement de variable $s=\theta/2$ et en utilisant le fait que $\sin(\pi-x)=\sin x$, on obtient :

$$I = \int_0^{\pi} 2\log(2\sin s)ds = 4\int_0^{\pi/2} \log(2\sin s)ds. \tag{3.1}$$

D'autre part, comme $\sin(\pi/2-s)=\cos s$, on a aussi $I = 4\int_0^{\pi/2}\log(2\cos s)ds$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{2}\left(4\textstyle\int_0^{\pi/2}\log(2\sin s)ds + 4\int_0^{\pi/2}\log(2\cos s)ds\right) = 2\textstyle\int_0^{\pi/2}\log(4\cos s\sin s)ds \\ &= 2\textstyle\int_0^{\pi/2}\log(2\sin 2s)ds = \int_0^{\pi}\log(2\sin u)du \text{ avec } 2s=u. \end{aligned}$$

Comme $\sin(\pi-x)=\sin x$, on obtient ainsi $I = 2\int_0^{\pi/2}\log(2\sin u)du$. D'après (3.1) on a donc $2I=I$, ce qui implique $I=0$.

□

Théorème 3.3.1 (Formule de Jensen) *Soient $0<r<R$ et soit f holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$ avec $f(0)\neq 0$. Si $\alpha_1,\cdots\alpha_N$ désigne la suite des zéros (éventuellement vide) de f dans le disque fermé $\overline{D(0,r)}$ comptés selon leur multiplicité, alors on a :*

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

avec la convention $\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n|}=0$ si f n'a pas de zéro dans $\overline{D(0,r)}$.

Preuve : Si f n'a pas de zéros dans $\overline{D(0,r)}$, elle n'en a pas dans le disque ouvert $D(0,r+\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit. Comme $D(0,r+\varepsilon)$ est simplement connexe, d'après le Théorème 3.1.1, il existe g holomorphe dans $D(0,r+\varepsilon)$ telle que $f=e^g$, ce qui implique $\log|f| = Re(g)$. D'après le Corollaire 1.2.3 appliquée à la fonction harmonique $\log|f|$ continue sur $\overline{D(0,r)}$ (puisque harmonique sur $D(0,r+\varepsilon)$) et harmonique sur $D(0,r)$, on a :

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Si f a des zéros dans $\overline{D(0,r)}$, on peut les énumérer de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\alpha_1| \leq \cdots |\alpha_m| & < & r \\ |\alpha_{m+1}| = \cdots |\alpha_N| & = & r. \end{array}\right.$$

On pose alors

$$g(z) = f(z) \times \prod_{n=1}^{m} \frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n - z)} \times \prod_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}.$$

Par construction la fonction g est holomorphe dans $D(0,R)$ et elle ne s'annule pas dans $\overline{D(0,r)}$. D'après ce qui précède on a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta = \log|g(0)|,$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \sum_{n=1}^{m} \log\frac{r}{|\alpha_n|} = \log|f(0)| + \sum_{n=1}^{N} \log\frac{r}{|\alpha_n|}$$

puisque $\frac{r}{|\alpha_n|} = 1$ pour $m+1 \leq n \leq N$. Il nous reste à vérifier que $\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$. Tout d'abord on remarque que si $|z| = r$ et si $|\alpha_n| < r$ alors $\left|\frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n-z)}\right| = 1$. En effet, si $|z| = r$, on a :

$$|r(\alpha_n - z)| = r|\alpha_n - z| = |\overline{z}||\alpha_n - z| = |\overline{z}\alpha_n - r^2| = |r^2 - \overline{\alpha_n}z|.$$

On a donc :

$$\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \sum_{n=m+1}^{N} \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_n - re^{i\theta}}\right| d\theta.$$

Or si $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| d\theta = -\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i(\theta-\theta_n)}| d\theta = -\int_{-\theta_n}^{2\pi-\theta_n} \log |1 - e^{iu}| du,$$

en posant $u = \theta - \theta_n$. La périodicité de l'exponentielle nous donne finalement :

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| d\theta = -\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{iu}| du = 0,$$

d'après le Lemme 3.3.1. Par conséquent, on a bien $\int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$ et donc

$$\log |f(0)| + \sum_{n=1}^{N} \log \frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

□

Une première conséquence de la formule de Jensen est le résultat suivant.

Corollaire 3.3.1 *Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$ avec $f(0) \neq 0$ alors $r \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{it})| dt$ est fonction croissante de r avec $0 \leq r < R$ et en particulier $\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{it})| dt$ pour $0 \leq r < R$.*

Preuve : En effet, d'après la formule de Jensen, pour $0 \leq r < R$ on a :

$$\log |f(0)| + \sum_{n=1}^{N} \log \frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

avec $\log \frac{r}{|\alpha_n|} \geq 0$. Lorsque r augmente, $\sum_{n=1}^{N} \log \frac{r}{|\alpha_n|}$ augmente aussi.

□

La deuxième application de la formule de Jensen nous donne un renseignement sur la suite des zéros de toute fonction de $\mathcal{N}$.

Corollaire 3.3.2 *Si $f \in \mathcal{N}$ a une suite infinie de zéros $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ répétés selon leur multiplicité, alors nécessairement $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$.*

La condition $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$ implique que $|\alpha_n| \to 1$ assez rapidement.

Preuve : En remplaçant f par $g : z \longmapsto \frac{f(z)}{z^k}$ si 0 est un zéro de f de multiplicité k, on peut supposer que $f(0) \neq 0$. Pour cela il faut vérifier que $g \in \mathcal{N}$. Par construction, nous avons $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Il reste à vérifier que

$$J := \sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |g(re^{it})| dt = \sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}} \right| dt < \infty.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$ on a :

$$J = \max \left(\sup_{0 \le r \le \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}} \right| dt, \sup_{\varepsilon \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}} \right| dt \right).$$

Comme $\log^+(ab) \le \log^+ a + \log^+ b$ et comme $\frac{1}{r^k} \le \frac{1}{\varepsilon^k}$ pour $r \ge \varepsilon$, on obtient :

$$\sup_{\varepsilon \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}} \right| dt \le \sup_{\varepsilon \le r < 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon^k} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt \right) < \infty,$$

car $f \in \mathcal{N}$. La fonction $z \longmapsto \frac{f(z)}{z^k}$ continue sur le compact $\overline{D(0,\varepsilon)}$ est uniformément majorée par une constante M et de ce fait $\sup_{0 \le r \le \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}} \right| dt < \infty$. On a ainsi vérifié que $g \in \mathcal{N}$ et l'on peut donc supposer que $f(0) \neq 0$. Soit $(\alpha_n)_{n \ge 1}$ la suite (infinie) des zéros de f répétés selon leur multiplicité. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et considérons $r \in]0,1[$ tel que $r \ge \max_{n \le p} |\alpha_n|$. D'après la formule de Jensen (Théorème 3.3.1), on a :

$$\begin{aligned} \log |f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log \frac{r}{|\alpha_n|} &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{it})| dt \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt < M_0 < \infty, \end{aligned}$$

car $f \in \mathcal{N}$. L'entier p étant fixé, on fait tendre r vers 1^- et on obtient :

$$\log |f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log \frac{1}{|\alpha_n|} \le M_0,$$

et donc $\sum_{n=1}^{p} \log \frac{1}{|\alpha_n|} \le M_0 - \log |f(0)|$ pour tout entier $p \ge 1$. La série $\sum_{n \ge 1} \log \frac{1}{|\alpha_n|}$ étant à termes positifs, elle est donc convergente. Comme $|\alpha_n| \to 1$, on a aussi $\frac{1}{|\alpha_n|} \to 1$ et donc $\log \frac{1}{|\alpha_n|} \sim \frac{1}{|\alpha_n|} - 1 \sim 1 - |\alpha_n|$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $\sum_{n \ge 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$.

□

Le résultat suivant est en quelque sorte une réciproque du corollaire précédent.

Théorème 3.3.2 *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de complexes non nuls tels que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 1$ avec de plus $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$. Alors le produit infini*

$$\prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ dont les zéros sont exactement les nombres α_n répétés selon leur multiplicité. Enfin $B^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ existe m-presque partout et est de module 1 m-presque partout avec

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{it})| dt = 0.$$

Preuve : Rappelons que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes dans Ω telle que $\sum_{n\geq 1} |1 - f_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de Ω, alors le produit $\prod_{n\geq 1} f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers f fonction holomorphe sur Ω et l'ensemble des zéros de f est l'union des zéros de f_n, $n \geq 1$. Posons $f_n(z) = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z}$ et remarquons que

$$\begin{aligned} 1 - f_n(z) &= \frac{(1 - |\alpha_n|)(\alpha_n + |\alpha_n| z)}{\alpha_n(1 - \overline{\alpha_n} z)} \\ &= \frac{(1 - |\alpha_n|)(1 + \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} z)}{(1 - \overline{\alpha_n} z)}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$|1 - f_n(z)| \leq \frac{2(1 - |\alpha_n|)}{|1 - \overline{\alpha_n} z|} \leq \frac{2(1 - |\alpha_n|)}{1 - |z|} \leq \frac{2(1 - |\alpha_n|)}{1 - r},$$

si $|z| \leq r < 1$. Ainsi $\sum_{n\geq 1} |1 - f_n(z)|$ converge uniformément sur $\overline{D(0,r)}$ pour $r < 1$ si $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$ et donc $B(z) = \prod_{n\geq 1} f_n(z)$ définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ dont la suite des zéros est la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. De plus, pour $|z| = 1$, on a

$$|f_n(z)| = \left| \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \right| = \frac{|\alpha_n - z|}{|\overline{z} - \overline{\alpha_n}|} = 1.$$

D'après le principe du maximum appliqué à la fonction $z \longmapsto f_n(z)$ holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a $|f_n(z)| < 1$ pour $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent $|B(z)| < 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $B \in H^\infty(\mathbb{D})$. D'après le Lemme 3.2.1, $B^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ existe m-presque partout.

Montrons à présent que $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt = 0$. D'après le Corollaire 3.3.1, $r \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt$ est une fonction croissante de r avec $0 \le r < 1$. Comme les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt$ sont négatives, $\ell := \lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt$ existe et $\ell \le 0$. Posons $R_p(z) = \displaystyle\prod_{n=p+1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}$ et $B_p(z) := \dfrac{B(z)}{R_p(z)} = \displaystyle\prod_{n=1}^{p}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}$.

La fonction B_p est holomorphe sur $D(0,\frac{1}{r_p})$ avec $r_p = \max_{n\le p}|\alpha_n|$. On remarque que $|B_p(z)| = 1$ si $|z| = 1$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B_p(re^{it})|dt = 0,$$

car la fonction $z \longmapsto \log|B_p(z)|$ est continue pour $r_p < |z| < \frac{1}{r_p}$ et nulle sur $\mathbb{T}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt &= \lim_{r\to 1^-}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log|B_p(re^{it})|dt + \int_{-\pi}^{\pi}\log|R_p(re^{it})|dt\right)\\ &= \lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|R_p(re^{it})|dt,\end{aligned}$$

pour tout $p \ge 1$. D'après le Corollaire 3.3.1,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|R_p(re^{it})|dt \ge 2\pi\log|R_p(0)|.$$

Par conséquent pour tout $p \ge 1$, $\ell := \lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{it})|dt$ vérifie

$$\ell \ge 2\pi\log|R_p(0)| = 2\pi\log\left(\prod_{n\ge p+1}|\alpha_n|\right).$$

Comme $\sum_{n\ge 1}(1-|\alpha_n|) < \infty$, le produit infini $\prod_{n\ge 1}|\alpha_n|$ converge. D'après le critère de Cauchy pour la convergence d'un produit infini de termes strictement positifs (cf. exercice), on a $\lim_{p\to\infty}\prod_{n\ge p}|\alpha_n| = 1$. Finalement $\ell \ge 0$ et donc $\ell = 0$.

IL nous reste à vérifier que $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. D'après le lemme de Fatou (qui dit que si φ_n est une suite de fonctions **positives mesurables** sur $[-\pi,\pi]$, alors $\int_{-\pi}^{\pi}\liminf\varphi_n(t)dt \le \liminf\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt$ ou encore que si φ_n est une suite de fonctions **négatives mesurables** sur $[-\pi,\pi]$, alors $\limsup\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt \le \int_{-\pi}^{\pi}\limsup\varphi_n(t)dt$), si $r_n \to 1^-$, on a :

$$\limsup\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(r_ne^{it})|dt \le \int_{-\pi}^{\pi}\limsup\log|B(r_ne^{it})|dt$$

et donc $0 = \ell \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log |B^*(e^{it})| dt$. D'autre part, comme $|B^*(e^{it})| \leq 1$ m-presque partout, on a $\log |B^*(e^{it})| \leq 0$ m-presque partout. Finalement on en déduit que $\log |B^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout et donc $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout.

$\square$

Nous allons à présent définir les **produits de Blaschke** généraux.

Définition 3.3.1 *Un produit de Blaschke est un produit de la forme*

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_n \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, k entier naturel et $(\alpha_n)_n$ suite vide, finie ou infinie de points de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ tels que $\sum_n 1 - |\alpha_n| < \infty$ lorsque $(\alpha_n)_n$ est infinie. Par convention $\prod_n \frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z} = 1$ si $(\alpha_n)_n$ est une suite vide. Si $(\alpha_n)_n$ est vide ou finie (resp. infinie) on dit que le produit de Blaschke est fini (resp. infini).

Remarque 3.3.1 *D'après le Théorème 3.3.2, les produits de Blaschke sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ tels que $B^*(e^{it}) := \lim_{r \to \infty} B(re^{it})$ existe m-presque partout et est de module 1. De plus on a aussi*

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{it})| dt = 0.$$

*Les produits de Blaschke finis sont par construction continus sur $\overline{\mathbb{D}}$, ce sont donc des fonctions de $A(\mathbb{D})$, **l'algèbre du disque**, l'algèbre des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ continues sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

3.4 Description des fonctions de $\mathcal{N}$

Nous avons à présent tous les éléments pour donner une description complète des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Théorème 3.4.1 *Soit $f \in \mathcal{N}$ non identiquement nulle. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f, i.e. $B(z) = z^k \prod_{n \geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$ si 0 est un zéro d'ordre k de f et avec $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ suite des zéros non nuls de f répétés selon leur multiplicité. Alors*

$\frac{f}{B} \in \mathcal{N}$, $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe m-presque partout et $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Enfin il existe une mesure ν_f réelle (finie) sur $\mathbb{T}$, $\nu_f \perp m$ et un réel λ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait :

$$f(z) = e^{i\lambda} B(z) e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f^*(e^{it})|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu_f(t)}.$$

Preuve : Vérifions que $g := \dfrac{f}{B} \in \mathcal{N}$. Par construction, g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ (qui ne s'annule pas). Il reste à montrer que $\sup\limits_{0\le r<1} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right| dt < \infty$. Comme $\log^+(ab) \le \log^+(a) + \log^+(b)$ et comme $|B(re^{it})| < 1$ si $r < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right| dt &\le \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{1}{B(re^{it})}\right| dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|\frac{1}{B(re^{it})}\right| dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{it})| dt.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{it})|dt = 0$ et $\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt < \infty$ puisque $f \in \mathcal{N}$, on a donc $\sup\limits_{0\le r<1} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right| dt < \infty$, ce qui prouve que $\dfrac{f}{B} \in \mathcal{N}$.

Comme g est une fonction de $\mathcal{N}$ qui ne s'annule pas, d'après le Théorème 3.2.2, $g^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} g(re^{it})$ existe m-presque partout avec $\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$. D'autre part, d'après le Remarque 3.3.1, $B^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ existe m-presque partout et est de module 1. Comme $f = Bg$, on obtient $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) = B^*(e^{it})g^*(e^{it})$ définie m-presque partout avec $|f^*| = |g^*| \in L^1(\mathbb{T})$. La dernière assertion du Théorème 3.2.2 nous permet de conclure la preuve du théorème.

□

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres complexes.*

1. *Montrer que si* $\prod_{n\geq 1} u_n$ *converge strictement vers* $p \in \mathbb{C}^*$, *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
2. *Montrer que* $\prod_{n\geq 1} u_n$ *converge (au sens large) si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que si* $q > p \geq \varepsilon$, *alors* $|u_{p+1} \cdots u_q - 1| < \varepsilon$.

Exercice 3.5.2

1. *Soit* B *un produit de Blaschke, soit* $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ *une fonction à valeurs réelles et soit* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ *une mesure réelle (donc finie) telle que* $\mu \perp m$. *Vérifier que* f *définie sur* $\mathbb{D}$ *par*
$$f(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi(e^{it})dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}$$
est une fonction de $\mathcal{N}$.
2. *Montrer que pour tout fonction* $f \in \mathcal{N}$ *il existe un unique produit de Blaschke* B, *une unique fonction* $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ *à valeurs réelles et une unique mesure réelle* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ *telle que* $\mu \perp m$ *avec*
$$f(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi(e^{it})dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}.$$

Exercice 3.5.3 *Soit* $f \in \mathcal{N}$ *et soit* ν_f^+ *la variation positive de la mesure* ν_f *réelle associée à* f $(\nu_f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}),\ \nu_f \perp m)$. *Montrer que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{D}$ *par*
$$g(z) = f(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log^+|f^*(e^{it})|dt}\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu_f^+(t)}$$
est une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Chapitre 4

Les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

4.1 Rappels

4.1.1 Inégalité de Jensen

Théorème 4.1.1 (Inégalité de Jensen, p. 59 de [22]) *Soit μ une mesure positive sur une tribu $\mathcal{M}$ dans un ensemble Ω telle que $\mu(\Omega) \in]0, \infty[$. Soit $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$. On a l'inégalité*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ on obtient :

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

4.1.2 Inégalité de Hölder et Minkowski

Théorème 4.1.2 (p. 60 de [22]) *Soit X un espace mesuré, de mesure μ positive. Soient f et g deux fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, \infty]$.*

1. *Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) avec $1 < p < \infty$. Alors*

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \quad \textbf{\textit{inégalité de Hölder}}.$$

2. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \quad \textbf{\textit{inégalité de Minkowski}}.$$

L'inégalité de Hölder dans le cas où $p = q = 2$ s'appelle **l'inégalité de (Herman) Schwarz**.

4.1.3 L'espace $L^2(\mathbb{T})$

Théorème 4.1.3 (de Plancherel-Parseval) *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier ($c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$) alors*

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right)^{1/2} dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

De plus f est la somme de sa série de Fourier $(S_n(f))_{n\geq 0}$ (où $S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}$) avec $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0$.

Remarque 4.1.1 *Lorsque $f \notin L^2(\mathbb{T})$ f n'est pas en général égal à la somme de série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$.*

Théorème 4.1.4 (de Riesz-Fischer) *Toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$.*

4.2 Fonctions sous-harmoniques

4.2.1 Définition et caractérisation

Définition 4.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$ est dite **sous-harmonique** si elle a la propriété suivante : pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{D}$ dont la fermeture $\overline{\Omega}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$ vérifiant $f(z) \leq U(z)$ sur la frontière $Fr(\Omega)$ de Ω, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

En pratique, les fonctions continues à valeurs réelles sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ sont caractérisées par la **propriété locale de majoration par la valeur moyenne** avec laquelle il est souvent plus facile de travailler ([9], p. 7).

Théorème 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$. Alors f est sous-harmonique si et seulement si pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$ avec de plus*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \tag{4.1}$$

pour tout $\rho < \rho_0$.

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ et soit $\rho > 0$ tel que $\rho < \rho_0 = 1 - |z_0|$. Comme f est continue sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.3.1, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(z_0, \rho)$, continue sur $\overline{D(z_0, \rho)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle $\Gamma(z_0, \rho)$. Si f est sous-harmonique on a $f(z_0) \leq U(z_0)$. D'après le Corollaire 1.2.3, on a aussi $U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it}) dt$. Finalement on obtient :

$$f(z_0) \leq U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt,$$

ce qui prouve que (4.1) est une condition nécessaire pour que f soit sous-harmonique. Pour montrer que (4.1) est une condition suffisante pour que f soit sous-harmonique, supposons qu'il existe un domaine Ω avec $\overline{\Omega} \subset \mathbb{D}$, une fonction U harmonique dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $f(z) \leq U(z)$ sur $\partial\Omega$ avec $f(z_1) > U(z_1)$ pour un point $z_1 \in \Omega$. On définit la fonction h sur le compact $\overline{\Omega}$ par $h(z) = f(z) - U(z)$. Comme h est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, h atteint son maximum avec $m > 0$ car $h(z_1) > 0$. Soit $E \neq \emptyset$ l'ensemble où h atteint son maximum. Comme $h(z) \leq 0$ sur $\partial\Omega$, $E \subset \Omega$. Comme E est fermé (par continuité de h), il existe un point z_0 pour lequel aucune boule ouverte centrée en z_0 ne soit entièrement contenue dans E (sinon $E \neq \emptyset$ serait à la fois ouvert et fermé dans Ω connexe, et donc on aurait $E = \Omega$, ce qui est absurde puisque Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ tandis que E est un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$). Considérons à présent $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et tels que le cercle $\Gamma_{z_0,\rho}$ ne soit pas entièrement contenu dans E. Par conséquent $h(z) \leq m$ sur $\Gamma_{z_0,\rho}$ avec une inégalité stricte sur un ouvert de $\Gamma_{z_0,\rho}$ donc sur un arc (de longueur strictement positive). La fonction U harmonique vérifiant la propriété de la moyenne, on obtient ainsi :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt - U(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \rho e^{it}) - U(z_0 + \rho e^{it})) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0+\rho e^{it})dt \\ &< m = h(z_0) = f(z_0) - U(z_0), \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt < f(z_0)$, ce qui contredit (4.1) et termine la preuve du théorème.

□

Remarque 4.2.1 *D'après le Corollaire 1.2.3, il est clair que toute fonction harmonique à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction sous-harmonique.*

4.2.2 Exemples

1. Soit f analytique dans $\mathbb{D}$ et soit $p > 0$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |f(z)|^p$ est sous-harmonique.

   En effet, d'après le Théorème 4.2.1, il suffit de vérifier (4.1). Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Si $f(z_0) = 0$, (4.1) est automatique. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. D'après le principe des zéros isolés et le Théorème 3.1.1, il existe alors $\rho_0 > 0$ tel qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $D(z_0, \rho_0)$ avec $\overline{D(z_0, \rho_0)} \subset \mathbb{D}$ et ainsi on peut définir $z \longmapsto f(z)^p$ comme une fonction holomorphe dans $D(z_0, \rho_0)$. En particulier, pour tout $\rho < \rho_0$, on a :

   $$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(z_0+\rho e^{it}))^p dt,$$

   ce qui implique naturellement

   $$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|^p dt.$$

2. Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ et soit $p \geq 1$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |u(z)|^p$ est sous-harmonique.

   En effet, comme u est harmonique dans $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.2.3, pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ et pour tout $\rho < \rho_0 = 1 - |z_0|$, on a l'égalité :

   $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{it})dt,$$

   ce qui implique

   $$|u(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|dt.$$

Si $p = 1$, (4.1) est bien vérifiée et donc $|u|$ est sous-harmonique. Si $p > 1$, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |u(z_0 + \rho e^{it})| dt &\leq \left(\int_0^{2\pi} |u(z_0 + \rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} 1^q dt\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |u(z_0 + \rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} (2\pi)^{1/q}\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Par conséquent on a :

$$|u(z_0)|^p \leq (2\pi)^{1-p+p/q} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0 + \rho e^{it})|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0 + \rho e^{it})|^p dt,$$

ce qui prouve d'après le Théorème 4.2.1 que $|u|^p$ est sous-harmonique.

3. Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Alors $\log^+ |f|$ est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$.

   En effet, si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| \leq 1$, l'inégalité (4.1) est trivialement vérifiée. Si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| > 1$, par continuité de $|f|$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que $|f(z)| > 1$ sur $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$. Par conséquent pour tout $\rho < \rho_0$, $\log^+ |f(z)| = \log |f(z)|$ pour tout $z \in D(z_0, \rho)$. Comme $\log |f|$ est une fonction harmonique sur $D(z_0, \rho_0)$ (cf. Exercices 1.4.3 et 1.4.4), (4.1) est vérifiée (c'est même une égalité) pour $\rho < \rho_0$.

Proposition 4.2.1 *Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ et soit*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \text{ pour } 0 \leq r < 1.$$

Alors $r \longmapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Preuve : Soient $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme f continue sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.3.1, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(0, r_2)$, continue sur $\overline{D(0, r_2)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle $\Gamma(0, r_2)$. Comme f est sous-harmonique, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \overline{D(0, r_2)}$. On a donc :

$$\begin{aligned}m(r_1) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1 e^{it}) dt = U(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2 e^{it}) dt = m(r_2).\end{aligned}$$

□

4.3 Définitions des espaces de Hardy et premières propriétés

Définition 4.3.1 *Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} M_0(f,r) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt, \\ M_p(f,r) & = & \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt\right\}^{1/p}, \ \textit{si } 0 < p < \infty \ \textit{et} \\ M_\infty(f,r) & = & \sup_{t\in[0,2\pi[} |f(re^{it})|. \end{array}$$

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$, est défini par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sup_{0\leq r<1} M_p(f,r) < \infty\}.$$

Proposition 4.3.1 *Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$.*

Preuve : Nous avons vu précédemment que si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ alors $|f|^p$ et $\log^+|f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ pour $0 < p < \infty$. D'après la Proposition 4.2.1, $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p < \infty$) est une fonction croissante sur $[0,1[$. Le fait que $r \longmapsto M_\infty(f,r)$ est croissante sur $[0,1[$ est une conséquence du principe du maximum pour les fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

□

On peut alors redéfinir les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ (pour $0 < p \leq \infty$) ainsi que la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

Corollaire 4.3.1 *Pour $0 < p \leq \infty$ nous avons :*

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1^-} M_0(f,r) < \infty\}.$$

Notation : si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $0 < p \leq \infty$ nous noterons par $\|f\|_p$ la limite $\lim_{r\to 1^-} M_p(f,r)$. Le théorème suivant précise le lien entre les différents espaces de Hardy et la classe de Nevanlinna.

Théorème 4.3.1 *Nous avons les inclusions suivantes :*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$$

pour $0 < s < p < \infty$.

Preuve : Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0,\infty[$ on a $|f(re^{it})|^p \leq \|f\|_\infty^p$ pour $r \in [0,1[$ et $t \in [0,2\pi[$. On en déduit alors $M_p(f,r) \leq \|f\|_\infty$ pour $r \in [0,1[$, ce qui implique $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 0$.
Pour $p > s > 0$, d'après l'inégalité de Hölder, pour f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^s dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{s/p} (2\pi)^{1-s/p},$$

et donc $M_s(f,r) \leq M_p(f,r)$. Ainsi $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $p > s > 0$. Enfin, pour tout $s > 0$, comme $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\frac{\log x}{x^s} \leq A$ pour tout $x \geq 1$. Par conséquent, si f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt = \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} \log |f(re^{it})| dt \leq A \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} |f(re^{it})|^s dt.$$

On a donc $M_0(f,r) \leq AM_s(f,r)^s$, ce qui prouve que $H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ pour $s > 0$.

□

Théorème 4.3.2 *Si* $1 \leq p \leq \infty$*, l'espace de Hardy* $H^p(\mathbb{D})$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_p$ *est un espace de Banach.*

Preuve : La seule chose délicate à vérifier pour faire de $\|\cdot\|_p$ une norme est de vérifier que l'inégalité triangulaire est satisfaite. D'après l'inégalité de Minkowski (si $1 \leq p < \infty$) ou d'après l'inégalité triangulaire que vérifie le module sur $\mathbb{C}$ (si $p = \infty$), pour toutes les fonctions f et g mesurables sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, on a :

$$M_p(f+g,r) \leq M_p(f,r) + M_p(g,r) \text{ pour tout } r \in [0,1[.$$

Pour toutes les fonctions $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ (avec $1 \leq p \leq \infty$), on a donc $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ainsi $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $H^p(\mathbb{D})$. Pour $p < 1$, $H^p(\mathbb{D})$ est encore un espace vectoriel mais le problème est que $\|\cdot\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

Fixons à présent $p \in [1, \infty]$ et montrons que les espaces vectoriels normés $H^p(\mathbb{D})$ sont complets. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$. Soient r, R tels que $r < R < 1$ et supposons que $|z| \leq r$. On applique la formule de Cauchy à $f_n - f_m$ sur le cercle Γ_R centré en 0 et de rayon R. On obtient alors :

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{f_n(\xi) - f_m(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R - r} \int_{-\pi}^{\pi} R|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $|z| \leq r$ on a :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R - r} M_1(f_n - f_m, R).$$

Comme l'application $\varphi : x \longmapsto x^p$ est convexe pour $p \geq 1$, d'après l'inégalité de Jensen appliquée à la mesure μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} dt$ sur $[-\pi, \pi]$, on obtient :

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(f_n - f_m)(Re^{it})|}{2\pi} dt \right)^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f_n - f_m)(Re^{it})|^p dt,$$

et donc $M_1(f_n - f_m, R) \leq M_p(f_n - f_m, R)$. D'après la Proposition 4.3.1, $M_p(f_n - f_m, R) \leq \lim_{R\to 1^-} M_p(f_n - f_m, R) = \|f_n - f_m\|_p$ et donc pour $|z| \leq r$ on a :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R - r} \|f_n - f_m\|_p.$$

La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme on a supposé que $(f_n)_n$ était de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \geq 1$ tel que pour tout $n > m$ on ait $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $r < 1$ on obtient :

$$M_p(f - f_m, r) = \lim_{n\to\infty} M_p(f_n - f_m, r) \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon,$$

ce qui implique $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$. D'autre part, sachant que $\|f\|_p \leq \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p$, il est clair que $\|f\|_p < \infty$. La suite $(f_n)_n$ converge donc dans $H^p(\mathbb{D})$ qui est donc un espace de Banach.

□

Théorème 4.3.3 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit f une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Si B est le produit de Blaschke associé à f ($f \in \mathcal{N}$) alors $\frac{f}{B} \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\left\|\frac{f}{B}\right\|_p = \|f\|_p$.*

Preuve : Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et soit B_n le produit de Blaschke fini associé aux n premiers zéros de f. Nous avons vu que B_n est une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec $|B_n(e^{it})| = 1$ pour $t \in \mathbb{R}$. Comme B_n est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, B_n est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Par conséquent, si l'on choisit $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $\nu < 1$ tel que pour tous $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \nu$ on ait $|B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon$. En particulier, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$ on a $|B_n(re^{it}) - B_n(e^{it})| < \varepsilon$. Comme $|B_n(e^{it})| = 1$, on obtient $1 - \varepsilon < |B_n(re^{it}| < 1 + \varepsilon$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$. On en déduit :

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|f(re^{it})| < \left|\frac{f(re^{it})}{B_n(re^{it})}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}|f(re^{it})|$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$. Si $p \in]0, \infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$ on obtient ainsi

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\|_p < \left\|\frac{f}{B_n}\right\|_p < \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_p$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Finalement on a $\|g_n\|_p = \|f\|_p$ avec $p \in]0, \infty[$ et avec $g_n = \frac{f}{B_n}$. Posons $g = \frac{f}{B}$. Par construction $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ et $(|g_n(z)|)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. D'après le théorème de convergence monotone, pour $p \in]0, \infty[$ et pour $r \in [0, 1[$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{it})|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(re^{it})|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{it})|^p dt,$$

ce qui implique $M_p(g, r) = \lim_{n\to\infty} M_p(g_n, r)$. Comme $r \longmapsto M_p(g_n, r)$ est une fonction croissante avec $\lim_{r\to 1^-} M_p(g_n, r) = \|f\|_p$, on obtient $\lim_{n\to\infty} M_p(g_n, r) \leq \|f\|_p$ pour tout $r \in [0, 1[$ et donc $\|g\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(g, r) \leq \|f\|_p$. Par conséquent $g \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. D'autre part, comme $|B(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on en déduit $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi on a $\|g\|_p \geq \|f\|_p$. Finalement, pour $p \in]0, \infty[$, nous avons $\|g\|_p = \|f\|_p$. Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, comme $\sup_{z\in\mathbb{D}} |g_n(z)| = \|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty$, on a $|g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout entier $n \geq 1$. Comme pour $z \in \mathbb{D}$ nous avons $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$, on a $\|g\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leq \|f\|_\infty$. De plus, comme $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on obtient $\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty$, et donc $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.

□

4.4 Théorèmes de factorisation

Nous venons de voir que, d'après le Théorème 4.3.3, toute fonction f non identiquement nulle de $H^p(\mathbb{D})$ ($p \in]0,\infty]$) peut se factoriser sous la forme $f = Bg$ où B est un produit de Blaschke et $g \in H^p(\mathbb{D})$ sans zéro dans $\mathbb{D}$. Il existe une factorisation plus subtile qui fait l'objet de la section suivante.

4.4.1 Les fonctions intérieures

Définition 4.4.1 *Une fonction **intérieure** est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout (avec $U^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} U(re^{it})$).*

Le résultat suivant donne une description complète de toute fonction intérieure.

Théorème 4.4.1 *Soit $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, soit B un produit de Blaschke et soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$. Pour $z \in \mathbb{D}$ on pose*

$$U(z) = cB(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t)}. \tag{4.2}$$

La fonction U est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Preuve : Supposons que U soit définie sur $\mathbb{D}$ par (4.2). Par construction $U \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Posons $g = \frac{U}{B}$. On note que $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure finie négative $-\nu$. Ainsi $\log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$, ce qui implique $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, g et par suite U sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$. De plus, comme $\nu \perp m$ et $\log|g| = -P(\nu)$, d'après le Corollaire 2.3.3, on a $\lim_{r\to 1^-} \log|g(re^{it})| = \log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout. On a donc $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme d'après la Remarque 3.3.1, $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, on a donc $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout et ainsi la fonction U est bien une fonction intérieure.

Réciproquement, soit U une fonction intérieure et soit B le produit de Blaschke associé à la suite de ses zéros comptés avec multiplicité. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{U}{B} \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|g\|_\infty = \|U\|_\infty = 1$ et par construction g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Il existe donc $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $\log|g| = Re(\ell)$, ce qui implique que $\log|g|$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. D'autre part $\log|g|$ est négative puisque $\|g\|_\infty = 1$. D'après la Remarque 3.3.1, $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, nécessairement $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout et donc $\log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout. D'après le Corollaire 2.3.3, il existe $\nu \geq 0$, ν finie sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ telle que $\log|g|$ soit l'intégrale de Poisson de $-\nu$. Finalement $\log|g|$ est la partie réelle de la fonction holomorphe $h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)$. Comme $g = e^\ell$ avec $Re(\ell) = Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$, on obtient $g(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$ avec $|c| = 1$ puisque $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t) - \ell \in i\mathbb{R}$. Ceci termine la démonstration.

$\square$

Un exemple très simple d'une fonction intérieure qui ne soit pas un produit de Blaschke est le suivant : prenons $c = 1$, $B(z) = 1$ et $\nu = \delta_1$, la mesure de Dirac en 1. On obtient alors que la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par $U(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ est une fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$.

Définition 4.4.2 *Les fonctions* ***intérieures singulières*** *sont les fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, i.e. les fonctions de la forme*

$$S_\nu(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

où $|c| = 1$ et où ν est une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$.

4.4.2 Les fonctions extérieures

Définition 4.4.3 *Une fonction* ***extérieure*** *est une fonction $Q \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme*

$$Q(z) = ce^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \varphi(e^{it})dt}$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive mesurable telle que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 4.4.1 *Soit Q une fonction extérieure reliée à φ comme dans la Définition 4.4.3. Alors*

1. *$\log |Q|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\log \varphi$.*
2. *$\lim_{r\to 1^-} |Q(re^{it})| = \varphi(e^{it})$ m-presque partout.*
3. *Pour $p \in]0, \infty]$, $Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.*

Preuve : Comme

$$|Q(z)| = e^{Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \varphi(e^{it})dt\right)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \log \varphi(e^{it})},$$

avec $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = P_r(\theta - t)$ si $z = re^{i\theta}$, on a $\log |Q(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log \varphi(e^{it})dt$, ce qui prouve 1. De plus, d'après 1. et en appliquant le Théorème 2.3.3, on obtient $\lim_{r\to 1^-} \log |Q(re^{it})| = \log \varphi(e^{it})$ m-presque partout, ce qui implique 2.
Si $p = \infty$, compte tenu de 2. l'assertion 3. est évidente. Supposons $p \in]0, \infty[$ et $Q \in H^p(\mathbb{D})$. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels de $]0, 1[$ tendant vers 1. D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (sur $\mathbb{T}$) $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie par $Q_n(e^{it}) = |Q(r_n e^{it})|^p$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{n\to\infty} Q_n(e^{it})dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(e^{it})dt,$$

ce qui implique (à l'aide de la Proposition 4.3.1) $\|Q^*\|_p \leq \|Q\|_p$. D'après 2., on a donc $\|\varphi\|_p \leq \|Q\|_p$. Par conséquent, si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Réciproquement, supposons que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. On a alors :

$$|Q(re^{i\theta})|^p = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log \varphi^p(e^{it})dt}.$$

D'après l'inégalité de Jensen, Théorème 4.1.1 appliqué à la fonction convexe $x \longmapsto e^x$ et à la mesure positive μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)dt$, on obtient :

$$e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log \varphi^p(e^{it})dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt.$$

On a donc

$$|Q(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la variable θ, sachant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\theta = 1$, on obtient $M_p(Q, r) \leq \|\varphi\|_p$, et donc $\lim_{r\to 1^-} M_p(Q, r) = \|Q\|_p \leq \|\varphi\|_p$. L'équivalence $Q \in H^p(\mathbb{D}) \Longleftrightarrow \varphi \in L^p(\mathbb{T})$ est démontrée. Il résulte des calculs ci-dessus que si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

□

4.4.3 Facteurs extérieures des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Proposition 4.4.2 *Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f, notée f^*, est telle que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.*

Preuve : Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, d'après le Théorème 4.3.1, $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ et d'après le Théorème 3.4.1, si $f \in \mathcal{N}$ alors $f^*(e^{it})$ est définie m-presque partout avec $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. De plus, pour $p \in]0, \infty[$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{2\pi} \liminf_{r\to 1^-} |f(re^{it})|^p dt \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dt \leq \lim_{r\to 1^-} M_p(f, r)^p = \|f\|_p^p.$$

Par conséquent, pour $p \in]0, \infty[$, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Pour $p = \infty$, comme $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc $|f^*(e^{it})| \leq \|f\|_\infty$ m-presque partout. De ce fait, si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ on a donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

□

Corollaire 4.4.1 *Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction extérieure Q_f définie par*

$$Q_f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt} \tag{4.3}$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$.

Remarque 4.4.1 *La fonction Q_f est appelée le **facteur extérieur** de f. Notons que Q_f ne dépend que de f^*, c'est à dire des limites radiales de f sur $\mathbb{T}$.*

Preuve : Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. D'après le Théorème 4.4.2, $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Par suite l'intégrale (4.3) est bien définie comme une fonction extérieure. De plus, comme d'après le Théorème 4.4.2, $f \in H^p(\mathbb{D})$ implique $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, la 3ième assertion de la Proposition 4.4.1 nous permet de conclure que $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$. □

4.4.4 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées par le théorème suivant :

Théorème 4.4.2

1. *Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0}|a_n|^2\right)^{1/2}$.*
2. *Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et le $n^{ième}$ coefficient de Fourier de f^* est a_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. De plus*
$$\lim_{s\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f^*(e^{it}) - f(se^{it})|^2 dt = 0$$
et f est l'intégrale de Poisson ainsi que l'intégrale de Cauchy de f^*.
3. *L'application $f \longmapsto f^*$ est un isomorphisme isométrique de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T}) := \{g \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{g}(n) = 0, n < 0\}$.*
4. *$H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*
$$< f, g >_{H^2(\mathbb{D})} = < f^*, g^* >_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})\overline{g^*(e^{it})}dt.$$

Preuve : Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. On a donc, pour $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(re^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$. D'après le théorème de **Plancherel-Parseval**, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Par convergence monotone discrète, on a :

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.$$

Comme $\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$, on obtient f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\right)^{1/2}$, ce qui termine la preuve de 1.
D'après la Proposition 4.4.2, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ si $f \in H^2(\mathbb{D})$. Supposons $f \in H^2(\mathbb{D})$ et pour $0 < s < 1$ on définit les fonctions f_s sur $\mathbb{T}$ par $f_s(e^{it}) = f(se^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n s^n e^{int}$. Comme $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$, le **théorème de Riesz-Fischer** nous garantit l'existence d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\hat{g}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1-s^n)a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Une nouvelle application de l'égalité de Plancherel-Parseval donne :

$$\|g - f_s\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} (1-s^n)^2 |a_n|^2.$$

Par convergence monotone décroissante discrète,

$$\lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} (1-s^n)^2 |a_n|^2 = 0.$$

On a donc $\lim_{s\to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$. Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D(0, \frac{1}{s})$. On a donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La fonction f_s étant en particulier harmonique sur $D(0, \frac{1}{s})$, d'après le Théorème 1.3.1, on a aussi, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it}) dt.$$

L'inégalité de Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) \leq \frac{1+r}{1-r}$, nous donne

$$\begin{aligned} \left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(f_s(e^{it}) - g(e^{it}))dt \right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f_s - g\|_2, \end{aligned}$$

et

$$\left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| = \left| \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| \leq \frac{1}{1-r}\|f_s - g\|_2.$$

Comme $\lim_{s\to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, on a donc

$$f(re^{i\theta}) = \lim_{s\to 1^-} f_s(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi.$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie comme l'intégrale de Poisson de la mesure $\mu \ll m$ définie par $d\mu(t) = g(e^{it})dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.3.3, $f^*(e^{it}) = g(e^{it})$ m-presque partout. On en déduit que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Enfin on a aussi :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f^*(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi,$$

ce qui termine la preuve de 2.

Puisque $\lim_{s\to 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, on a $\|f\|_2 := \lim_{s\to 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2$. Comme $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, l'application $\Phi : f \longmapsto f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$. Par définition l'application Φ est linéaire. Etant isométrique, elle est automatiquement injective. Enfin, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, g est de la forme $g(e^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{int}$ avec $\|g\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{D}$ par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1. L'application Φ est donc surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

Par définition, $< f, f >_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$. Comme $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé. De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le Théorème 4.3.2. Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

$\square$

Corollaire 4.4.2 *Si* $f \in H^1(\mathbb{D})$ *alors* $\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|dt = 0.$

Preuve : Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$. Comme par construction g ne s'annule par sur $\mathbb{D}$, il existe donc une détermination holomorphe du logarithme de g. De ce fait on peut définir la fonction holomorphe $h = g^{1/2}$ sur $\mathbb{D}$. On a donc $h^2 = g$ et finalement $f = Bg = (Bh)h$ avec $\|h\|_2^2 = \|g\|_1 = \|f\|_1$. Par conséquent h et $\ell := Bh$ sont deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ et $f = \ell h$. Pour $r \in]0,1[$, on définit la fonction f_r sur $\mathbb{T}$ par $f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \ell(re^{it})h(re^{it}) = \ell_r(e^{it})h_r(e^{it})$ si l'on pose $\ell_r(e^{it}) = \ell(re^{it})$ et $h_r(e^{it}) = h(re^{it})$. Comme $f^* = \ell^* h^*$, on a :

$$f^* - f_r = \ell^*(h^* - h_r) + h_r(\ell^* - \ell_r). \tag{4.4}$$

D'après le Théorème 4.4.2, comme $\ell, h \in H^2(\mathbb{D})$, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \|h^* - h_r\|_2 = 0 = \lim_{r\to 1^-} \|\ell^* - \ell_r\|_2 \text{ et } \|\ell^*\|_2^2 = \|\ell\|_2^2 = \|f\|_1, \quad \|h_r\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1.$$

L'inégalité de Schwarz appliquée aux deux produit du membre de droite de (4.4) nous donne :

$$\|f^* - f_r\|_1 \leq \|f\|_1^{1/2}(\|h^* - h_r\|_2 + \|\ell^* - \ell_r\|_2).$$

Il est à présent clair que $\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\|_1 = 0$.

Remarque 4.4.2 *Au cours de la démonstration du théorème précédent, nous avons montré que toute fonction de $H^1(\mathbb{D})$ est le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$.*

4.4.5 Factorisations des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Le Corollaire 4.4.2 va nous permettre d'établir la factorisation de toute fonction appartenant à un espace de Hardy sous la forme d'un produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure.

Théorème 4.4.3 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ où Q_f et le facteur extérieur de f, à savoir la fonction de $H^p(\mathbb{D})$ définie par :*

$$Q_f(z) = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f^*(e^{it})|dt}.$$

De plus

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})|dt, \tag{4.5}$$

avec égalité dans (4.5) si et seulement si U_f est constante, autrement dit, si et seulement si f est extérieure.

Preuve : Supposons tout d'abord que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Soit B est le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$ et $|f^*| = |g^*|$. Pour démontrer le théorème, quitte à remplacer g par f, on peut supposer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Nous avons déjà établi dans le corollaire 4.4.1 que $Q_f \in H^1(\mathbb{D})$. La 2ième assertion de la Proposition 4.4.1 nous dit que $|Q_f^*(e^{it})| = |f^*(e^{it})| \neq 0$ m-presque partout. Ainsi, si nous montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$, nous aurons montré que $\frac{f}{Q_f}$ est une fonction intérieure, ce qui prouvera qu'il existe une fonction intérieure telle que $f = U_f Q_f$. Comme $|Q_f|$ est égal à $e^{P(\log|f^*|)}$ (où $P(\log|f^*|)$ désigne l'intégrale de Poisson de $\log|f^*|$ définie par $P(\log|f^*|)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log|f^*(e^{it})|dt$ pour $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$), pour $z \in \mathbb{D}$, on a,

$$|f(z)| \leq |Q_f(z)| \Longleftrightarrow \log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z).$$

Vérifions à présent que $\log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour $|z| \leq 1$ et $0 < R < 1$ on définit f_R par $f_R(z) = f(Rz)$. Ainsi f_R est holomorphe dans $D(0, \frac{1}{R})$ et f_R ne s'annule pas. Par suite, $\log|f_R|$ est harmonique dans $D(0, \frac{1}{R})$. D'après le Théorème 1.3.1, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a donc

$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_R(e^{it})|P_r(\theta-t)dt.$$

Comme $\log = \log^+ - \log^-$, on a donc :

$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f_R(e^{it})|P_r(\theta-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-|f_R(e^{it})|P_r(\theta-t)dt.$$

Notons que pour $u, v > 0$, on a $|\log^+ u - \log^+ v| \leq |u - v|$. Par conséquent on obtient :

$$\left|P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) - P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\left||f_R(e^{it})| - |f^*(e^{it})|\right|dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})|dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f_R - f^*\|_1. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 4.4.2, $\lim_{R\to 1^-}\|f_R - f^*\|_1 = 0$. Ainsi, $\lim_{R\to 1^-} P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) = P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})$. D'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-|f^*(e^{it})|dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\liminf_{R\to 1^-}\log^-|f_R(e^{it})|dt \\ &\leq \liminf_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-|f_R(e^{it})|dt. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{R\to 1^-} P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) = P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})$$

et

$$\lim_{R\to 1^-} P(\log|f_R|)(re^{i\theta}) = \lim_{R\to 1^-}\log|f_R(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})|,$$

on obtient :

$$P(\log^-|f^*|)(re^{i\theta}) \leq P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta}) - \log|f(re^{i\theta})|,$$

ce qui implique

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq P(\log^+|f^*| - \log^-|f^*|)(re^{i\theta}) = P(\log|f^*|)(re^{i\theta}),$$

inégalité désirée qui permet de conclure que $\frac{f}{Q_f}$ est bien une fonction intérieure U_f dès que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Comme $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, en particulier, pour $z = 0$, on obtient l'inégalité (4.5). Notons que si $f(0) = 0$, (4.5) est trivialement vérifiée. L'égalité survient dans (4.5) si et seulement si $|f(0)| = |Q_f(0)|$. Comme $f(0) = U_f(0)Q_f(0)$, on a donc $U_f(0) = 1$ avec $\|U_f\|_\infty = 1$. D'après le principe du maximum, on a donc nécessairement $U_f = c$ avec $|c| = 1$. Ceci termine la preuve de cas où $p = 1$.
Lorsque $p \in]1, \infty]$, comme d'après le Théorème 4.3.1, $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$, il n'y a rien à faire. Considérons à présent le cas où $p \in]0, 1[$. Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ et soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f. Par construction, $g := \frac{f}{B}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ne s'annule pas. D'après le Théorème 4.3.3, $g \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p = \|f\|_p$. La fonction

g ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$ simplement connexe, il existe une détermination holomorphe φ du logarithme de g. On peut donc définir la fonction $h = e^{p\varphi} = g^p$. De plus, on a $\|g\|_p^p = \|h\|_1$, ce qui prouve que $h \in H^1(\mathbb{D})$ puisque $g \in H^p(\mathbb{D})$. La fonction f possède donc une factorisation de la forme $f = Bg = Bh^{1/p}$ avec $h \in H^1(\mathbb{D})$ sans zéro dans $\mathbb{D}$. D'après ce qui précède, $h = U_h Q_h$ avec U_h fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$ et Q_h extérieure. Comme

$$Q_h^{1/p}(z) = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\frac{1}{p}\log|h^*(e^{it})|dt} = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|h^*(e^{it})^{1/p}|dt}$$

avec $|h^*(e^{it})^{1/p}| = |g^*(e^{it})| = |f^*(e^{it})|$ m-presque partout, $Q_h^{1/p}$ est le facteur extérieur de f. De plus il est clair que $U_f^{1/p}$ est bien une fonction intérieure (singulière). Ainsi, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ f se décompose comme le produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure. L'inégalité (4.5) étant une conséquence de la factorisation que nous venons d'établir, elle reste vraie si $p \in]0, 1[$.

$\square$

Remarque 4.4.3 *Les fonctions Q_f et U_f sont appelées respectivement les* ***facteurs extérieures*** *et les* ***facteurs intérieures*** *de f. Le facteur U_f tient compte des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et du comportement de f^* sur $\mathbb{T}$ tandis que le facteur Q_f ne dépend que des valeurs de $|f^*|$ sur $\mathbb{T}$.*

4.5 Résultats fondamentaux sur les fonctions de H^p, $0 < p \leq \infty$

4.5.1 Limites radiales des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Nous avons déjà mentionné que $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ impliquait automatiquement que f^* soit définie m-presque partout avec de plus $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ceci mérite une mention spéciale, à savoir, un théorème d'unicité.

Théorème 4.5.1 *Soit $p \in]0, \infty]$ et supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(\mathbb{D})$. Alors $f^*(e^{it}) \neq 0$ m-presque partout. Par conséquent, si $f, g \in$*

$H^p(\mathbb{D})$ sont telles que $f^*(e^{it}) = g^*(e^{it})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, nécessairement $f = g$.

Preuve : Si $f^*(e^{it}) = 0$ alors $\log|f^*(e^{it})| = -\infty$ et si cela survient sur un ensemble de mesure positive, cela met en défaut le fait que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En appliquant ceci a $f - g \in H^p(\mathbb{D})$ si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ on a donc $f - g$ identiquement nulle dès que $(f^* - g^*)(e^{it})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive.

□

Remarque 4.5.1 *En fait le Théorème 4.5.1 est vrai sous l'hypothèse un peu plus générale $f \in \mathcal{N}$.*

Nous avons vu dans la Proposition 4.4.2 que si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Nous allons montrer qu'en fait l'application $f \longmapsto f^*$ est une isométrie de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 4.5.2 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.*

Preuve : D'après la Proposition 4.4.2, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ dès que $f \in H^p(\mathbb{D})$. Pour cela nous avons vérifié que $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$. D'autre part, d'après le Théorème 4.4.3 et la $3^{\text{ième}}$ assertion de la Proposition 4.4.1, $f = U_f Q_f$ avec Q_f extérieure, U_f intérieure et $\|Q_f\|_p = \|f^*\|_p$. Comme $Q_f = \frac{f}{U_f}$ avec $|U_f(z)| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$, on a immédiatement $|Q_f(z)| \geq |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Ceci implique $\|Q_f\|_p \geq \|f\|_p$. Finalement, on obtient :

$$\|f\|_p \leq \|Q_f\|_p = \|f^*\|_p \leq \|f\|_p,$$

ce qui prouve que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

□

Nous déduisons de ceci un résultat de convergence en moyenne vers la limite radiale dès que $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty[$. Pour démontrer ceci nous allons admettre le lemme suivant dont la preuve repose sur le Théorème d'Egoroff (cf. Théorème 5.6.20 de [24]).

Lemme 4.5.1 (p.21 de [9]) *Soit Ω un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et soit $\varphi_n \in L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, $n \geq 1$. Supposons de plus que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ m-presque partout sur Ω.*

Si

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p = \|\varphi\|_p < \infty,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p = 0.$$

Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, pour $0 < p < \infty$. Pour $0 < r < 1$ posons $g_r(t) = f(re^{it})$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Sachant que $\lim_{r\to 1^-} \|g_r\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(f, r) = \|f\|_p$ avec $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ (d'après le Théorème 4.5.2), et comme de plus $\lim_{r\to 1^-} g_r(t) = g^*(t)$ m-presque partout avec $g^*(t) := f^*(e^{it})$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.5.1 *Soit $p \in]0, \infty[$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors*

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f^*\|_p = 0,$$

avec, pour $0 < r < 1$ et $|z| \leq 1$, f_r définie par $f_r(z) = f(rz)$.

Remarque 4.5.2 *Le Corollaire ci-dessus n'est pas vérifié en général pour $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, nous avons besoin pour cela que f^* soit continue sur $\mathbb{T}$, autrement dit que f ne soit pas simplement dans $H^\infty(\mathbb{D})$ mais dans l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$.*

4.5.2 Résultat de représentation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$

Nous allons voir qu'une conséquence immédiate du Corollaire 4.4.2 est le fait que si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors f est égale à l'intégrale de Cauchy et à l'intégrale de Poisson de sa limite radiale.

Théorème 4.5.3 *Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$. Alors pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Preuve : Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$, d'après le Théorème 4.3.1, on a en particulier $f \in H^1(\mathbb{D})$. Pour $R \in]0, 1[$ posons $f_R(z) = f(Rz)$ fonction holomorphe sur $D(0, \frac{1}{R})$. En particulier f_R est harmonique sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. On a donc, d'après le Théorème 1.3.1,

$$f_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_R(e^{it}) dt \text{ pour } z = re^{i\theta}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|f_R(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})dt\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f^*(e^{it}) - f_R(e^{it})|dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f^* - f_R\|_1.\end{aligned}$$

Comme d'après le Corollaire 4.4.2, $\lim_{R\to 1^-} \|f^* - f_R\|_1 = 0$, on en déduit, $f(z) = P(f^*)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. D'autre part, f_R étant holomorphe sur $D(0, \frac{1}{R})$, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$f_R(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_R(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\left|f_R(z) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi\right| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_R(\xi) - f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi\right| \\ &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})}{e^{it} - re^{i\theta}}ie^{it}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})|dt \\ &= \frac{1}{1-r}\|f^* - f_R\|_1.\end{aligned}$$

Le Corollaire 4.4.2 permet alors de conclure que $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi$.

□

4.5.3 Identification entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leq p \leq \infty$

Théorème 4.5.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'application $\Phi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{T})$ telle que $\Phi(f) = f^*$ et où $H^p(\mathbb{T}) := \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$ est un isomorphisme isométrique.*

Preuve : La linéarité de Φ est évidente. Vérifions tout d'abord que si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p \leq \infty$, alors $\Phi(f) = f^* \in H^p(\mathbb{T})$. Comme d'après le Théorème 4.5.2, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$, il est clair que $\Phi(f) \in L^p(\mathbb{T})$. Il nous reste à vérifier que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Comme d'après le Théorème 4.3.1, nous avons $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$, il suffit de vérifier que si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Si $f \in H^1(\mathbb{D})$, en particulier, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. D'après le Théorème de Cauchy, pour $0 < r < 1$, on a

$$\int_{\Gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0 \text{ pour } n \geq 0,$$

où Γ_r désigne le cercle centré en 0 et de rayon r. Posons $\xi = re^{it}$. On obtient alors

$$\int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt = 0 \text{ pour } n \geq 0.$$

Le Corollaire 4.4.2 nous permet de dire que

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt$$

car

$$\left| \int_0^{2\pi} r^{n+1} f(re^{it}) e^{i(n+1)t} dt - \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt \right| \leq 2\pi \|f_r - f^*\|_1,$$

où $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$. On a donc $\int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{i(n+1)t} dt = 0$, ce qui prouve que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Une autre façon de vérifier ceci est d'utiliser le fait que $f \in H^1(\mathbb{D})$ est le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ dont les limites radiales sont dans $H^2(\mathbb{T})$ d'après le Théorème 4.4.2. Ainsi $\Phi(H^p(\mathbb{D})) \subset H^p(\mathbb{T})$ et Φ est une isométrie. De ce fait Φ est automatiquement injective. Vérifions la surjectivité de Φ pour conclure. Soit $p \in [1, \infty]$ et $g \in H^p(\mathbb{T})$. Comme en particulier $g \in L^1(\mathbb{T})$, on peut considérer la fonction harmonique f sur $\mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = P(g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt \text{ si } z = re^{i\theta}.$$

On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}) g(e^{it}) dt.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}$ étant normalement convergente pour $r < 1$, donc uniformément convergente, on en déduit :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(e^{it}) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \widehat{g}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) z^n.$$

Comme $\widehat{g}(n) = 0$ si $n < 0$, on a donc $f(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{g}(n) z^n$. La fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme f est l'intégrale de Poisson de $g \in L^1(\mathbb{T})$, d'après le Théorème 2.3.3, $f^* = g$ m-presque partout. Par conséquent $\|f^*\|_p = \|g\|_p < \infty$, ce qui implique $f \in H^p(\mathbb{D})$ d'après le Théorème 4.5.2. L'application Φ est donc surjective, c'est donc un isomorphisme isométrique.

□

Remarque 4.5.3 *Lorsque $p \in [1, \infty]$, compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, dans la plupart des articles de recherche on trouvera la notation H^p, laquelle désignera indifféremment $H^p(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{T})$ suivant le contexte.*

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1

1. *Montrer que toute fonction f de $\mathcal{N}$ non identiquement nulle se décompose sous la forme $f = B\dfrac{S_1}{S_2}Q$ où B est un produit de Blaschke, où S_1 et S_2 sont deux fonctions intérieures singulières et où Q est une fonction extérieure.*
2. *Réciproquement, montrer que toute fonction de la forme $B\dfrac{S_1}{S_2}Q$ (où B est un produit de Blaschke, où S_1 et S_2 sont deux fonctions intérieures singulières et où Q est une fonction extérieure) est bien dans la classe de Nevanlinna.*

Exercice 4.6.2 *Soit $p \in]0, \infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$.*

1. *Montrer que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ on a :*

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log |f^*(e^{it})| dt.$$

2. *Montrer l'équivalence suivante*

$$f \text{ est extérieure} \iff \exists z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}; \log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_0}(\theta_0 - t) \log |f^*(e^{it})| dt.$$

3. *Si l'on suppose à présent que $f \in \mathcal{N}$ au lieu de $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty]$, l'équivalence ci-dessus est-elle toujours vraie ?*

Exercice 4.6.3 (Théorème de F. et M. Riesz) *Soit μ une mesure complexe (finie) sur $[0, 2\pi]$. Supposons que pour tout $n < 0$ on ait :*

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) = 0.$$

Montrer qu'alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
Indication *: Poser $F(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}} d\mu(t)$. Vérifier que $F = P(d\mu)$ et que $F \in H^1(\mathbb{D})$ puis conclure.*

Chapitre 5

Sous-espaces invariants du shift

5.1 Introduction : le problème du sous-espace invariant

5.1.1 Notations et rappels

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ complet. Notons par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires continues (ou bornées) de X dans X. Les éléments de $\mathcal{L}(X)$ sont souvent appelés des **opérateurs**. Lorsque $T \in \mathcal{L}(X)$ on désignera par $\sigma(T)$ le **spectre** de T défini par

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible}\}.$$

Rappelons que si $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$ non vide. Le **spectre ponctuel** de T, noté $\sigma_p(T)$, est l'ensemble des valeurs propres de T. Autrement dit, par définition,

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non injective}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}.$$

Si X est de dimension finie, étant donnée que dans ce cas toute application linéaire est inversible si et seulement si elle est injective, on a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$. Par contre dès que X est de dimension infinie, on peut simplement affirmer que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ et $\sigma_p(T)$ peut être vide comme nous le verrons dans la suite.

Pour $T \in \mathcal{L}(X)$ on définit $Lat(T)$ comme l'ensemble de tous **les sous-espaces vectoriels fermés** $\mathcal{M}$ invariants par T, c'est-à-dire tels que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Automatiquement, pour $T \in \mathcal{L}(X)$, les sous-espaces vectoriels fermés $\{0\}$ et X sont des éléments de $Lat(T)$. On les appelle **les sous-espaces invariants triviaux de** T. Tout élément de $Lat(T)$ différent de $\{0\}$ et X est appelé **un sous-espace invariant non trivial** de T. Les opérateurs $T \in \mathcal{L}(X)$ tels que $Lat(T) = \{\{0\}, X\}$ sont appelés les opérateurs **transitifs**. En d'autres termes un opérateur transitif est un opérateur sans sous-espace invariant non trivial.

5.1.2 Le problème du sous-espace invariant

1. Si X est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie au moins égale à deux, tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ n'est pas transitif. En effet, dans ce cas, T est une matrice finie à coefficients complexes admettant des valeurs propres. Soit λ une valeur propre de T et soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Le sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{C}x$ étant de dimension 1, il est différent de $\{0\}$ et X. De plus, comme $Tx = \lambda x$, $\mathbb{C}x$ est invariant par T.

2. De façon plus générale, si $T \in \mathcal{L}(X)$ (avec X de dimension infinie ou finie au moins égale à deux) est tel que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$, alors T est non transitif.

3. Si X est un espace vectoriel complet sur $\mathbb{C}$ **non séparable** (i.e. contenant une partie dense non dénombrable), tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ n'est pas transitif. En effet, pour $x \in X \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{M}$ la fermeture de l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs du type $T^n x$ avec $n \in \mathbb{N}$. Par construction $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé de X différent de $\{0\}$ puisque $x \neq 0$ appartient à $\mathcal{M}$. D'autre part, $\mathcal{M}$ est invariant par T et $\mathcal{M} \neq X$ puisque $\mathcal{M}$ est séparable tandis que X ne l'est pas par hypothèse.

Grâce aux travaux de Peter Enflo [10, 11], Charles Read [17, 18, 19, 20, 21], Bernard Beauzamy [1], on sait qu'il existe des opérateurs transitifs $T \in \mathcal{L}(X)$ où X est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ complet de dimension infinie et séparable tel que ℓ^1. Cependant tous les exemples d'opérateurs transitifs que l'on connait ont été construit sur des espaces de Banach complexes non hilbertiens.

Ce qu'on appelle communément le **Problème du Sous-Espace Invariant** est un des problèmes les plus célèbres de théorie des opérateurs et il est ouvert depuis plus d'un demi-siècle. Son énoncé est le suivant :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ séparable et de dimension infinie. Existe-t-il un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ transitif ?

Il existe de très nombreux théorèmes donnant des conditions suffisantes pour que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ne soit pas transitif et les outils utilisés sont extrêmement variés, ce qui rend ce sujet de recherche particulièrement intéressant [6]. A titre d'exemple, signalons deux résultats basés sur des techniques tout à fait différentes. Le premier utilise un théorème ancien d'existence de point fixe (dû à Schauder, 1934) et le second est basée entre autre sur un procédé d'approximation (dû à S. Brown [4]) qui permet de conclure à la surjectivité d'une application bilinéaire [2].

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ séparable et de dimension infinie.

Théorème 5.1.1 ([13]) *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Supposons qu'il existe un opérateur compact $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ non identiquement nul tel que $TK = KT$. Alors T n'est pas transitif.*

En fait le résultat de Lomonosov est valable dans le cas plus général où X est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ de dimension infinie et séparable. Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est appelé un opérateur compact si l'adhérence de l'image par T de la boule unité fermée de X est un compact de X. En particulier, le résultat de Lomonosov nous dit que tout opérateur compact T n'est pas transitif puisque T commute avec lui-même.

Théorème 5.1.2 ([5]) *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|T\| \leq 1$. Si $\mathbb{T} \subset \sigma(T)$ alors T n'est pas transitif.*

Notons que pour le problème du sous-espace invariant, quitte à diviser par la norme de l'opérateur considéré, on peut toujours supposer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $\|T\| \leq 1$.

L'étude des sous-espaces invariants non triviaux d'un opérateur aide à concevoir son mode d'action (qui peut être très compliqué dès que l'opérateur est défini sur un espace de dimension infinie). En effet, de façon générale, dans l'étude d'une transformation quelconque, il est utile de savoir ce que cette transformation conserve.

Dans la suite nous allons étudier en détail les sous-espaces vectoriels fermés invariants par un opérateur très particulier appelé “shift” ou “opérateur de déplacement” sur l’espace de Hilbert ℓ^2. Historiquement c’est précisément cette étude qui a suggéré la définition de l’espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ et par la suite des espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$.

5.2 Le shift sur ℓ^2 et $H^2(\mathbb{D})$: définition et propriétes spectrales

5.2.1 Le shift sur ℓ^2

Soit $\ell^2 := \{(a_n)_{n\geq 0} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty\}$. Rappelons que l’espace de Hilbert ℓ^2 est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par $\|(a_n)_{n\geq 0}\|_2 = (\sum_{n\geq 0} |a_n|^2)^{1/2}$.

Définition 5.2.1 *Soit T l’application linéaire de ℓ^2 dans ℓ^2 définie par*

$$T((a_n)_{n\geq 0}) = (a_{n-1})_{n\geq 0} \text{ avec la convention } a_{-1} = 0.$$

L’application linéaire T est appelée le ***shift sur*** *ℓ^2.*

Proposition 5.2.1 *Le shift sur ℓ^2, T, est un opérateur de ℓ^2 isométrique. Par conséquent $\|T\| = 1$. De plus $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Preuve : Si $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, comme $T(a) = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots)$, il est clair que $\|T(a)\|_2 = \|a\|_2$, ce qui prouve que T est une isométrie. Comme

$$\|T\| = \sup_{a\in\ell^2:\|a\|_2\leq 1} \|T(a)\|_2 = \sup_{a\in\ell^2:\|a\|_2=1} \|T(a)\|_2,$$

automatiquement $\|T\| = 1$.

Pour déterminer $\sigma_p(T)$, on cherche à résoudre $Ta = \lambda a$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, $a \neq 0$. Comme $Ta = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots)$ on a donc $0 = \lambda a_1, a_0 = \lambda a_1, a_1 = \lambda a_2, \cdots$. En étudiant séparément le cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$, on obtient $a_n = 0, n \geq 0$, ce qui implique $\sigma_p(T) = \emptyset$. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda Id$ est injective. De ce fait $\lambda \in \mathbb{C}$ est un élément de $\sigma(T)$ si et seulement si $T - \lambda Id$ est non surjective. Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ la base canonique de ℓ^2, i.e., $e_k = (a_n)_{n\geq 0}$ avec $a_n = 0$ si $n \neq k$ et $a_n = 1$ si $n = k$. Il est clair que $T-\lambda Id$ est surjectif si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in (T - \lambda Id)\ell^2$. Comme toute suite appartenant à $T\ell^2$ a comme première coordonnée 0, $e_0 \notin T\ell^2$. De ce fait T n'est pas surjectif et donc $0 \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leq 1$. Alors $e_0 \notin (T - \lambda Id)\ell^2$. En effet, soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ tel que $(T - \lambda Id)a = e_0$. On a donc

$$-\lambda a_0 = 1, a_0 - \lambda a_1 = 0, a_1 - \lambda a_2 = 0, a_2 - \lambda a_3 = 0, \cdots$$

Finalement $a_n = -\frac{1}{\lambda^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$. Comme $|\lambda| \leq 1$, $\lambda \neq 0$, il est clair que $a \notin \ell^2$. Finalement $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(T)$. Supposons à présent $|\lambda| > 1$. Nous allons montrer que dans ce cas $T - \lambda Id$ est surjectif. Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on cherche $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ tel que $(T - \lambda Id)a = e_n$. On a donc

$$-\lambda a_0 = 0, a_0 - \lambda a_1 = 0, \cdots, a_{n-2} - \lambda a_{n-1} = 0, a_{n-1} - \lambda a_n = 1, a_n - \lambda a_{n+1} = 0, \cdots$$

On a donc $a_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $a_k = -\frac{1}{\lambda^{k-n+1}}$ si $k \geq n$. Comme $|\lambda| > 1$, la suite a est de carré sommable, c'est bien un élément de ℓ^2. Finalement $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

□

Remarque 5.2.1 *Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. Sachant que pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$, $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \|A\|$, on pouvait tout de suite dire que $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. De plus, sachant que le spectre est un compact de $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} \subset \sigma(T)$ implique $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(T)$. Autrement dit, modulo les deux résultats théoriques que l'on vient de rappeler (vrais en toute généralité), pour montrer que $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$, comme $\|T\| = 1$, il suffisait de vérifier que $\mathbb{D} \subset \sigma(T)$.*

Le spectre ponctuel de T est vide mais cependant il n'est pas difficile de trouver des sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^2 non triviaux invariants par T. Prenons par exemple $\mathcal{M} = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 : a_0 = 0, a_1 = 0, \cdots, a_{n_0} = 0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. Par contre il n'est pas du tout évident de décrire tous les éléments de $Lat(T)$. C'est dans ce but que nous allons introduire l'opérateur shift sur $H^2(\mathbb{D})$, espace de fonctions analytiques où il sera plus facile de raisonner.

5.2.2 Le shift sur $H^2(\mathbb{D})$

D'après le Théorème 4.4.2, l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. De plus $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\right)^{1/2} = \|a\|_2$. Une reformulation immédiate de ceci est le lemme suivant.

Lemme 5.2.1 *Soit $\varphi : \ell^2 \to H^2(\mathbb{D})$ défini par $\varphi(a) = f_a$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ et $f_a(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Alors φ est un isomorphisme isométrique.*

Nous allons à présent introduire l'opérateur shift sur $H^2(\mathbb{D})$.

Lemme 5.2.2 *L'application linéaire continue S de $H^2(\mathbb{D})$ dans lui-même définie par $S := \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ est l'isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $Sf = \alpha f$ avec $\alpha(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_p(S) = \emptyset$.*

Preuve : Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ définie par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. On a donc $\varphi^{-1}(f) = a$ et $T \circ \varphi^{-1}(f) = (a_{n-1})_{n\geq 0}$ avec $a_{-1} = 0$. Finalement $S(f) = g$ avec

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n = z \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} = z f(z).$$

Comme $S - \lambda Id = \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1}$ avec φ et φ^{-1} inversibles, il est clair que $T - \lambda Id$ est inversible si et seulement si $S - \lambda Id$ est inversible. De ce fait $\sigma(S) = \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. D'autre part, comme

$$(S - \lambda Id) f = 0 \Longleftrightarrow \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0 \Longleftrightarrow (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0,$$

l'injectivité de $T - \lambda Id$ et le fait que φ^{-1} soit injective, nous garantit que $S - \lambda Id$ est injective et donc $\sigma_p(T) = \emptyset$.

□

Compte tenu du lien entre T et S, on en déduit :

Lemme 5.2.3 *$Lat(T) = \{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in Lat(S)\}$.*

Preuve : Comme φ^{-1} est une application linéaire isométrique, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé, il en est de même pour $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$ (si V est une isométrie linéaire sur X et si

$(x_n) \subset X$ est de Cauchy, alors $(V(x_n))_n$ est elle aussi de Cauchy puisque $\|V(x_n) - V(x_p)\| = \|V(x_n - x_p)\| = \|x_n - x_p\|$).

De plus, si $\mathcal{M} \in Lat(S)$, on a $(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et donc $T(\varphi^{-1}(\mathcal{M})) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{M})$. Par conséquent nous avons $\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in Lat(S)\} \subset Lat(T)$. D'autre part, si $\mathcal{N} \in Lat(T)$, posons $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{N})$. On remarque que

$$S(\mathcal{M}) = (\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(\mathcal{M}) = (\varphi \circ T)(\mathcal{N}) \subset \varphi(\mathcal{N}) = \mathcal{M}.$$

Par conséquent tout élément $\mathcal{N} \in Lat(T)$ est de la forme $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M} \in Lat(S)$. Ainsi nous avons $Lat(T) = \{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in Lat(S)\}$.

□

5.3 Description de tous les sous-espaces invariants du shift sur $H^2(\mathbb{D})$

D'après le Lemme 5.2.3, nous obtiendrons une description complète de $Lat(T)$ si et seulement si on peut décrire entièrement $Lat(S)$. Nous allons tout d'abord vérifier que $\{\Phi H^2(\mathbb{D}) : \Phi \text{ fonction intérieure}\} \subset Lat(S)$.

Lemme 5.3.1 *Soit Φ une fonction intérieure. Alors $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \{\Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\}$ est un élément de $Lat(S)$.*

Preuve : Il est clair que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$. Pour vérifier que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, notons que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est l'image de $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur M_Φ défini par $M_\Phi(f) = \phi f$, $f \in H^2(\mathbb{D})$. Comme

$$\|\Phi f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})},$$

M_Φ est une isométrie, son image est fermée dans $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est bien un sous-espace vectoriel fermé dans $H^2(\mathbb{D})$.

Remarquons que

$$S(\Phi H^2(\mathbb{D})) = \{\alpha \Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\} \subset \{\Phi g : f \in H^2(\mathbb{D})\} = \Phi H^2(\mathbb{D}),$$

étant donné que si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $\alpha f \in H^2(\mathbb{D})$ puisque

$$\|\alpha f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\alpha^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Finalement $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \{\Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\} \in Lat(S)$ dès que Φ est une fonction intérieure.

□

Le résultat suivant nous dit qu'à une constante unimodulaire près il y a unicité de la "représentation" de tout élément de $Lat(S)$ de la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ où Φ est une fonction intérieure.

Lemme 5.3.2 *Soient Φ_1 et Φ_2 deux fonctions intérieures telles que $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$. Alors il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$.*

Preuve : D'après le Théorème 4.4.1, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{T}$, B_1 et B_2 deux produits de Blaschke associés à deux suites $(\alpha_n^1)_{n\geq 0}$ et $(\alpha_n^2)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ (satisfaisant $\sum_{n\geq 0} 1 - |\alpha_n^i| < \infty$ pour $i = 1, 2$) et deux mesures μ_1, μ_2 positives et singulières par rapport à la mesure de Lebesgue tels que

$$\Phi_i(z) = c_i B_i(z) S_{\mu_i}(z) \text{ avec } S_{\mu_i}(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu_i(t)} \text{ pour } i = 1, 2.$$

Rappelons que les fonctions intérieures singulières S_{μ_1} et S_{μ_2} ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$. L'égalité $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$ implique qu'il existe $f_1, f_2 \in H^2(\mathbb{D})$ telles que

$$c_1 B_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 B_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 B_1 S_{\mu_1} = c_2 B_2 S_{\mu_2} f_2.$$

En particulier $B_1(z) = 0$ implique $B_2(z) = 0$ et réciproquement. De ce fait B_1 et B_2 ont la même suite de zéros avec même multiplicité et donc $B_1 = B_2$. Nous en déduisons

$$c_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 S_{\mu_1} = c_2 S_{\mu_2} f_2.$$

Comme S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieures, $|f_i^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout pour $i = 1, 2$. Comme $f_i \in H^2(\mathbb{D})$ pour $i = 1, 2$, d'après le Théorème 4.4.2, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$f_i(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt.$$

Par conséquent $|f_i(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $i = 1, 2$. On en déduit que $|S_{\mu_1}(z)| \leq |S_{\mu_2}(z)|$ et $|S_{\mu_2}(z)| \leq |S_{\mu_1}(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi $|S_{\mu_1}(z)| = |S_{\mu_2}(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}}$ étant holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $\mathbb{D}$ et ne s'annulant pas, d'après le Théorème 1.2.1, il existe $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}} = e^{\ell}$ sur $\mathbb{D}$. En particulier on obtient $Re(l(z)) = \log\left|\frac{S_{\mu_1}(z)}{S_{\mu_2}(z)}\right| = 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Im(l(z)) = \lambda$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Finalement $S_{\mu_1} = e^{i\lambda} S_{\mu_2}$ et donc il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$.

□

Nous allons à présent vérifier que tous les éléments de $Lat(S)$ différents de $\{0\}$ sont de la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ où Φ est une fonction intérieure donnée.

Théorème 5.3.1 (de Beurling [3]) *Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de $Lat(S)$. Alors il existe une fonction intérieure Φ (unique à une constante unimodulaire près) tel que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$.*

L'unicité à une constante unimodulaire près résulte du Lemme 5.3.2. Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de $Lat(S)$ et soit $p = \inf\{k \geq 0 : \exists f \in \mathcal{M}$ avec 0 zéro d'ordre k de $f\}$. Soit $f \in \mathcal{M}$ de la forme $f(z) = \sum_{n \geq p} c_n z^n$ avec $c_p \neq 0$. Alors $f \notin S(\mathcal{M})$ car $S(\mathcal{M}) \subset \{g \in H^2(\mathbb{D}) : 0$ zéro d'ordre au moins $p+1$ de $g\}$. Comme S est une isométrie et $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$, $S(\mathcal{M})$ est aussi un sous-espace vectoriel fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. On a donc

$$\mathcal{M} = S(\mathcal{M}) \oplus (S(\mathcal{M})^{\perp} \cap \mathcal{M}),$$

avec $S(\mathcal{M})^{\perp} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ car il existe $f \in \mathcal{M} \setminus S(\mathcal{M})$. Soit $g \in \mathcal{M} \cap S(\mathcal{M})^{\perp}$, g non identiquement nulle, et soit $\Phi = \frac{g}{\|g\|_2}$. Comme $\mathcal{M} \in Lat(S)$ et $\Phi \in \mathcal{M}$, on a $S^n(\Phi) \in S(\mathcal{M})$ pour tout entier $n \geq 1$. On en déduit $< \Phi, S^n(\phi) >= 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque par construction $\phi \in S(\mathcal{M})^{\perp}$. En d'autres termes nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^*(e^{it}) \overline{e^{int} \Phi^*(e^{it})} dt = 0, \ n \geq 1.$$

En conjuguant l'expression ci-dessus nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} |\Phi^*(e^{it})|^2 e^{int} dt = 0, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Posons $u(e^{it}) = |\varphi^*(e^{it})|^2$. Comme $\Phi \in H^2(\mathbb{D})$, $\Phi^* \in L^2(\mathbb{T})$ et donc $u \in L^1(\mathbb{T})$ avec $\widehat{u}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De plus

$$\widehat{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi^*(e^{it})|^2 dt = \|\Phi\|_2^2 = 1.$$

Comme la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{Z}) \to c_0(\mathbb{Z})$ définie par $\mathcal{F}(f) = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective et comme tous les coefficients de Fourier de f coïncident avec ceux de la fonction constante égale à 1, $u(e^{it}) = 1$ m-presque partout et donc $|\Phi^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme $\Phi \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le Théorème 4.4.2, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$\Phi(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\Phi^*(e^{it})dt.$$

Par conséquent $|\Phi(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et donc $\Phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. En fait on a montré que Φ est une fonction intérieure.

Nous allons vérifier à présent que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$. Pour cela nous allons tout d'abord montrer que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$. Comme $\Phi \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \in Lat(S)$, $S^n(\Phi) = \alpha^n \Phi \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$, $P(\alpha)\Phi \in \mathcal{M}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$. D'après le Théorème 4.4.2, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ si $z \in \mathbb{D}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $P_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$. On a donc $\|f - P_k(\alpha)\|_2^2 = \sum_{n\geq k+1} |a_n|^2$, ce qui implique $\lim_{k\to\infty} \|f - P_k(\alpha)\|_2 = 0$ puisque $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Comme Φ est intérieure,

$$\|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^*(f^* - P_k(\alpha)^*)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^* - P_k(\alpha)^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f - P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Par conséquent $\lim_{k\to\infty} \|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_2 = 0$ avec $\Phi P_k(\alpha) \in \mathcal{M}$ pour tout entier k. Comme $\mathcal{M}$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, $\Phi f \in \mathcal{M}$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$. On a donc montré que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$.

Pour montrer que $\Phi H^2(\mathbb{D}) = \mathcal{M}$, il nous reste à vérifier que si $v \in \mathcal{M}$ et si $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$, alors $v = 0$. Notons que $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$ implique que $< v, \Phi\alpha^n >= 0$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part, comme $\Phi \perp S(\mathcal{M})$, on a aussi $< \Phi, S^n(v) >= 0$ pour tout $n \geq 1$. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*(e^{it})\overline{\Phi^*(e^{it})}e^{-int}dt & n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*(e^{it})\overline{\Phi^*(e^{it})}e^{int}dt & n \geq 1 \end{cases}$$

Comme $v \in H^2(\mathbb{D})$, $v^* \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. De plus, comme Φ est intérieure, nous avons $|v^*(e^{it})\overline{\Phi^*(e^{it})}| = |v^*(e^{it})|$ m-presque partout. Finalement la fonction $v^*\overline{\Phi^*}$ appartient à $L^1(\mathbb{T})$ et tous ses coefficients de Fourier sont nuls. L'injectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ nous garantit que $v^*\overline{\Phi^*} = 0$. Comme $|\Phi^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, on a $v^* = 0$ et par suite $v = 0$ d'après le Théorème 4.5.1.

$\square$

Remarque 5.3.1 *Si $\mathcal{M} = \alpha^{n_0} H^2(\mathbb{D})$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{M}) = \{a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 : a_0 = a_1 = \cdots = a_{n_0-1} = 0\}$. Cependant il n'est pas évident de décrire $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$ si $\mathcal{M}$ est un élément de $Lat(S)$ de la forme $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$ avec Φ fonction intérieure quelconque. Ceci explique pourquoi la description de $Lat(T)$ est si difficile si l'on ne transpose pas le problème de ℓ^2 dans $H^2(\mathbb{D})$.*

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 *Soient T le shift sur ℓ^2 et S le shift sur $H^2(\mathbb{D})$ définis comme dans la Définition 5.2.1 et le Lemme 5.2.2.*

1. *Identifier T^* et S^*.*
2. *Déterminer $\sigma_p(S^*)$ et $\sigma(S^*)$.*
3. *Vérifier que si $\mathcal{M} \in Lat(S)$ alors $\mathcal{M}^\perp \in Lat(S^*)$.*
4. *En déduire la description complète de $Lat(S^*)$.*

Exercice 5.4.2 *Soit U_f le facteur intérieur d'une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$ avec $f \neq 0$ et soit Y le plus petit sous-espace vectoriel fermé invariant par S et contenant f.*

1. *Montrer que $Y = U_f H^2(\mathbb{D})$.*
2. *En déduire que $Y = H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si f est une fonction extérieure.*

Chapitre 6

Opérateurs de Hankel et opérateurs de Toeplitz

Nous allons voir dans ce chapitre un aperçu de certains opérateurs très étudiés sur l'espace de Hardy $H^2 = H^2(\mathbb{T})$. La plupart des résultats présentés ici proviennent de [16, 8, 12, 14].

6.1 Opérateurs de Laurent et operators de Toeplitz

Soit $P_{H^2} : L^2(\mathbb{T}) \to H^2$ la projection orthogonale définie par :

$$P_{H^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Clairement, $\|P_{H^2} f\|_2 \leq \|f\|_2$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Définition 6.1.1 *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors l'opérateur de* Laurent *(ou opérateur de* multiplication*) $M_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est donné par :*

$$(M_\varphi f)(e^{it}) = \varphi(e^{it}) f(e^{it}). \tag{6.1}$$

Théorème 6.1.1 *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors M_φ est un opérateur borné et sa norme est donné par $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. De plus,*

$$\sup\{\|M_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\} = \|\varphi\|_\infty .$$

Si φ est une fonction mesurable sur $\mathbb{T}$ qui n'est pas dans $L^\infty(\mathbb{T})$, alors M_φ n'est pas un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$.

Preuve : Clairement, $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$, car :

$$\begin{aligned} \|M_\varphi f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})f(e^{it})|^2\,dt \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt = \|\varphi\|_\infty^2\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

La réciproque est un peu plus compliquée. Etant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ensemble $A_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ de mesure strictement positive tel que $|\varphi(e^{it})| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ sur A_ε.

On définit $\chi = \chi_{A_\varepsilon}$ comme la fonction qui est égale à 1 sur A_ε et 0 sur son complémentaire. On a $\chi \in L^2(\mathbb{T})$ et $\|\chi\|_2^2 = \mu(A_\varepsilon)$, où μ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

De plus,

$$\begin{aligned} \|M_\varphi \chi\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2\chi(e^{it})^2\,dt \\ &> (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2\mu(A_\varepsilon). \end{aligned}$$

Par conséquent $\|M_\varphi\chi\|_2/\|\chi\|_2 > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ et $\|M_\varphi\| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela nous montre que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$, et nous avons donc égalité.

A présent, notons que $\chi = \chi_{A_\varepsilon}$ n'est pas nécessairement dans H^2, mais, si l'on écrit $\chi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$, alors la suite de fonctions (f_m) donnée par

$$f_m(e^{it}) = e^{imt}\chi(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t}$$

satisfait $\|f_m\|_2 = \|\chi\|_2$ et

$$\|M_\varphi f_m\|_2 = \|M_{e^{imt}}M_\varphi\chi\|_2 > (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\|\chi\|_2.$$

A présent on remarque que :

$$\begin{aligned} \|P_{H^2}f_m - f_m\|_2 &= \left\| \sum_{k=-m}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t} \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k|^2 \right)^{1/2} \to 0 \qquad \text{lorsque } m \to \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $\|P_{H^2}f_m\|_2 \to \|\chi\|_2$ et $\|M_\varphi P_{H^2}f_m - M_\varphi f_m\|_2 \to 0$, ce qui implique

$$\|M_\varphi P_{H^2}f_m\|_2 \to \|M_\varphi \chi\|_2 \qquad \text{lorsque } m \to \infty.$$

Notons que $P_{H^2}f_m \in H^2$ et $\|M_\varphi P_{H^2}f_m\|_2/\|P_{H^2}f_m\|_2 > (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)$ pour m suffisamment grand, ce qui donne l'inéqualité inverse.

Finalement, si φ est essentiellement non borné, alors nous pouvons prendre des fonctions $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ telles que $|\varphi_n(e^{it})|$ croît de façon monotone vers $|\varphi(e^{it})|$ presque partout et $\|\varphi_n\|_\infty \to \infty$ (on remplace simplement φ par 0 aux points où la valeur absolue de φ est supérieure à n). Alors $\|M_\varphi f\| \geq \|M_{\varphi_n} f\|$ pour toute fonction $f \in H^2$ et

$$\|M_{\varphi_n}\| = \|\varphi_n\|_\infty \to \infty,$$

de sorte que M_φ est non borné sur H^2.

$\square$

Corollaire 6.1.1 *Supposons que $\varphi \in H^\infty$. Alors $M_\varphi : H^2 \to H^2$ defini par (6.1) satisfait $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Preuve : Ceci résulte du théorème 6.1.1, une fois que l'on a vérifié que $\varphi \cdot f \in H^2$ (et pas simplement dans $L^2(\mathbb{T})$) pour $\varphi \in H^\infty$ et $f \in H^2$. On peut montrer ceci directement en multipliant les séries, ou alternativement, en calculant les produits scalaires :

$$(\varphi \cdot f, e^{ikt}) = (\varphi, \overline{f} e^{ikt}) = 0 \qquad \text{pour } k < 0,$$

car $\varphi \in H^2$ et $\overline{f}(e^{it})e^{ikt}$ n'a que des coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs non nuls.

$\square$

Notation matricielle. Notons $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ la base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, définie par $e_n(e^{it}) = e^{int}$ ou $e_n(z) = z^n$. Rappelons que $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ est une base orthonormale de H^2.

On remarque ensuite que $M_\varphi e_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt} e^{int}$, où $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ (la convergence devant être comprise au sens L^2) et $\varphi \in H^\infty$. Alors nous obtenons la matrice infinie suivante

$$\begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ d_1 & d_0 & 0 & 0 & \dots \\ d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \dots \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Une matrice qui est constante sur les diagonales orientées Nord-Ouest /Sud-Est, comme ci-dessus est appelée une *matrice de Toeplitz*.

Il existe un moyen d'obtenir un opérateur ayant une matrice de Toeplitz générale, pas nécessairement triangulaire inférieure, et c'est ce que nous allons observer à présent.

Définition 6.1.2 *Pour* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, *l'*opérateur de Toeplitz *de* symbole φ *est l'opérateur* $T_\varphi : H^2 \to H^2$ *défini par* $T_\varphi f = P_{H^2}(M_\varphi f)$.

Comme $\|P_{H^2}\| = 1$ et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ nous avons que T_φ est un opérateur borné sur H^2 qui satisfait $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, on remarque aussi que T_φ est le même opérateur que M_φ. Nous allons voir bientôt que $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ pour tout symbôle $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Soit $\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k$. Alors

$$\begin{aligned} T_\varphi e_n &= P_{H^2}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt} e^{int}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{p-n} e^{ipt}, \end{aligned}$$

où $p = n + k$. Ceci donne une matrice de Toeplitz de T_φ ; à savoir la matrice

$$\begin{pmatrix} d_0 & d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & \dots \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & d_{-2} & \dots \\ d_2 & d_1 & d_0 & d_{-1} & \dots \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Des cas spéciaux importants sont les suivants :

si $\varphi = 1$, alors T_φ ;

si $\varphi(z) = z$, alors T_φ est le shift (à droite) ;

si $\varphi(z) = 1/z$, alors T_φ est l'adjoint du shift (ou encore le shift à gauche).
Enfin, clairement, $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

Théorème 6.1.2 *Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ on a $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$; c'est-à-dire,*

$$\sup\left\{\|T_\varphi f\|_2 : f \in H^2,\ \|f\|_2 = 1\right\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Preuve : Comme $\|T_\varphi\| = \|P_{H^2}M_\varphi\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, il suffit simplement de prouver que '$\geq$' est vrai.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe une function $f \in H^2$ avec $\|f\|_2 = 1$ et

$$\|M_\varphi f\|_2 > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon,$$

par le théorème 6.1.1. En fait, on peut supposer sans perte de généralité f est un polynôme

$$p(e^{it}) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{ikt},$$

car on peut toujours trouver une suite de polynômes p_n telle que

$$\|p_n - f\|_2 \to 0 \qquad \text{et} \qquad \|M_\varphi p_n - M_\varphi f\|_2 \to 0.$$

Nous allons tout d'abord montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt}e^{ikt})\|_2 \to 0$ lorsque $m \to \infty$. A cette fin, avec φ ayant lescoefficients de Fourier (d_n) comme ci-dessus, cette quantité est simplement

$$\begin{aligned}\left\|(I - P_{H^2})\sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r e^{irt}e^{imt}e^{ikt}\right\|_2 &= \left\|\sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} d_r e^{i(r+m+k)t}\right\|_2 \\ &= \left(\sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} |d_r|^2\right)^{1/2} \to 0\end{aligned}$$

lorsque $m \to \infty$. Il s'ensuit que

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt}p(e^{it}))\|_2 \leq \sum_{k=0}^{N} |c_k|\|(T_\varphi - M_\varphi)e^{imt}e^{ikt}\|_2 \to 0$$

lorsque $m \to \infty$.

Comme $\|e^{imt}p\|_2 = \|p\|_2$, on a donc

$$\|T_\varphi(e^{imt}p)\|_2 \to \|M_\varphi(e^{imt}p)\|_2 = \|e^{imt}\varphi p\|_2 = \|M_\varphi p\|_2.$$

Mais d'autre part, $\|M_\varphi p\|_2 > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$, ce qui donne le résultat car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

□

Le résultat ci-dessus est de grand intérêt et de grande importance. En effet, en général, étant donnée une matrice infinie, il n'existe pas de formule qui nous donne sa norme comme opérateur agissant sur ℓ^2.

Bien que les opérateurs de Toeplitz peuvent être bornés, ils ne sont pas, en génaral, des opérateurs compacts.

Proposition 6.1.1 *Le seul opérateur de Toeplitz qui soit compact est $T_0 = 0$.*

Preuve : Soit (e_n) une base orthonormale de H^2. Il est facile de voir que si S est un opérateur de rang fini, alors $\|Se_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, étant donné que l'on peut écrire

$$Se_n = \sum_{k=1}^{r} (e_n, x_k) y_k,$$

où $(x_k)_{k=1}^r$ et $(y_k)_{k=1}^r$ sont des suites finies de H^2. Alors

$$\|Se_n\| \leq \sum_{k=1}^{r} |(e_n, x_k)| \, \|y_k\| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$, car $(e_n, x_k) \to 0$ pour tout k.

A présent, pour tout opérateur compact S sur H^2, la même chose est vraie, car on peut écrire S comme la limite (en norme opérateur) d'une suite (S_k) d'opérateurs de rang fini et l'on observe que $\|Se_n\| \leq \|S - S_k\| + \|S_k e_n\|$. Etant donné $\varepsilon > 0$ on peut rendre le premier terme inférieure à $\varepsilon/2$ en choisissant k assez grand et on peut rendre le second terme inférieure à $\varepsilon/2$ en choisissant n assez grand.

Cependant, il est facile de voir que pour un opérateur de Toeplitz T_φ, on ne peut pas avoir $\|T_\varphi e_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, à moins que T_φ soit l'opérateur identiquement nul. En effet, $\|T_\varphi e_n\| \geq |d_m|$ dès que d_m apparait dans la $(n+1)$ième colonne, ce qui se produit dès que $n \geq -m$. Donc T_φ est non compact sauf si tous les coefficients de Fourier de ϕ sont nuls (i.e. $\varphi = 0$).

□

6.2 Opérateurs de Hankel

Nous allons considérer à présent une classe d'opérateurs très liée à la précédente et aussi introduite par Toeplitz.

Notons $(H^2)^\perp$ le complémentaire orthogonal de H^2 dans $L^2(\mathbb{T})$; c'est-à-dire l'enveloppe linéaire fermée engendrée par

$$e_n(e^{it}) = e^{int}, \qquad n < 0.$$

Définition 6.2.1 *Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ l'opérateur de* Hankel Γ_φ *de* symbôle φ *est défini comme l'opérateur de H^2 dans $(H^2)^\perp$ donné par*

$$\Gamma_\varphi f = (I - P_{H^2}) M_\varphi f;$$

ce qui implique en particulier, $M_\varphi = T_\varphi + \Gamma_\varphi$.

Il existe plusieurs définitions alternatives, qui sont plus ou moins bien adaptées à certaines circonstances, mais nous allons travailler uniquement à partir de la définition ci-dessus.

Proposition 6.2.1 *On a l'inégalité $\|\Gamma_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. De plus, si $\varphi(e^{i\theta})$ a comme série de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta}$, alors la matrice de Γ_φ, relativement à la base orthonormale $(e_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ de H^2 et $(e_n)_{n=-1,-2,\ldots}$ de $(H^2)^\perp$, est*

$$\begin{pmatrix} d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & d_{-4} & \cdots \\ d_{-2} & d_{-3} & d_{-4} & d_{-5} & \cdots \\ d_{-3} & d_{-4} & d_{-5} & d_{-6} & \cdots \\ d_{-4} & d_{-5} & d_{-6} & d_{-7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

laquelle est constante sur les diagonales orientées Sud-Ouest/Nord-Est (ce qu'on appelle une matrice de Hankel).

De plus, $\Gamma_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi \in H^\infty$.

Preuve : Tout d'abord, $\|\Gamma_\varphi f\|_2 = \|(I - P_{H^2})M_\varphi f\|_2 \leq \|M_\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2$. De plus,

$$\begin{aligned}\Gamma_\varphi e_k &= (I - P_{H^2}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} e^{ikt} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} d_n e^{i(n+k)t} = \sum_{r=1}^{\infty} d_{-r-k} e^{-irt},\end{aligned}$$

obtenu en posant $n + k = -r$. Ceci donne la matrice recquise, et clairement $\Gamma_\varphi = 0$ si et seulement si $d_n = 0$ pour tout $n < 0$, ce qui arrive précisément lorsque φ est dans H^∞.

□

Théorème 6.2.1 (Z. Nehari) *Supposons que $\Gamma_\varphi : H^2 \to (H^2)^\perp$ est un opérateur de Hankel. Alors il existe une fonction $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ avec $\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi$ et $\|\Gamma_\psi\| = \|\psi\|_\infty$. Par conséquent*

$$\|\Gamma_\varphi\| = \inf\{\|\varphi + h\|_\infty : h \in H^\infty\} = \mathit{dist}(\varphi, H^\infty)$$

et l'infimum est atteint en $h = \psi - \varphi$.

Preuve : Observons tout d'abord que, si $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$ et $n, m > 0$, alors

$$(\Gamma e^{int}, e^{-imt} e^{-it}) = d_{-n-m-1} = (\Gamma e^{int} e^{imt}, e^{-it}).$$

Par conséquent

$$\left(\Gamma \sum_{n=0}^{N} b_n e^{int}, \sum_{m=0}^{M} \overline{c}_m e^{-imt} e^{-it}\right) = \left(\Gamma \left(\sum_{n=0}^{N} b_n e^{int} \sum_{m=0}^{M} c_m e^{imt}\right), e^{-it}\right).$$

On peut alors définir une fonctionnelle linéaire sur les polynômes par

$$\alpha(f) = (\Gamma f, e^{-it}),$$

et si f se factorise comme un produit de polynômes $f = f_1 f_2$, alors

$$\alpha(f) = (\Gamma(f_1 f_2), e^{-it}) = (\Gamma f_1, \overline{f}_2 e^{-it}),$$

et donc

$$|\alpha(f_1 f_2)| \leq \|\Gamma\| \, \|f_1\|_2 \|f_2\|_2.$$

Cependant, comme toute fonction de H^1 est le produit de deux fonctions de H^2, le produit de polynômes est dense dans H^1, et donc α a une unique extension sur H^1 définie par

$$\alpha(f_1 f_2) = (\Gamma f_1, \overline{f}_2 e^{-it}) \qquad \text{pour } f_1, f_2 \in H^2,$$

avec $|\alpha(f_1 f_2)| \leq \|\Gamma\| \, \|f_1\|_2 \|f_2\|_2$, ou (en utilisant le fait qu'une fonction f de H^1 et le produit de deux fonctions de H^2, $f = f_1 f_2$ avec $\|f\|_1 = \|f_1\|_2 \| \|f_2\|_2$))

$$|\alpha(g)| \leq \|\Gamma\| \, \|g\|_1 \qquad \text{pourtout } g \in H^1.$$

Nous pouvons à présent utiliser le théorème d'Hahn–Banach pour étendre le domaine de définition de la forme linéaire α à tout l'espace $L^1(\mathbb{T})$, en gardant la condition $|\alpha(g)| \leq \|\Gamma\| \, \|g\|_1$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$. Ceci implique qu'il existe une représentation

$$\alpha(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \beta(e^{i\theta}) \, d\theta,$$

pour un certain $\beta \in L^\infty(\mathbb{T})$ avec

$$\|\beta\|_\infty = \|\alpha\| \leq \|\Gamma\|.$$

De plus, pour $k \geq 0$,

$$(\beta, e^{-ikt}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \beta(e^{it}) \, dt = \alpha(e^{ikt}) = (\Gamma e^{ikt}, e^{-it}) = d_{-k-1}.$$

Par conséquent les coefficients de Fourier (β_n) de β satisfont $\beta_{-k} = d_{-k-1}$ pour $k \geq 0$. On prend à présent $\psi(e^{it}) = e^{-it}\beta(e^{it})$, de sorte que les coefficients de Fourier (ψ_n) de ψ satisfont $\psi_{-k-1} = d_{-k-1}$ pour $k \geq 0$. De plus,

$$\|\psi\|_\infty = \|\beta\|_\infty \leq \|\Gamma\|,$$

comme annoncé.

A présent, comme $\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi$ si et seulement si la fonction h, définie par $h = \psi - \varphi$, est dans H^∞, nous avons que

$$\|\Gamma_\varphi\| \leq \inf\{\|\varphi + h\|_\infty : h \in H^\infty\}$$

et il existe une fonction ψ telle que $\psi = \varphi + h$ et

$$\|\psi\|_\infty \leq \|\Gamma_\psi\| \leq \|\psi\|_\infty.$$

On obtient ainsi $\|\psi\|_\infty = \|\Gamma_\psi\|$.

□

Remarque 6.2.1 La preuve ci-dessus montre en fait bien plus ; à savoir que tout opérateur borné T de H^2 dans $(H^2)^\perp$ donné par une matrice de Hankel est en fait un opérateur de Hankel —c'est-à-dire, $T = \Gamma_\psi$ pour un certain $\psi \in L^\infty$ avec $\|\psi\|_\infty = \|T\|$.

Nous avons vu dans le chapitre sur les espaces de Hardy que, pour toute fonction $f \in H^2$ sauf pour la fonction identiquement nulle, on a $f(e^{i\theta}) \neq 0$ presque partout. Ceci nous permet de donner une solution explicite, pour un grand nombre de cas, au problème de Nehari consistant à trouver un symbôle de norme minimale pour un opérateur de Hankel ; ou de façon équivalente à trouver un meilleur approximant analytique pour une fonction mesurable et bornée.

Théorème 6.2.2 (D. Sarason) *Supposons que $\Gamma : H^2 \to (H^2)^\perp$ est un opérateur de Hankel pour lequel il existe $f \in H^2$, $f \neq 0$ avec $\|\Gamma f\|_2 = \|\Gamma\|\|f\|_2$. Alors il existe un unique symbôle $\psi \in L^\infty$ pour Γ tel que $\|\psi\|_\infty = \|\Gamma\|$. De plus, ψ est donné par $\psi = (\Gamma f)/f$; c'est-à-dire, $\psi(e^{i\theta}) = (\Gamma f)(e^{i\theta})/f(e^{i\theta})$ presque partout. D'autre part, l'identité $|\psi(e^{i\theta})| = \|\Gamma\|$ est vérifié presque partout.*

Preuve : Soit ψ un symbôle de norme minimal, lequel existe d'après le théorème de Nehari. Comme $\Gamma_\psi f = (I - P_{H^2})M_\psi f$ nous avons que

$$\|\Gamma_\psi\|\|f\|_2 = \|\Gamma f\|_2 \leq \|\psi \cdot f\|_2 \leq \|\psi\|_\infty \|f\|_2.$$

Comme $\|\Gamma_\psi\| = \|\psi\|_\infty$, nous avons nécessairement $\Gamma f = \psi \cdot f$. Par conséquent $\psi = (\Gamma f)/f$ presque partout, sachant que $f(e^{i\theta}) \neq 0$ presque partout. De plus, comme $\|\psi \cdot f\|_2 = \|\psi\|_\infty \|f\|_2$, l'identité $|\psi(e^{i\theta})| = \|\psi\|_\infty$ doit être vraie presque partout.

□

Le problème de trouver un symbôle de norme minimale pour un opérateur de Hankel peut être revisité de façon très utile en un problème consistant à trouver une approximation d'une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ une fonction de H^∞, comme nous allons le voir maintenant.

Corollaire 6.2.1 *Supposons que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ est tel que Γ_φ atteint sa norme (c'est-à-dire,*

$$\|\Gamma_\varphi f\|_2 = \|\Gamma_\varphi\| \|f\|_2$$

pour une certaine fonction $f \in H^2$, $f \neq 0$). Alors φ a un unique meilleur approximant $h \in H^\infty$; c'est-à-dire, une fonction satisfaisant $\|\varphi - h\|_\infty = dist(\varphi, H^\infty)$. De plus, $h = \varphi - (\Gamma f)/f$ et $|(\varphi - h)(e^{i\theta})| = \|\varphi - h\|_\infty = \|\Gamma_\varphi\|$ presque partout.

Preuve : Si $g \in H^\infty$ alors $\Gamma_{\varphi - g} = \Gamma_\varphi$, et donc

$$\|\varphi - g\|_\infty \geq \|\Gamma_{\varphi - g}\| = \|\Gamma_\varphi\|.$$

Mais il existe une fonction $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, donnée par $\psi = (\Gamma f)/f$, telle que $\Gamma_\psi = \Gamma_\varphi$, et

$$\|\psi\|_\infty = \|\Gamma_\psi\| = \|\Gamma_\varphi\|.$$

Par conséquent $h = \varphi - \psi$ appartient à H^∞ (car Γ_h est l'opérateur identiquement nul) et

$$\|\varphi - h\|_\infty = \|\psi\|_\infty = \|\Gamma_\varphi\|,$$

de sorte que h est un meilleur approximant de φ. Cependant, ψ est unique et donc h aussi. De plus, la fonction $\varphi - h = \psi$ a un module constant presque partout.

□

Comme les fonctions correspondant aux opérateurs de Hankel qui atteignent leur norme ont un unique meilleur approximant dans H^∞, nous savons que toute fonction correspondante à un opérateur de Hankel qui est de rang fini, ou simplement compact, a la propriété désirée. Par conséquent il est naturel de chercher à savoir quand est-ce qu'un Hankel est de rang fini.

Théorème 6.2.3 (L. Kronecker) *L'opérateur de Hankel* Γ *dont la matrice est donnée par l'équation (6.2) est de rang fini si et seulement si* $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k z^k$ *est une fonction rationnelle de* z. *Son rang est le nombre de pôles de* f *(les pôles sont nécessairement dans* $\mathbb{D}$*).*

Preuve : Si le rang de Γ est r, alors les premières $(r+1)$ colonnes de Γ sont linéairement indépendantes ; c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k d_{-k-m} = 0 \qquad \text{pour tout } m \geq 0.$$

Ceci implique que

$$(\lambda_1 + \lambda_2 z + \ldots + \lambda_{r+1} z^r) \left(\frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \ldots \right)$$

est un polynôme de degré au plus $(r-1)$ en z, car les coefficients des puissances négatives z^{-m-1} sont égaux à

$$\lambda_1 d_{-m-1} + \ldots + \lambda_{r+1} d_{-m-r-1},$$

qui valent zéro. Ainsi f est rationnel de degré au plus r.

Réciproquement, si $P(z) \sum_{-\infty}^{-1} d_k z^k = Q(z)$ pour certains polynômes P et Q avec le degré de P inférieur ou égal à r, alors en remontant les implications ci-dessus on voit que le rang de Γ est au plus r.

Par conséquent le rang est actuellement égal au nombre de pôles. Notons que f est la projection d'une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ sur $(H^2)^\perp$. Comme $g(z) = (1/z) f(1/z)$ appartient à H^2 et par conséquent a des pôles en dehors de $\overline{\mathbb{D}}$, il s'ensuit que les pôles de f sont dans $\mathbb{D}$.

$\square$

Notons R_k l'ensemble des fonctions rationnelles $f(z)$ qui ont au plus k pôles dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

Corollaire 6.2.2 *L'opérateur de Hankel* Γ_φ *est de rang au plus* k *si et seulement si* $\varphi \in H^\infty + R_k$.

Preuve : Ceci résulte du fait que $\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi$ si et seulement si $\varphi - \psi \in H^\infty$.

$\square$

Nous terminons avec une caractérisation des symbôles des opérateurs de Hankel compacts, sans donner les preuves mais ces dernières sont détaillées dans [12] ou [16].

Théorème 6.2.4 (P. Hartman) *L'opérateur de Hankel Γ_φ est compact si et seulement si $\varphi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$.*

Le résultat suivant, sur l'espace quelque peu mystérieux $H^\infty + C(\mathbb{T})$ est assez difficile mais est d'une grande importance théorique.

Théorème 6.2.5 (D. E. Sarason) *L'espace $H^\infty + C(\mathbb{T})$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Chapitre 7

Eléments de correction des exercices

7.1 Exercices du Chapitre I

Correction de l'exercice 1.4.1

1. Nous allons montrer que uv est harmonique si et seulement si u est constante ou v est constante ou il existe deux réels α et β non nuls tels que la fonction $\alpha u + i\beta v$ soit holomorphe.

   La fonction uv est harmonique si et seulement si $\dfrac{\partial^2 uv}{\partial \overline{z} \partial z} = 0$. Or

   $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 uv}{\partial \overline{z} \partial z} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z} \partial z}. \end{aligned}$$

   Comme u et v sont harmoniques, on obtient :

   $$\frac{\partial^2 uv}{\partial \overline{z} \partial z} = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{7.1}$$

   Il est clair que si u ou v est constante alors uv est harmonique. D'autre part, s'il existe deux réels α et β non nuls tels que la fonction $\alpha u + i\beta v$ soit holomorphe, alors $(\alpha u + i\beta v)^2$ est holomorphe et donc $Im((\alpha u + i\beta v)^2) = 2\alpha\beta uv$ est harmonique. Ainsi uv est harmonique.

   Réciproquement supposons que uv est harmonique. Comme v est harmonique, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$ et donc $\frac{\partial v}{\partial z}$ est holomorphe. Si l'on suppose que $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, comme $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

et comme v est réelle, on a donc $\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$. Finalement v est constante. De même, comme u est harmonique, $\frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe et $\frac{\partial u}{\partial z}$ si et seulement si u est constante. Supposons que ni u ni v n'est constante, autrement dit que $\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$ sont des fonctions holomorphes non identiquement nulles. L'ensemble des zéros de $\frac{\partial v}{\partial z}$ et de $\frac{\partial u}{\partial z}$ sont discrets. Soit $D(a,r) \subset \Omega$ tel que $\frac{\partial v}{\partial z}$ ne s'annule pas sur $D(a,r)$. La fonction $h := \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial v}{\partial z}}$ est donc holomorphe sur $D(a,r)$.

Comme u et v sont réelles, $\overline{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial v}{\partial \overline{z}}$ et $\overline{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}$. D'après (7.1), $h = -\overline{h}$ sur $D(a,r)$, i.e. $Re(h) = 0$ sur $D(a,r)$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, $Im(h)$ est constante sur $D(a,r)$. Comme on a supposé que u était non constante, h est non nul et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{\partial u}{\partial z} = i\lambda \frac{\partial v}{\partial z}$ sur $D(a,r)$. D'après le principe des zéros isolés (que l'on peut appliquer car Ω est un ouvert connexe) $\frac{\partial u}{\partial z} = i\lambda \frac{\partial v}{\partial z}$ sur Ω. Finalement $\frac{\partial}{\partial z}(u - i\lambda v) = 0$ sur Ω, i.e. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u + i\lambda v) = 0$ sur Ω car $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v sont des fonctions réelles. La fonction $u + i\lambda v$ est donc holomorphe sur Ω.

2. D'après la première question, u^2 est harmonique si et seulement si u est constante ou s'il existe α et β constantes réelles non nulles telles que $\alpha u + i\beta u$ holomorphe. Or $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha u + i\beta u) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = 0$ sur Ω. Comme u est réelle, on obtient $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ sur Ω, ce qui implique que u est constante sur Ω.

3. D'après le calcul qui conduit à (7.1), puisque f et $\overline{f}$ sont des fonctions harmoniques, on a :
$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}(f\overline{f}) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$
Comme f est holomorphe, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ et donc $|f|^2$ est harmonique si et seulement si
$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\frac{\partial f}{\partial z} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = 0 \text{ sur } \Omega.$$
Finalement $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur Ω, ce qui implique f constante sur Ω.

Correction de l'exercice 1.4.2

1. f^2 harmonique sur Ω signifie $\frac{\partial^2 f^2}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$ sur Ω. Comme $\frac{\partial^2 f^2}{\partial z \partial \overline{z}} = 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial z} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = 0$ car f est harmonique, on a donc :
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{7.2}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur Ω, alors $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = 0$ sur Ω et donc $\overline{f}$ est holomorphe.

Supposons à présent qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \neq 0$. Comme f est harmonique (i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = 0$) la fonction $\frac{\partial f}{\partial z}$ est holomorphe sur Ω. Ses zéros sont donc discrets puisque nous la supposons non identiquement nulle. Ainsi il existe $r > 0$ tel que $\frac{\partial f}{\partial z}(z) \neq 0$ sur $D(z_0, r)$. D'après (7.2), on a donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ sur $D(z_0, r)$ et par conséquent $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$ sur $D(z_0, r)$. Comme f est harmonique, $\overline{f}$ est harmonique et ainsi $\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial \overline{z} \partial z} = 0$ sur Ω. On obtient $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$ fonction holomorphe sur Ω et nulle sur $D(z_0, r)$. D'après le principe des zéros isolés (que l'on peut appliquer car Ω est un ouvert connexe) $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$ sur Ω., i.e. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ sur Ω. La fonction f est donc holomorphe sur Ω.

2. Si $|f|^2$ est harmonique, sachant que f (et donc $\overline{f}$) est harmonique, on obtient :

$$0 = \frac{\partial^2 (f\overline{f})}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 .$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur Ω, ce qui implique f constante sur Ω.

Correction de l'exercice 1.4.3

$f = u + iv$ où u et v sont des fonctions à valeurs réelles qui ne s'annulent pas simultanément. On pose $g := \log|f| = \log(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(u^2 + v^2)$. Calculons $\Delta(g) := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{u^2 + v^2}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{1}{u^2 + v^2},$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)^2} - \frac{\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{(u^2 + v^2)^2} \\
&= -\frac{u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 4uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}{(u^2 + v^2)^2} + \\
&\quad \frac{u^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + u^2 v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + uv^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{(u^2 + v^2)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(v^2 - u^2) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2(u^2 - v^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u^3 + uv^2) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(v^3 + vu^2) - 4uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}{(u^2 + v^2)^2} \\
&= \frac{(v^2 - u^2)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u^3 + uv^2) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(v^3 + vu^2) - 4uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}{(u^2 + v^2)^2}.
\end{aligned}$$

L'expression de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ s'obtient en remplaçant x par y. Comme u et v sont harmoniques en tant que partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe, on a bien sur $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. On a donc :

$$\Delta(g) = \frac{(v^2-u^2)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) - 4uv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{(u^2+v^2)^2}.$$

Comme f est holomorphe, d'après les équations de Cauchy-Riemann, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. On vérifie ainsi que $\Delta(g) = 0$ et donc $\log|f|$ est harmonique.

Correction de l'exercice 1.4.4

Comme Ω est simplement connexe et comme f ne s'annule pas, la fonction holomorphe $\frac{f'}{f}$ a une primitive holomorphe qui est une détermination holomorphe du logarithme de f. En d'autres termes il existe g holomorphe sur Ω tel que $f = e^g$. On a donc en particulier $|f| = e^{Re(g)}$, i.e. $\log|f| = Re(g)$. La fonction $\log|f|$ est donc harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe.

Correction de l'exercice 1.4.5

Rappelons qu'une fonction f à valeurs complexes est analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $R(z_0) > 0$ avec $\overline{D(z_0, R(z_0))} \subset \Omega$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z_0)X^n$ de rayon de convergence au moins égal à $R(z_0)$ tels que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z_0)(z-z_0)^n, \;\; z \in D(z_0, R(z_0)).$$

Rappelons le lien entre l'holomorphie et l'analyticité : si f holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ alors f est analytique dans Ω. (cf. par exemple Section 2.4 de [25] ou [15]).

D'après les rappels ci-dessus, il suffit de montrer que si f et $z \longmapsto zf(z)$ sont harmoniques dans Ω alors f est holomorphe sur Ω, i.e. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ sur Ω. Or, comme $g : z \longmapsto zf(z)$ est harmonique, pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(z\frac{\partial f}{\partial z}(z) + f(z)\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z).$$

Comme f est harmonique, on a donc $\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}\partial z} = 0$ sur Ω et donc nécessairement $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}} = 0$ sur Ω.

Correction de l'exercice 1.4.6

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est harmonique car
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$
car f est harmonique de classe C^3. De façon analogue on montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.

2. $$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)} \\ &= \sum_{n\geq 0} r^n e^{in(\theta-t)} + \sum_{n>0} r^n e^{-in(\theta-t)} \\ &= \sum_{n\geq 0} z^n e^{-int} + \sum_{n>0} (\overline{z})^n e^{int}, \end{aligned}$$
si $z = re^{i\theta}$. Comme, pour $n \geq 0$, $\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}(z^n) = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial z}(\overline{z}^n) = 0$, on a donc $\dfrac{\partial^2 P_r(\theta - t)}{\partial\overline{z}\partial z} = 0$ et donc $P_r(\theta - t)$ est harmonique (à t fixé) sur $\mathbb{D}$.

3. Pour $z = re^{i\theta}$,
$$\begin{aligned} P(\mu)(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n\geq 0} z^n e^{-int} + \sum_{n>0}(\overline{z})^n e^{int}\right)d\mu(t). \end{aligned}$$
Comme pour $|z| < 1$ les sommes convergent normalement, on obtient :
$$P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\geq 0} z^n e^{-int}d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n>0}(\overline{z})^n e^{int}d\mu(t).$$
Les dérivées des séries étant elles aussi convergentes et comme $|\mu|(0, 2\pi) < \infty$, la dérivée des intégrales et les intégrales de la dérivée sont égales. On obtient ainsi :
$$\frac{\partial^2 P(\mu)}{\partial\overline{z}\partial z}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\partial^2(z^n e^{-int})}{\partial\overline{z}\partial z}d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n>0}\frac{\partial^2((\overline{z})^n e^{int})}{\partial\overline{z}\partial z}d\mu(t) = 0,$$
ce qui prouve que $P(\mu)$ est bien une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Correction de l'exercice 1.4.7

1. D'après le Corollaire 1.3.1, nous savons que si $a \in \mathbb{D}$ et si $R > 0$ satisfait $\overline{D(a,R)} \subset \mathbb{D}$ alors pour tout r vérifiant $0 \le r < R$, on a :

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t) u(a + Re^{it}) dt.$$

Comme $P_{r/R}(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}$, on a :

$$\frac{R-r}{R+r} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + 2rR + r^2} \le P_{r/R}(\theta - t) \le \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR + r^2} = \frac{R+r}{R-r}.$$

D'autre part, d'après la formule de la moyenne, $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it}) dt$. De plus, comme $u(a) \ge 0$, on obtient :

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \le u(a + re^{it}) \le \frac{R+r}{R-r} u(a).$$

Prenons $a = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $t = 0$ et $R = 1 - \delta$ avec $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. On obtient :

$$\frac{1/2 - \delta}{3/2 + \delta} \le u(1/2) \le \frac{3/2 - \delta}{1/2 - \delta}.$$

Comme $\delta \longmapsto \frac{3/2-\delta}{1/2-\delta}$ est une fonction croissante et comme $\delta \longmapsto \frac{1/2-\delta}{3/2+\delta}$ est une fonction décroissante, c'est en faisant tendre δ vers 0 que l'on obtient le meilleur encadrement. On a donc $1/3 \le u(1/2) \le 3$.

2. Comme u est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.3.1, pour tout $0 \le r < R < 1$, on a :

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) u(Re^{it}) dt,$$

ce qui revient à dire que :

$$Re(f(z)) = Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} u(Re^{it}) dt \right) \text{ avec } |z| < R < 1.$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} u(Re^{it}) dt + i\lambda \text{ pour tout } z \in D(0,R).$$

En particulier, d'après le Corollaire 1.2.3 on a $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})dt + i\lambda = u(0) + i\lambda$. Comme $f(0) = 0 = u(0)$, on obtient $\lambda = 0$. On a donc $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z} u(Re^{it})dt$ dès que $|z| = r < R < 1$. Comme $|u| < 1$ sur $\mathbb{D}$, on en déduit :

$$|f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \text{ dès que } |z| = r < R < 1.$$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+r}{x-r}$ est décroissante, on en déduit :

$$|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1+r}{1-r} \text{ dès que } |z| = r < 1.$$

Correction de l'exercice 1.4.8

Montrons que u est continue. Soit $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Nous savons qu'alors

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} u(x+iy)dxdy.$$

Soit $b \in D(a,r)$ et soit $r_1 := r - |b-a|$. Par construction on a $\overline{D(b,r_1)} \subset \Omega$. On a donc $u(b) = \dfrac{1}{\pi r_1^2}\displaystyle\iint_{\overline{D(b,r_1)}} u(x+iy)dxdy$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
|u(a)-u(b)| &= \left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} u(x+iy)dxdy - \frac{1}{\pi r_1^2}\iint_{\overline{D(b,r_1)}} u(x+iy)dxdy\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} u(x+iy)dxdy - \frac{1}{\pi r_1^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} u(x+iy)dxdy\right| + \\
&\quad \left|\frac{1}{\pi r_1^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} u(x+iy)dxdy - \frac{1}{\pi r_1^2}\iint_{\overline{D(b,r_1)}} u(x+iy)dxdy\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\pi r^2} - \frac{1}{\pi r_1^2}\right| \iint_{\overline{D(a,r)}} |u(x+iy)|dxdy + \\
&\quad \frac{1}{\pi r_1^2}\left|\iint_{\mathbb{R}^2} u(x+iy)\chi_{\overline{D(a,r)}\setminus\overline{D(b,r_1)}}dxdy\right|.
\end{aligned}$$

Comme $u \in Ł^1$ localement, $\iint_{\overline{D(a,r)}} |u(x+iy)|dxdy = M < \infty$ et comme $\lim_{b\to a}|b-a| = 0 \Rightarrow \lim_{b\to a} r_1 = r$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que si $|b-a| < \delta$ alors $\left|\dfrac{1}{\pi r^2} - \dfrac{1}{\pi r_1^2}\right|\displaystyle\iint_{\overline{D(a,r)}} |u(x+iy)|dxdy < \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, comme $u \in Ł^1$ localement et comme $\lim_{b\to a} u(x+iy)\chi_{\overline{D(a,r)}\setminus\overline{D(b,r_1)}} = 0$, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il existe $\delta' > 0$ tel que si $|b-a| < \delta'$ alors

$$\frac{1}{\pi r_1^2}\left|\iint_{\mathbb{R}^2} u(x+iy)\chi_{\overline{D(a,r)}\setminus\overline{D(b,r_1)}}dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction u est donc continue. Comme u vérifie la propriété de la moyenne, elle vérifie la propriété de la moyenne faible. D'après le Théorème 1.3.2, f est harmonique.

7.2 Exercices du Chapitre 2

7.2.1 Quelques rappels de topologie et notion de régularité de mesure de Borel positive

Rappels topologiques

Soit X un espace topologique.

- Un **voisinage** d'un point $a \in X$ est un ouvert de X contenant a.
- X est **séparé** (ou **de Hausdorff**) lorsque l'on a la propriété suivante : pour deux points distincts quelconques a et b, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b tels que $U \cap V = \emptyset$.
- Un sous-ensemble K de X est **compact** si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- X est **localement compact** si tout point de X possède un voisinage dont la fermeture est compacte. Naturellement si X est compact alors X est localement compact.
- Un sous-ensemble E de X est **σ-compact** si E est la réunion dénombrable de compacts de X.

Rappels sur les mesures de Borel

- Une **mesure de Borel** est une mesure définie sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace topologique X séparé et localement compact.
- Une mesure de Borel μ est dite **positive** si $\mu(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour tout borélien E de X.

- Une mesure de Borel μ est dite **réelle** (resp. **complexe**) si $\mu(E) \in \mathbb{R}$ (resp. $\mu(E) \in \mathbb{C}$) pour tout borélien E de X. Naturellement les mesures de Borel réelles sont des mesures de Borel complexes et ce sont des mesures finies.
- Soit μ une mesure de Borel positive et soit E un borélien. Alors E est **extérieurement régulier** si
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \text{ ouvert }, V \supset E\}.$$
- Soit μ une mesure de Borel positive et soit E un borélien. Alors E est **intérieurement régulier** si
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact }, K \subset E\}.$$
- Soit μ une mesure de Borel positive.
- Une mesure de Borel positive μ est **régulière** si tout borélien E est à la fois extérieurement et intérieurement régulier.

Théorème 7.2.1 (Théorème 2.18, p.47 de [22]) *Soit X un espace topologique séparé localement compact sur lequel tout ouvert est σ-compact. Soit μ une mesure de Borel positive telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de X. Dans ce cas μ est régulière.*

En particulier si μ est une mesure de Borel positive et réelle (donc finie) sur $\mathbb{R}$, μ est régulière (en fait si μ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}$ qui de plus est finie sur tout les compacts de $\mathbb{R}$, μ est régulière).

7.2.2 Corrections

Correction de l'exercice 2.4.1

1. La fonction u est harmonique sur $\mathbb{D}$ comme partie imaginaire d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. De plus, si $z = e^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on a :
$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}} \\ &= \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i\text{cotan}(\theta/2). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{T} \setminus 1$, on a $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \in \mathbb{R}$ et donc $u(z) = 0$. En 1 la limite radiale de u est égale à la limite quand $r \to 1^-$ de la partie imaginaire de $\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$ est identiquement nulle. Ainsi les limites radiales de u sont identiquement nulles.

2. Supposons qu'il existe μ mesure réelle (finie) sur $\mathbb{T}$ telle que $u = P(\mu)$. Soit $\rho(u) := \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|dt$. Si $u = P(\mu)$, d'après le Théorème 2.2.1, $\rho(u) < \infty$. Nous allons calculer $\rho(u)$ et en montrant que $\rho(u)$ n'est pas fini nous aurons montré que $u = P(\mu)$ est absurde.

Si $z = re^{i\theta}$ avec $0 \le r < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \\ &= \frac{1-r^2+2ir\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $u(re^{i\theta}) = \dfrac{4r(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}$, ce qui implique

$$|u(re^{i\theta})| = \frac{4r(1-r^2)|\sin\theta|}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^{\pi} \frac{4r(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{4r(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2}d\theta.$$

Rappelons que $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ et $P_r'(\theta) = -\frac{(1-r^2)2r\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta &= 2\int_0^{\pi} -P_r'(\theta)d\theta + 2\int_{\pi}^{2\pi} P_r'(\theta)d\theta \\ &= 2(-P_r(\pi) + P_r(0) + P_r(2\pi) - P_r(\pi)). \end{aligned}$$

Comme $P_r(0) = P_r(2\pi) = \frac{1+r}{1-r}$ et $P_r(\pi) = \frac{1-r}{1+r}$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta = 4\left(\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r}\right) = 16\frac{r}{1-r^2}.$$

Par conséquent $\rho(u) = \sup_{0 \le r < 1} \dfrac{r}{1-r^2} = +\infty$.

Si l'on suppose que u est la différence de deux fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 2.2.1, il existe deux mesures positives finies μ_1 et μ_2 telles que $u = P(\mu_1) - P(\mu_2) = P(\mu_1 - \mu_2)$. On a donc $u = P(\mu)$ avec $\mu = \mu_1 - \mu_2$ mesure réelle (finie). D'après ce qui précède ceci est absurde.

Correction de l'exercice 2.4.2

Comme $\mu \perp m$, il existe un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = 0$ et $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$. Pour $0 < \alpha < \infty$, soit $E_\alpha := \{x \in A : \underline{D}(\mu)(x) < \alpha\}$. Comme $\underline{D}(\mu)$ est une fonction borélienne (cf. Lemme 2.3.1) et comme $E_\alpha = \underline{D}(\mu)^{-1}(]-\infty, \alpha[) \cap A$, E_α est un borélien de $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que $\mu(E_\alpha) = 0$, ce qui permettra de conclure. Comme μ est une mesure positive réelle, μ est régulière. Ainsi pour montrer que $\mu(E_\alpha) = 0$ il suffit de montrer que $\mu(K) = 0$ pour tout compact $K \subset E_\alpha$. Fixons $\varepsilon > 0$ et K un compact inclus dans E_α. Comme $K \subset A$, $m(K) = 0$ et K est inclus dans un ouvert V de $\mathbb{R}$ avec $m(V) < \varepsilon$. Comme $K \subset E_\alpha$, tout $x \in K$ est dans un intervalle ouvert $I_x \subset V$ tel que $\mu(I_x) < \alpha m(I_x)$. Comme K est compact, il existe un nombre fini de points $x_1, \cdots, x_n$ de K tels que $K \subset \cup_{1 \le i \le n} I_{x_i}$. Si un point de $\mathbb{R}$ est situé dans trois intervalles, l'un deux est inclus dans la réunion des deux autres et peut-être supprimé sans que la réunion change. En supprimant de cette manière les intervalles superflus de la forme I_{x_i} $(1 \le i \le n)$ on montre qu'il existe des intervalles $I_1, \cdots, I_k$ choisis parmi les intervalles $I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}$ avec $K \subset \cup_{1 \le i \le k} I_i$ et tel que aucun point de K n'est contenu que plus de 2 intervalles de la forme I_i, $1 \le i \le k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu(K) &\le \mu(\cup_{1 \le i \le k} I_i) \le \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) < \alpha \sum_{i=1}^{k} m(I_i) \\ &\le 2\alpha m(\cup_{1 \le i \le k} I_i) \le 2\alpha m(V) < 2\alpha\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε était arbitraire, $\mu(K) = 0$.

Correction de l'exercice 2.4.3

D'après la Proposition 2.3.1 si $u = P(\mu)$ alors $\liminf_{r \to 1^-} u(re^{i\theta}) \ge \underline{D}(\mu)(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Si l'on suppose que $\lim_{r \to 1^-} u(re^{i\theta})$ existe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on aura alors $\underline{D}(\mu)(\theta)$ finie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Or nous avons vu dans l'Exercice 2.4.2 que, comme $\mu \perp m$, on a $\underline{D}(\mu)(\theta) = \infty$ μ-presque partout. Comme μ est non identiquement nulle, son support A est non vide et l'on obtient ainsi une contradiction.

Correction de l'exercice 2.4.4

D'après le Corollaire 2.3.3, il existe une mesure ν positive, $\nu \perp m$ telle que $u = P(u^*)+P(\nu)$ avec $u^* \in L^1(\mathbb{T})$, $u^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} u(re^{it})$ m-presque partout. Comme par hypothèse $u^*(e^{it}) = 0$ m-presque partout, on a donc $P(u^*) = 0$. On a donc $u = P(\nu)$ où $\nu \perp m$ et ν mesure positive finie. D'après la Proposition 2.3.1 $\liminf_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) \geq \underline{D}(\nu)(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par conséquent pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $\underline{D}(\nu)(\theta) \leq 0$. Or d'après l'Exercice 2.4.2, comme $\nu \perp m$, $\underline{D}(\nu)(\theta) = \infty$ ν-presque partout. Comme u et donc ν est non identiquement nul, nécessairement le support de ν est réduit au point 1. Posons alors $c' = \nu(\{1\})$. On a donc $\nu = c'\delta_1$ où δ_1 est la mesure de Dirac concentrée au point 1. Finalement on obtient

$$u(re^{i\theta}) = P(c'\delta_1)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)c'd\delta_0(e^{it}) = \frac{c'}{2\pi}P_r(\theta) = cP_r(\theta) \text{ avec } c = \frac{c'}{2\pi}.$$

Correction de l'exercice 2.4.5

D'après le Corollaire 2.2.1, nous avons

$$\Phi := \{P(\mu) : \mu \text{ mesure positive finie sur } \mathbb{R} \text{ avec de plus } P(\mu)(0) = 1\}.$$

Or $P(\mu)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_0(\theta - t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\mu([-\pi, \pi]) = \frac{\|\mu\|}{2\pi}$. On a donc

$$\Phi := \{P(\mu) : \mu \text{ mesure positive finie sur } \mathbb{R},\ \|\mu\| = 2\pi\}.$$

Par une homothétie évidente de rapport $\frac{1}{2\pi}$, le problème revient à chercher les points extrémaux de l'ensemble $\mathcal{C}$ des mesures positives finies sur $\mathbb{T}$ de variation totale 1.

$\lambda \in (0, 1]$ et soient u_1, u_2 deux fonctions harmoniques positives telles $u_1(0) = 1 = u_2(0)$. Il est clair que $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$ est bien un élément de $\mathcal{C}$. Ainsi $\mathcal{C}$ est bien un ensemble convexe.

Nous allons montrer à présent que les points extrémaux de $\mathcal{C}$ sont des mesures de Dirac concentrées en un point de $\mathbb{T}$. Soit $z_0 \in \mathbb{T}$ et soit δ_{z_0} la mesure de Dirac concentrée en z_0. Nous allons tout d'abord montrer que δ_{z_0} est bien un point extrémal de $\mathcal{C}$. Soit $\lambda \in]0, 1[$ et soit $\mu, \nu \in \mathcal{C}$ tels que $\delta_{z_0} = \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu$. En particulier on a :

$$1 = \delta_{z_0}(\{z_0\}) = \lambda\mu(\{z_0\}) + (1 - \lambda)\nu(\{z_0\}).$$

Il est clair que si $\mu(\{z_0\}) < 1$ ou si $\nu(\{z_0\}) < 1$ alors l'égalité ci-dessus n'est pas vérifiée. Finalement on a $\mu(\{z_0\}) = 1 = \nu(\{z_0\})$, ce qui implique (puisque ν et μ sont des mesures positives de variation totale 1) $\mu(\mathbb{T}\backslash\{z_0\}) = 0 = \nu(\mathbb{T}\backslash\{z_0\})$. Soit E un borélien quelconque de $\mathbb{T}$. Si $z_0 \notin E$, comme $\mu(E) \le \mu(\mathbb{T} \setminus \{z_0\})$, on a donc $\mu(E) = 0$. Par contre si $z_0 \in E$, comme $1 \ge \mu(E) \ge \mu(\{z_0\}) = 1$, on a donc $\mu(E) = 1$. On a donc montré que $\mu = \delta_{z_0}$. De même on montre que $\nu = \delta_{z_0}$. On conclut alors que δ_{z_0} est bien un point extrémal de $\mathcal{C}$.

Supposons à présent que $\mu \ne \delta_{z_0}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{T}$ et montrons que μ n'est pas un point extrémal de $\mathcal{C}$. Il est clair que si le support de μ (défini comme le complémentaire du plus grand ouvert V tel que $\mu(V) = 0$) est réduit à un point z_0 alors μ est de la forme $\mu \ne \delta_{z_0}$. On peut donc supposer que le support de μ contient au moins deux points distincts $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$ avec $0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Soit $A = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\}$ et $B = \{e^{i\theta} : \frac{\theta_1+\theta_2}{2} < \theta < 2\pi\}$. Les boréliens A et B forment une partition de $\mathbb{T}$. Si $\mu(A) = 0$ alors A n'est pas dans le support de μ et donc $z_1 \in A$ n'est pas dans le support de μ, ce qui est absurde. De même, si $\mu(A) = 1$ alors $\mu(B) = 0$ et donc le support de μ est inclus dans A, ce qui implique que z_2 n'est pas dans le support de μ. Là encore on obtient une contradiction. Finalement $\mu(A) = \lambda \in]0, 1[$ et $\mu(B) = 1 - \lambda$. Si l'on définit μ_1 et μ_2 par $\mu_1(E) = \frac{\mu(E\cap A)}{\lambda}$ et $\mu_2(E) = \frac{\mu(E\cap B)}{1-\lambda}$ pour tout borélien E de $\mathbb{T}$, on obtient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}$ avec $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. Les mesures μ_1 et μ_2 sont distinctes n'ayant pas le même support. Ainsi μ n'est pas un point extrémal de $\mathcal{C}$.

7.3 Exercices du Chapitre 3

7.3.1 Rappels sur les produits infinis de nombres complexes

Définition 7.3.1 (Notion de convergence au sens strict) *On suppose que pour tout* $k \ge 1$, $u_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *On dit que le produit infini des* u_n, *noté* $\prod_{n\ge1} u_n$, *converge strictement vers* $p \in \mathbb{C}$ *si* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ *avec* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *et* $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Définition 7.3.2 (Notion de convergence au sens large) *Soit* $(u_n)_{n\ge1}$ *une suite de nombres complexes telle qu'il existe* $n_0 \ge 1$ *tel que* $u_n \ne 0$ *si* $n \ge n_0$. *Si le produit infini*

$\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge strictement vers $p_1 \in \mathbb{C}^*$, on dira que que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge au sens large vers p avec $p = u_0u_1\cdots u_{n_0-1}p_1$.

Correction de l'exercice 3.5.1

1. Soit $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. Comme $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{C}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$. De plus, comme $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}$, on obtient $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
2. Supposons que $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge au sens large. Il existe donc $n_0 \geq 1$ tel que $u_n \neq 0$ si $n \geq n_0$ et tel que $\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge au sens strict vers $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pour $n \geq n_0$ on définit le produit p_n par $p_n = \prod_{k\geq n_0}^{n} u_k$ de sorte que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ avec $|p| > 0$. Alors il existe $\rho > 0$ tel que $|p_n| \geq \rho$ pour tout $n \geq n_0$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy, il existe $n_\varepsilon \geq n_0$ tel que si $q > p \geq n_\varepsilon$ on ait $|P_q - P_p| < \varepsilon\rho$. Par conséquent, si $q > p \geq n_\varepsilon$ on a $\left|\frac{P_q}{P_p} - 1\right| < \frac{\varepsilon\rho}{\rho} = \varepsilon$, i.e., $|u_qu_{q-1}\cdots u_{p+1} - 1| < \varepsilon$.
   Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $q > p \geq n_\varepsilon$, alors $|u_{p+1}\cdots u_q - 1| < \varepsilon$. Fixons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$ et posons $q_n = u_{n_\varepsilon+1}\cdots u_n$ pour $n \geq n_\varepsilon + 1$. On a donc $|q_n - 1| < \varepsilon$ et ainsi $\frac{1}{2} < |q_n| < \frac{3}{2}$. Pour $m > p \geq n_\varepsilon + 1$ on a :
   $$|q_m - q_p| = |q_p|\left|\frac{q_m}{q_p} - 1\right| \leq \frac{3}{2}|u_m\cdots u_{p+1} - 1| < \frac{3}{2}\varepsilon.$$
   La suite $(q_n)_{n\geq n_\varepsilon+1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$ (complet). Elle converge donc vers $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ car $|q_n| \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n (= u_1\cdots u_{n_\varepsilon} q_n)$ converge au sens large.

Correction de l'exercice 3.5.2

1. Par construction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Il reste donc à vérifier que
   $$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt < \infty.$$
   On remarque que si $z = re^{i\theta}$ avec $r \in [0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = B(z)g(z)$ avec
   $$|g(z)| = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi(e^{it})dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)} = e^{P(\nu)(z)},$$

avec $d\nu(t) = \varphi(e^{it})dt + d\mu(t)$. Comme $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, φ fonction à valeurs réelles, et comme μ est une mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, on a $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, ν mesure réelle. On a donc $\log|g(z)| = P(\nu)(z)$ où ν mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.2.1, $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|g(re^{it})||dt < \infty$. Comme $\log^+|g(re^{it})| \leq |\log|g(re^{it})||$, on a donc $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|g(re^{it})|dt < \infty$. Enfin, sachant que $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$ pour $a, b > 0$, on obtient $\log^+|f(re^{it})| \leq \log^+|g(re^{it})| + \log^+|B(re^{it})| = \log^+|g(re^{it})|$ car $|B(re^{it})| < 1$. Ainsi $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{it})|dt < \infty$ et donc $f \in \mathcal{N}$.

2. Le Théorème 3.4.1 nous donne l'existence d'une telle décomposition pour tout fonction $f \in \mathcal{N}$ avec $\varphi = \log|f^*|$ et $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ qui existe m presque partout. Supposons à présent qu'il existe deux produits de Blaschke B_1 et B_2, deux fonctions φ_1, φ_2 de $L^1(\mathbb{T})$ et deux mesures réelles μ_1 et μ_2 de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ singulières par rapport à m vérifiant $f(z) = B_1(z)g_1(z) = B_2(z)g_2(z)$ avec

$$g_j(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi_j(e^{it})dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_j(t)}, \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Comme g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, il est clair que les suites des zéros de B_1 et B_2 coïncident avec la suite des zéros de f. Un produit de Blaschke étant uniquement déterminé (à une constante unimodulaire près) par la suite de ses zéros, il existe donc $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ avec $B_1(z) = cB_2(z)$. Par conséquent les fonctions holomorphes $\frac{f}{B_1}$ et $\frac{f}{B_2}$ sont de même module, i.e., $|g_1(z)| = |g_2(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a donc

$$\log|g_1(z)| = P(\nu_1)(z) = P(\nu_2)(z) = \log|g_2(z)|,$$

où, pour $1 \leq j \leq 2$, ν_j mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ définie par avec $d\nu_j(t) = \varphi_j(e^{it})dt + d\mu_j(t)$. L'application $\nu \to P(\nu)$ étant injective (d'après le Théorème 2.2.1), $\nu_1 = \nu_2$ et d'après l'unicité de la décomposition de Radon-Nikodym de toute mesure $\nu \in \mathcal{M}$, on donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\mu_1 = \mu_2$. Finalement $g_1 = g_2$ sur $\mathbb{D}$ et donc $c = 1$.

Correction de l'exercice 3.5.3

D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν_f réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ avec $\nu_f \perp m$ et un produit de Blaschke B tels que

$$f(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu_f(t)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$g(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})|)dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\nu_f-\nu_f^+)(t)}.$$

Comme $\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})| = -\log^-|f^*(e^{it})| \leq 0$ et comme $\nu_f-\nu_f^+ = -\nu_f^- \leq 0$, on en déduit $|g(z)| = |B(z)|e^{P(-\mu)(z)}$ où μ est une mesure positive de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ définie par $d\mu(t) = \log^-|f^*(e^{it}|dt + d\nu_f^-(t)$. Enfin, comme $\mu \geq 0$ et $P(-\mu) = -P(\mu)$, on a donc $P(-\mu)(z) \leq 0$ et de ce fait $|g(z)| \leq |B(z)| \leq 1$. La fonction g, étant holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée en module sur $\mathbb{D}$ par 1, est bien une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$.

7.4 Exercices du Chapitre 4

Correction de l'exercice 4.6.1

1. Supposons f non identiquement nulle. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν réelle (finie) sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ et un réel λ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait :

$$f(z) = e^{i\lambda}B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}.$$

En considérant la décomposition de Jordan de ν sous la forme $\nu = \nu^+ - \nu^-$ avec ν^+ et ν^- deux mesure positives finies sur $\mathbb{T}$ qui vérifient de plus $\nu^+, \nu^- \perp m$ (car $\nu \perp m$), on a donc

$$f = B_1 Q_f \frac{S_{\mu^-}}{S_{\mu^+}},$$

avec $B_1 = e^{i\lambda}B$, S_{μ^-} et S_{μ^+} fonctions intérieures singulières associées aux mesures singulières positives μ^+ et μ^- (cf. Définition 4.4.2).

2. Réciproquement, si $f = B\dfrac{S_1}{S_2}Q$, où Q est extérieure et S_1, S_2 intérieures singulières, alors $f \in \mathcal{N}$. En effet, par construction, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ et si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$|f(z)| = |B(z)|e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)},$$

avec μ mesure complexe sur $[0, 2\pi]$ définie par $d\mu(t) = \log\varphi(e^{it})dt + d(\nu_1 - \nu_2)(t)$ où $\varphi \geq 0$, $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et ν_1, ν_2 mesure positive finie singulières par rapport à m. Comme $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$ et comme $\log^+|B(z)| = 0$ puisque $|B(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc

$$\log^+|f(z)| \leq \log^+\left(e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)}\right).$$

De plus, comme $\log^+ a \leq |\log a|$, on obtient :

$$\log^+|f(z)| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d|\mu|(t).$$

Finalement, $\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \|\mu\| < \infty$, et donc $f \in \mathcal{N}$.

Correction de l'exercice 4.6.2

1. D'après le Théorème 4.4.3, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty]$, il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ avec Q_f facteur extérieur de f appartient à $H^p(\mathbb{D})$ et défini par

$$Q_f(z) = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}.$$

Comme $|U_f(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$. Or

$$|Q_f(z)| = e^{Re\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt\right)} = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|dt},$$

si $z = re^{i\theta}$. On obtient donc l'inégalité demandée, cette inégalité étant triviale si $f(z) = 0$.

2. Si f est extérieure, on a donc $f(z) = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}$, ce qui implique $\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|dt$ pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Réciproquement, supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour un certain $p \in]0, \infty]$ et supposons qu'il existe $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$ tel que
$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r_0}(\theta_0 - t)\log|f^*(e^{it})|dt. \tag{7.3}$$
Comme nous l'avons déjà mentionné, le fait que $f \in H^p(\mathbb{D})$, implique que $f = U_fQ_f$ avec U_f fonction intérieure et Q_f défini comme ci-dessus. L'égalité (7.3) signifie $|f(z_0)| = |Q_f(z_0)|$, ce qui implique $|U_f(z_0)| = 1$. La fonction U_f étant intérieure, d'après le principe du maximum, ceci n'est possible que si U_f est constante. Par conséquent f est extérieure.

3. La réciproque est fausse. En effet, soit $f \in \mathcal{N}$ de la forme
$$f(z) = B(z)Q_f(z)e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(-2\pi\log|B(0)|\delta_0)(t)},$$
où $B(z)$ est un produit de Blaschke non constant ne s'annulant pas en 0, où la mesure définie par $-2\pi\log|B(0)|\delta_0$ est une mesure positive finie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et avec Q_f facteur extérieur de f. D'après le Théorème 3.2.1 ou encore d'après l'Exercice 4.6.1, il est facile de voir que $f \in \mathcal{N}$. Par construction, on vérifie aussi aisément que
$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})|dt.$$
D'autre part, il est aussi très clair que f n'est pas extérieure puisqu'elle s'annule sur $\mathbb{D}$.

Correction de l'exercice 4.6.3

Pour $z \in \mathbb{D}$, posons $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}}d\mu(t)$. Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on remarque que
$$\frac{1}{1 - ze^{-it}} = \sum_{n\geq 0} r^n e^{in(\theta - t)}.$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}$ converge normalement, donc uniformément par rapport à t dès que $r<1$, si $z=re^{i\theta}$, on obtient :

$$F(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t)=\sum_{n\geq 0}\hat{\mu}(n)z^n.$$

La fonction F est holomorphe sur $\mathbb{D}$. L'hypothèse faite sur μ nous permet d'affirmer que

$$F(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t).$$

Toujours par convergence normale, donc uniforme en t de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}$, nous avons finalement :

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)=P(d\mu)(z).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|d\theta &= \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)\right|d\theta\\ &\leq \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d|\mu|(t)\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\theta\right)d|\mu|(t)\\ &= \|\mu\|<\infty.\end{aligned}$$

On a donc $F\in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|F\|_1\leq\|\mu\|$. D'après le Théorème 4.5.3, nous savons que F est l'intégrale de Poisson de sa limite radiale $F^*\in L^1(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.2.1, l'application définie sur l'ensemble des mesures complexes sur $[0,2\pi]$ par $\nu\longmapsto P(d\nu)$ est injective. Ainsi $d\mu(t)=F^*(e^{it})dt$, et ainsi $\mu\ll m$.

7.5 Exercices du Chapitre 5

Correction de l'exercice 5.4.1

1. Soient $\alpha=(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $\beta=(\beta_n)_{n\geq 0}$ deux éléments arbitraires de ℓ^2. L'opérateur T^* est défini par la formule

$$<T(\alpha),\beta>=<\alpha,T^*(\beta)>.$$

Comme

$$< T(\alpha), \beta >=< (\alpha_{n-1})_{n\geq 0}, \beta >= \sum_{n\geq 0} \alpha_{n-1}\overline{\beta_n} = \sum_{n\geq 1} \alpha_{n-1}\overline{\beta_n} = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \overline{\beta_{k+1}},$$

on en déduit $T^*((\beta_n)_{n\geq 0}) = (\beta_{n+1})_{n\geq 0}$. En d'autres termes,

$$T^*(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots).$$

L'opérateur T^* est aussi appelé le shift à gauche sur ℓ^2.

Soient f et g deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ arbitraires et de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0}$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ dans ℓ^2. L'opérateur S^* est défini par la formule

$$< S(f), g >=< f, S^*(g) > .$$

Comme $S(f)(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$, on obtient $< S(f), g >= \sum_{n\geq 0} a_n \overline{b_{n+1}}$. On en déduit alors $S^*(g)(z) = \sum_{n\geq 0} b_{n+1} z^n$. Par conséquent

$$S^*(g)(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(0)}{z} & z \neq 0 \\ g'(0) & z = 0. \end{cases}$$

2. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} S^* f = \lambda f \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall z \in \mathbb{D}, \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n \lambda^n \\ & \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = \lambda a_n, \ n \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad a_k = \lambda^k a_0, \ k \geq 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad f(z) = a_0 + a_0 \sum_{k\geq 1} \lambda^k z^k. \end{aligned}$$

Il est à présent clair que l'on peut trouver $f \in H^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $S^* f = \lambda f$ si et seulement si $|\lambda| < 1$. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{D}$, posons $f_\lambda(z) = 1 + \sum_{n\geq 0} \lambda^n z^n$. Alors f_λ est un vecteur propre associé à la valeur propre f_λ. On a donc $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$. Comme $\sigma_p(S^*) \subset \sigma(S^*)$ et comme $\sigma(S^*)$ est fermé dans $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(S^*)$. D'autre part, comme $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S^*)\} \leq \|S^*\| = \|S\| = 1$, nécessairement $\sigma(S^*) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Par conséquent on a $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}}$.

3. Soit $\mathcal{M} \in Lat(S)$ et soient $x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{M}^\perp$. On remarque que

$$< S^*(y), x >=< y, S(x) >= 0$$

car $y \in \mathcal{M}^\perp$ et $S(x) \in \mathcal{M}$ puisque $x \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \in Lat(S)$. Par conséquent $S^*(\mathcal{M}^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$.

4. Comme $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$, $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$. Etant donné que $(S^*)^* = S$, d'après 3., $\mathcal{M}^\perp \in Lat(S^*)$ implique que $\mathcal{M} \in Lat(S)$. Finalement $Lat(S^*) = \{\mathcal{M}^\perp : \mathcal{M} \in Lat(S)\}$. D'après le théorème de Beurling, on a donc

$$Lat(S^*) = \{(\Phi H^2(\mathbb{D}))^\perp : \Phi \text{ fonction intérieure}\}.$$

Correction de l'exercice 5.4.2

1. Comme f est de la forme $f = U_f Q_f$ avec Q_f fonction extérieure de $H^2(\mathbb{D})$, il est clair que $f \in U_f H^2(\mathbb{D})$. D'après le Lemme 5.3.1, $U_f H^2(\mathbb{D}) \in Lat(S)$. Etant donné que Y est le plus petit élément de $Lat(S)$ contenant f, nécessairement $Y \subset U_f H^2(\mathbb{D})$. Il reste à vérifier que $U_f H^2(\mathbb{D}) \subset Y$. D'après le Théorème de Beurling, il existe une fonction φ intérieure telle que $Y = \varphi H^2(\mathbb{D})$. Puisque $f \in Y$, il existe donc une fonction $h \in H^2(\mathbb{D})$ de la forme $h = U_h Q_h$ avec U_h intérieure et Q_h extérieure telle que $U_f Q_f = \varphi U_h Q_h$. Par unicité de la décomposition d'une fonction de $H^2(\mathbb{D})$ en facteurs extérieur et intérieur, on obtient $U_f = \varphi U_h$. Comme $U_h \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$, $U_f \in Y = \varphi H^2(\mathbb{D})$. Nous allons reprendre le raisonnement vu dans la preuve du théorème de Beurling. Comme $U_f \in Y$ et $Y \in Lat(S)$, $S^n(U_f) = \alpha^n U_f \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme Y est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$, $P(\alpha)U_f \in \mathcal{M}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $g \in H^2(\mathbb{D})$. D'après le Théorème 4.4.2, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ si $z \in \mathbb{D}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $P_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$. On a donc $\|g - P_k(\alpha)\|_2^2 = \sum_{n\geq k+1} |a_n|^2$, ce qui implique $\lim_{k\to\infty} \|g - P_k(\alpha)\|_2 = 0$ puisque $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Comme U_f est intérieure,

$$\|U_f g - \phi P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|U_f^*(g^* - P_k(\alpha)^*)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|g^* - P_k(\alpha)^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|g - P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Par conséquent $\lim_{k\to\infty} \|U_f f - U_f P_k(\alpha)\|_2 = 0$ avec $\Phi P_k(\alpha) \in \mathcal{M}$ pour tout entier k. Comme $\mathcal{M}$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, $U_f g \in Y$ pour tout $g \in H^2(\mathbb{D})$. On a donc montré que $U_f H^2(\mathbb{D}) \subset Y$, ce qui implique $Y = U_f H^2(\mathbb{D})$.

2. Par unicité (à une constante unimodulaire près) de la représentation d'un élément de $Lat(S)$ sous la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ avec Φ intérieure (cf. Lemme 5.3.2), on peut affirmer que $Y = H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $U_f = c$ avec $c \in \mathbb{T}$. En d'autres termes, $Y = H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si le facteur intérieur de f est constant, ce qui signifie aussi que la fonction f est extérieure.

Bibliographie

[1] B. Beauzamy. Propriétés spectrales d'un opérateur sans sous-espace invariant. *J. Operator Theory*, 16 :349–353, 1986.

[2] H. Bercovici, C. Foias, and C. Pearcy. Two Banach space methods and dual operator algebras. *J. Funct. Anal.*, 78 :306–345, 1988.

[3] A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.*, 81 :239–255, 1949.

[4] S. Brown. Some invariant subspaces for subnormal operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 1 :310–333, 1978.

[5] S. Brown, B. Chevreau, and C. Pearcy. On the structure of contraction operators. II. *J. Funct. Anal.*, 76 :30–55, 1988.

[6] I. Chalendar and J. Esterle. Le problème du sous-espace invariant. In *Development of mathematics 1950-2000*, pages 235–267. Birkhaüser, Basel, 2000.

[7] P. Dolbeault. *Analyse complexe.* Masson, 1990.

[8] R. G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory.* Springer-Verlag, 1998. 2nd edition.

[9] P. L. Duren. *Theory of H^p spaces.* Dover Publications, INC., Mineloa, New-York, 2000.

[10] P. Enflo. On the invariant subspace problem in Banach spaces. In *Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Séminaire Maurey-Schwartz* (1975 – 1976). 1976.

[11] P. Enflo. On the invariant subspace problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 158 :213–313, 1987.

[12] J. B. Garnett. *Bounded analytic functions.* Academic Press, New-York, 1981.

[13] V. I. Lomonosov. Invariant subspaces for operators commuting with compact operators. *Funct. Anal. Appl.*, 7 :213–214, 1973.

[14] N. K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

[15] J. F. Pabion. *Eléments d'analyse complexe.* Ellipses, 1995.

[16] J. R. Partington. *Interpolation, identification and sampling.* Oxford University Press (Clarendon Press), 1997. London Mathematical Society Monographs vol. 17.

[17] C. Read. A solution to the invariant subspace problem. *Bull. London Math. Soc.*, 16 :337–401, 1984.

[18] C. Read. A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1. *Bull. London Math. Soc.*, 17 :305–317, 1985.

[19] C. Read. A short proof concerning the invariant subspace problem. *J. London Math. Soc.*, 34(2) :335–348, 1986.

[20] C. Read. The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators. *Israel J. Math.*, 63(1) :1–40, 1988.

[21] C. Read. The invariant subspace problem on some Banach spaces with separable dual. *Proc. London Math. Soc.*, 58(3) :583–607, 1989.

[22] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1991.

[23] L. Schwartz. *Analyse I : théorie des ensembles et topologie*, volume 42. Hermann, 1991.

[24] L. Schwartz. *Analyse III : Calcul intégral*, volume 44. Hermann, 1993.

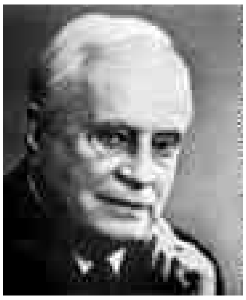
[25] A. Yger. *Analyse complexe et distributions.* Ellipses, 2001.

A. Beurling (1905-1986) Suédois.

G. H. Hardy (1877-1947) Anglais.

O. Hölder (1859-1937) Allemand.

J. Jensen (1859-1925) Danois.



R. Nevanlinna (1895-1980) Finlandais.

S. Poisson (1781-1840) Français.